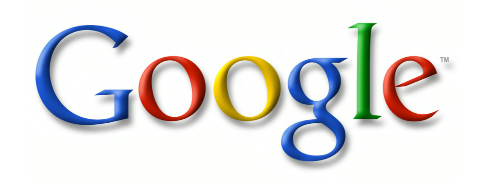
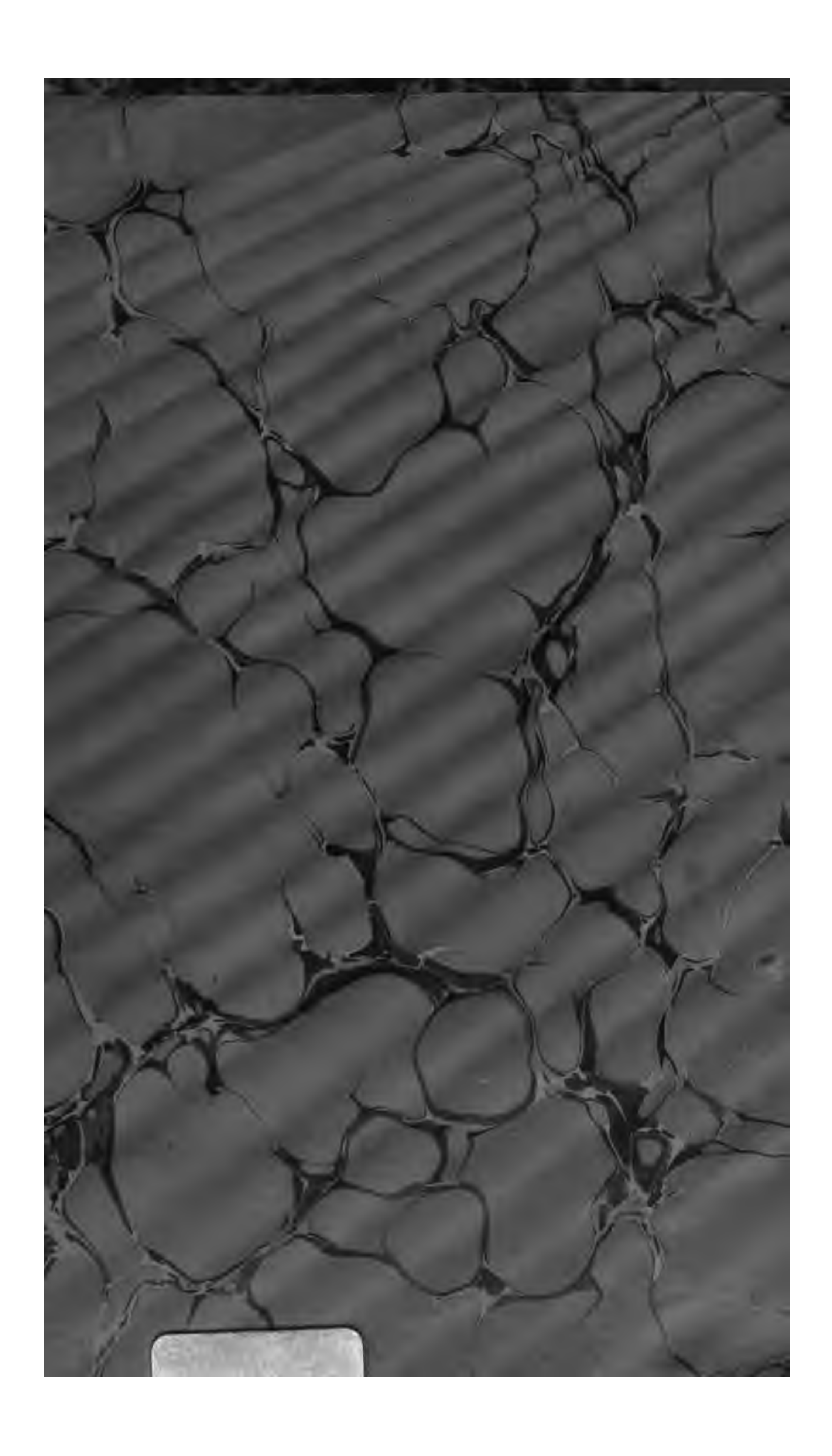



Stanford University Libraries
3 6105 027 441 190









BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

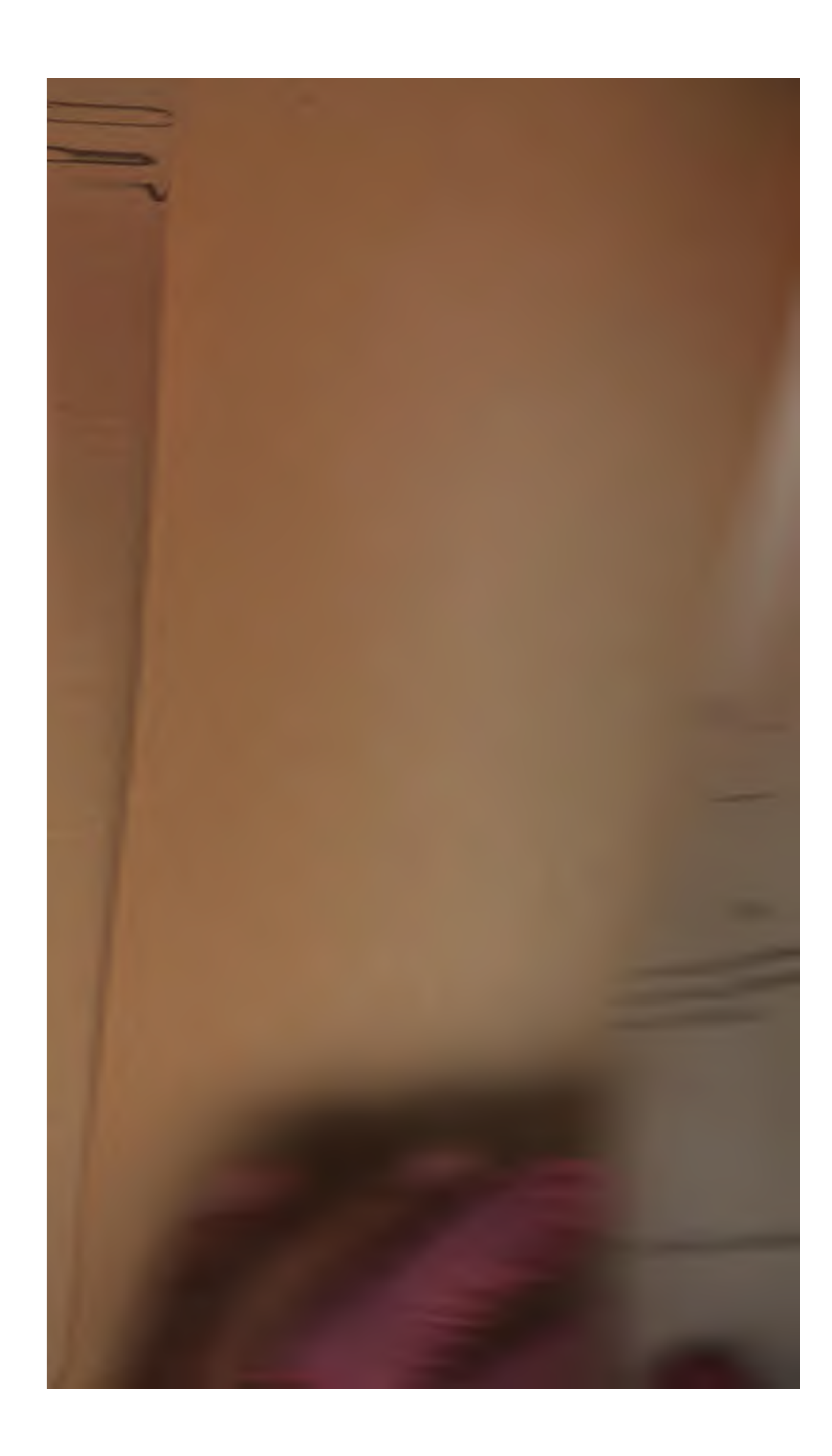
BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

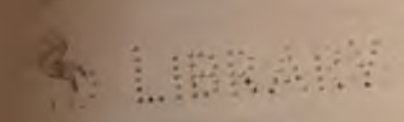
ASTRONOMIQUES.



ES

ERY,

ISANT, LAMPE,
R, ETC.,
ES ÉTUDES.



IS,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ALLET-BACHELIER,

ugustins, 55.

880

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL. Gr. in-8°; t. I, xv-508 pages, 1878; t. II, 475 pages, 1879. — Paris, Gauthier-Villars.

En 1871 (t. II du *Bulletin*, p. 257), notre regretté collaborateur Painvin rendait compte d'un Ouvrage autographié de M. Hoüel, qui n'était que la reproduction des Leçons faites par ce professeur avec tant de zèle et de succès, depuis nombre d'années, à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Cet Ouvrage autographié, tiré à un petit nombre d'exemplaires, a reçu le meilleur accueil, et le tirage en a été promptement épuisé.

Encouragé à juste titre par ce premier résultat, M. Hoüel a pensé qu'une édition nouvelle et plus complète serait accueillie avec faveur, et il a conçu le plan de l'Ouvrage actuel, dont les deux premiers Volumes ont paru et qui ne tardera pas, nous le savons, à être complété par la publication de deux autres Volumes, dont l'impression se poursuit avec régularité et sera promptement terminée.

Quand on suit avec attention, comme nous sommes tenu de le

faire en qualité de rédacteur de ce journal, les différentes publications qui se font chaque jour en Mathématiques, on remarque une transformation complète des Ouvrages destinés à l'Enseignement. Il est aisé de reconnaître que les exigences du public mathématique se sont tout à fait modifiées ; on est toujours sensible aux qualités d'ordre, de symétrie que peut offrir un Ouvrage de cette nature ; mais un courant incontestable assure avant tout le succès aux Ouvrages les plus complets, à ceux où l'on est assuré de trouver le plus de renseignements, le plus de théories et d'exercices, en un mot à ceux qui forment une véritable encyclopédie sur le sujet spécial dont l'auteur a à s'occuper.

L'Ouvrage de M. Hoüel sera assez complet pour satisfaire, sous ce rapport, les étudiants les plus difficiles. En ce qui concerne la théorie infinitésimale, il ne diffère pas essentiellement des Leçons publiées en 1870-71. Pour ce qu'on appelle quelquefois la métaphysique du Calcul infinitésimal, l'auteur est resté fidèle au point de vue qu'il avait adopté et qui est identique à celui de M. Duhamel dans la première édition de son *Cours d'Analyse*. Mais des additions d'une autre nature donnent une valeur nouvelle à l'Ouvrage actuel et en font à plusieurs égards un Ouvrage entièrement distinct des Leçons autographiées.

Nous parlerons d'abord de l'Introduction, qui ne comprend pas moins de 102 pages. Elle se compose de deux Parties distinctes. Il y a d'abord des notions sur le Calcul des opérations, qui nous paraissent des plus intéressantes. Elles sont sans doute un peu abstraites et pourront embarrasser les commençants ; mais elles plairont certainement aux professeurs, et nous sommes heureux de les trouver dans un Ouvrage français. Du reste, M Hoüel les éclaircit en les appliquant à la théorie des variables complexes. La deuxième Partie de l'Introduction comprend des notions présentées avec une grande simplicité sur la théorie des déterminants et sur l'élimination.

Le Livre premier traite des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal. L'auteur a maintenu l'innovation qui avait été approuvée, et selon nous avec raison, par M. Painvin ; immédiatement après les notions fondamentales de Calcul différentiel, il donne la définition des intégrales définies et des intégrales indéfinies ; on trouvera donc dans ce premier Livre, en même temps que la définition de ces intégrales, l'exposé des méthodes générales d'in-

tégration. Nous ferons remarquer aussi que, conformément à la métaphysique qu'il a adoptée et qui, d'après lui et d'après Carnot, comprend comme cas particuliers tous les autres points de vue, l'auteur donne une définition de la différentielle autre que celle qui parait aujourd'hui généralement adoptée : y étant une fonction de x et y' sa dérivée, pour M. Hoüel la différentielle sera

$$dy = (y' + \varepsilon)\,dx,$$

et la partie qu'on appelle communément la différentielle $y'dx$, il l'appelle la *partie principale* de la différentielle.

Des Chapitres assez développés et fort intéressants sont consacrés au calcul des dérivées d'ordres supérieurs et à l'étude des propriétés les plus simples des déterminants fonctionnels. Ce Livre, de même que les suivants, est complété par un recueil étendu d'exercices, qui contribueront certainement à augmenter l'intérêt et l'utilité de l'Ouvrage.

Le Livre deuxième traite des applications analytiques du Calcul infinitésimal, des développements en série des formules de Taylor et de Maclaurin dont les applications sont extrêmement variées, des vraies valeurs des expressions indéterminées, etc. Nous avons remarqué des discussions fort intéressantes sur les maxima et les minima, et en particulier une méthode très simple pour reconnaître les signes distinctifs du maximum ou du minimum dans le cas des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Le Livre contient également les applications analytiques du Calcul intégral : intégration des fonctions rationnelles, des différentielles binômes, intégrales multiples, et enfin les intégrales eulériennes, où M. Hoüel fait connaitre la formule importante de Dirichlet, qui comprend comme cas particuliers un si grand nombre de déterminations de volumes, d'aires, de centres de gravité. Ce Livre se termine par l'exposé de la formule de sommation de Maclaurin et d'Euler, et la démonstration de cette formule, d'après M. Imchenetsky. Des exemples numériques font sentir toute l'utilité de la formule. Un recueil d'exercices termine également ce Livre deuxième et le premier Volume de l'Ouvrage.

C'est dans le Livre troisième que sont abordées les applications géométriques, la théorie des tangentes, celle des asymptotes, la longueur d'un arc de courbe, les points d'inflexion, la courbure,

les enveloppes, les points singuliers, etc. Mais nous insisterons sur un Chapitre, d'ailleurs élémentaire, consacré à la méthode des équipollences de M. Bellavitis. Cette belle théorie du géomètre italien se confond maintenant avec celle de la représentation par un point d'une variable complexe ; bien que les principes en soient devenus familiers, on n'insistera jamais trop, à notre avis, sur les avantages considérables qu'elle peut présenter en Géométrie. Nous signalerons aussi un Chapitre sur les courbes dans l'espace, la courbure des surfaces d'après le Mémoire de Gauss et sur les coordonnées curvilignes.

La première partie du Livre quatrième, consacré entièrement aux équations différentielles, forme le complément du deuxième Volume. Nous y signalerons particulièrement l'application à l'intégration de quelques équations linéaires de la belle méthode d'Euler et de Laplace qui consiste à représenter une fonction $f(x)$ par l'intégrale

$$\int e^{ux} \varphi(u)\, du,$$

prise entre des limites déterminées ; dans la rédaction de cette partie, M. Hoüel a mis à profit l'Ouvrage de M. S. Spitzer : *Vorlesungen*, etc. Nous remarquons aussi dans ce Livre l'heureux emploi des notations symboliques et des fonctions entières de la caractéristique de dérivation D_x. Il nous semble qu'il y a un réel intérêt à faire connaître aux élèves ces procédés de démonstration, qui les prépareront à l'étude de la théorie des formes où ils sont d'un usage continuel.

Quant à la démonstration du théorème fondamental, que toute équation différentielle a une intégrale, l'auteur a suivi la méthode si intéressante, due à Cauchy et dont nous devons la connaissance, un peu confuse, au *Calcul intégral* de M. l'abbé Moigno. Nous aurions désiré que l'auteur la présentât avec plus de développement et qu'il l'étendît à un nombre quelconque d'équations différentielles du premier ordre, comme l'a fait M. Lipschitz dans un important Mémoire dont nous avons autrefois publié la traduction. Mais, comme on peut toujours ramener à un tel système une équation d'un ordre quelconque contenant une seule fonction inconnue, il n'y a pas là une objection de fond.

On voit, par ce résumé trop succinct des matières contenues dans les deux premiers Volumes, que le Traité de notre excellent collaborateur et ami est un Ouvrage consciencieusement écrit, et nous

sommes convaincu qu'il sera accueilli avec la même faveur que le Traité autographié qu'il est destiné à remplacer, et qui était devenu très rare et très recherché. Dans cette analyse rapide, nous avons négligé quelques points de détail sur lesquels nous aurions eu à faire quelques réserves ; mais, par compensation, nous n'avons pas signalé bien des théories secondaires qui sont réellement intéressantes et qui contribueront à augmenter la valeur de l'Ouvrage. Il ne nous reste plus qu'à exprimer le désir que l'Ouvrage soit promptement terminé et que l'apparition des deux derniers Volumes couronne dignement le travail considérable de notre collaborateur.

G. D.

BRIOT (C.). — Théorie des fonctions abéliennes. — In-4°, 181 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

On sait quels importants progrès, depuis vingt-cinq ans environ, MM. Briot et Bouquet ont réalisés dans la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes : l'*Étude des fonctions d'une variable imaginaire*, les *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, insérées dans le XXXVIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, la *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques* (1859), enfin la *Théorie des fonctions elliptiques* (1875) constituent une œuvre capitale, dont toutes les parties se tiennent étroitement et où l'on ne saurait trop admirer l'unité de la méthode, la fécondité de l'idée directrice, la richesse des développements et l'extrême clarté où toutes choses sont mises.

Cette œuvre se trouve achevée (si toutefois ce mot peut s'appliquer lorsqu'il s'agit de recherches scientifiques) par la publication de la *Théorie des fonctions abéliennes*, due à M. Briot seul, qui, pendant plusieurs années, avait pris cette théorie pour sujet de ses Leçons à la Sorbonne.

MM. Clebsch et Gordan ont publié sur ce sujet, en 1866, un Livre bien connu (*Theorie der Abelschen Functionen*), dans lequel ils traitent le cas particulier où l'équation proposée n'admet que des points critiques du second ordre ; M. Briot, au contraire, traite la question dans toute sa généralité, indépendamment de l'ordre

des points critiques, de leur distribution dans le plan et de la loi de permutation des racines autour de ces points.

L'Ouvrage s'ouvre par une Introduction où l'auteur a rappelé les principes de la théorie des fonctions analytiques.

Dans la première Partie (p. 1-78), l'auteur traite des intégrales abéliennes de première espèce, en suivant d'ailleurs la même voie que MM. Clebsch et Gordan, mais en laissant de côté les considérations géométriques qu'ils ont employées.

La formation des intégrales de première espèce, la détermination de leur nombre sont obtenues en suivant une marche due à M. Elliot (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, 1875) (¹). M. Briot étudie ensuite la formation des systèmes de *lacets fondamentaux* de première et de seconde espèce, ainsi que les *circuits* de première et de seconde espèce. Les périodes d'une intégrale abélienne de première espèce sont les valeurs de l'intégrale définie relatives aux différents *cycles* simples, formés chacun d'un certain nombre de lacets fondamentaux et d'un seul lacet non fondamental ; suivant que l'on considère les cycles de première ou de seconde espèce, on obtient les périodes de première ou de seconde espèce ; p étant le nombre des intégrales de première espèce, tous les cycles se ramènent à $2p$ cycles simples : tel est donc le nombre des périodes de première ou de seconde espèce pour chaque intégrale abélienne de première espèce ; d'ailleurs, les périodes de chaque système s'expriment linéairement au moyen des périodes de l'autre.

L'auteur établit ensuite la relation bilinéaire entre les périodes ω et ε de deux intégrales de première espèce u et v,

$$P = \sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} C_{ik}\, \omega_i \varepsilon_k = 0,$$

par la considération de la somme

$$P = \sum_{h=0}^{h=m-1} \int u_h\, dv_h,$$

où les intégrations sont effectuées le long d'un contour simple, con-

(¹) Voir *Bulletin*, I₁, 270.

venablement choisi, à l'intérieur duquel les fonctions u, v sont holomorphes et où les indices se rapportent aux m valeurs initiales différentes des fonctions u, v convenablement définies. La considération de la somme

$$Q = \sum_{h=1}^{h=m-1} \int v_h du_h$$

montre que l'on a

$$C_{ki} = - C_{ik}, \quad C_{ii} = 0,$$

et qu'ainsi le déterminant des quantités C_{ik} est un déterminant gauche égal à $+1$. Une série de transformations simples des périodes permet ensuite de ramener ce déterminant à la forme *canonique,* où tous les éléments sont nuls, sauf les éléments contigus à la diagonale, dont les uns sont égaux à $+1$, les autres à -1; on parvient ainsi à la notion des périodes *normales,* puis des intégrales *normales,* pour lesquelles les périodes normales à indices impairs sont toutes nulles, sauf une qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$. Toutes ces considérations s'appliquent sans difficulté aux intégrales hyperelliptiques. La démonstration du théorème d'Abel termine la première Partie.

La deuxième Partie (p. 79-172) débute par la démonstration, donnée par M. Bouquet dans le *Bulletin* (I[re] Partie, t. III, p. 265), de l'existence des fonctions définies par un système d'équations aux différentielles totales, démonstration qui repose sur les principes dont MM. Briot et Bouquet se sont servis pour établir l'existence des fonctions définies par un système d'équations différentielles à une seule variable indépendante.

Les équations différentielles *abéliennes* sont ensuite données sous la forme

$$\sum_{h=1}^{h=p} \frac{Q_i(x_h, y_h)}{F'_y(x_h, y_h)} dx_h = du_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où F'_y est la dérivée par rapport à y du premier membre d'une équation irréductible $F(x, y) = 0$ de degré n, et où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ désignent les p polynômes entiers en x et y de degré $n-3$ qui entrent dans la formation d'un système d'intégrales abéliennes de première espèce.

L'étude des cas où le déterminant formé avec les coefficients des différentielles dx_1, $dx_2, \ldots, dx_p$ dans les équations différentielles précédentes peut devenir nul montre que, à l'exception des valeurs des variables pour lesquelles il y a indétermination, toute fonction rationnelle et symétrique des p quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est une fonction monotrope et méromorphe des p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_p$: une telle fonction est dite *abélienne*.

Pour effectuer l'inversion, l'auteur suit une méthode analogue à celle qu'il avait suivie avec M. Bouquet dans le cas des fonctions elliptiques. Après avoir établi les principales propriétés de la fonction Θ à p variables,

$$\Theta = \mathrm{S}e^{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p) + \mathrm{P}},$$

où les p nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ doivent prendre toutes les valeurs et où les $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes α qui figurent dans le polynôme homogène et du second degré

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{h=1}^{h=p} m_i m_h \alpha_{ih}$$

sont telles que la partie réelle de ce polynôme soit négative pour toutes les valeurs réelles des nombres m, M. Briot définit la fonction

$$\Theta[u^{(i)}(x, y) - \mathrm{G}_i],$$

où

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\mathrm{Q}_i(x, y)}{\mathrm{F}'_y(x, y)}\,dx$$

est une intégrale normale de première espèce. On a établi précédemment que les périodes normales de rangs pairs $2\alpha_{ih}$ des intégrales normales de première espèce, telles que $u^{(i)}$, satisfont précisément à la condition imposée aux coefficients du polynôme P pour la convergence de la série Θ. Quant aux quantités G_i, ce sont des constantes arbitraires. L'étude de la fonction ainsi définie conduit successivement l'auteur aux théorèmes suivants :

La fonction $\Theta[u^{(i)}(x, y) - \mathrm{G}_i]$ *admet* p *zéros.*

Ces p zéros satisfont aux relations

$$\sum_{h=1}^{h=p} u^{(i)}(x_h, y_h) - G_i = C_i,$$

dans lesquelles les quantités C_i *sont indépendantes des arbitraires* G_i.

On peut déterminer ces p arbitraires G_i *de façon que les p zéros soient donnés.*

La fonction

$$\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=p-1} u^{(i)}(x_h, y_h) - G_i\right]$$

de $p-1$ *variables indépendantes* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$ *est identiquement nulle.*

La somme des valeurs d'une intégrale abélienne normale $u^{(i)}(x, y)$ *aux points d'intersection de la courbe* $F = 0$ *et d'une courbe variable de degré* $m-3$, *satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, est équivalente à la quantité constante* $2C_i$.

La fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) + \sum_{h=1}^{h=p-1} u^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi, \eta) - C_i\right]$$

admet le zéro (ξ, η) *et* $p-1$ *autres zéros indépendants du premier.*

Étant données deux courbes $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ *du degré n, si l'on désigne par* (ξ_h, η_h) *les mn points d'intersection de la première et de la courbe proposée* $F(x, y)$, *et par* (ξ'_h, η'_h) *les points d'intersection de la seconde et de la même courbe* $F(x, y) = 0$, *si de plus* $u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ *sont les valeurs qu'acquièrent les intégrales abéliennes* $u^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ *quand on passe de la première courbe à la seconde par une variation continue, la fonction*

$$W = \prod_{h=1}^{h=mn} \frac{\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=n} u^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{h=1}^{h=n} u^{(i)}(x_h, y_h) - u^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i\right]}$$

est égale à une fonction rationnelle des p points x_h, y_h, qui n'est autre que la fonction

$$E \prod_{h=1}^{h=p} \frac{\psi(x_h, y_h)}{\varphi(x_h, y_h)},$$

où E *est un facteur constant.*

Cette dernière proposition conduit immédiatement à l'expression des fonctions abéliennes et à l'intégration des équations différentielles abéliennes.

Le Volume se termine par deux Notes, l'une relative au théorème de Green, l'autre à la démonstration de cette proposition :

Étant donnée une équation algébrique irréductible $F(x, y) = 0$ *du degré m, toute fonction analytique et monotrope du point* (x, y) *et qui sur toute la sphère relative à la variable x n'admet pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques est égale à une fonction rationnelle de x et de y.*

J. T.

SCHUBERT (H.). — KALKÜL DER ABZÄHLENDEN GEOMETRIE. — 1 vol. in-8°, 359 pages; 1879.

On trouvera dans ce Volume, exposés d'une façon systématique, un grand nombre de résultats appartenant à cette *Géométrie numérique* qui a son origine dans les travaux de M. Chasles, à laquelle les recherches subséquentes de son illustre fondateur, celles de MM. Zeuthen, Clebsch, Halphen, de Jonquières, Sturm, Maillard, Voss, Brill, etc., et celles de M. Schubert lui-même ont, depuis une quinzaine d'années, donné une extension si considérable.

L'originalité du Livre de M. Schubert consiste surtout dans l'emploi continuel d'un système de notations et d'opérations symboliques dont il convient d'exposer le principe.

Après avoir donné une classification des figures simples engendrées par les éléments essentiels de l'espace (point, plan, droite), l'auteur explique le système de notations dont il se sert pour désigner les diverses conditions fondamentales relatives à ces figures.

Ainsi, p désignant un point, le même symbole p exprime la condition pour que ce point soit dans un plan, le symbole p_g la condition pour qu'il soit sur une droite donnée, et le symbole P, la condition pour que le point p soit donné. De même, les symboles e, e_g, E, qui se rapportent à un plan e, expriment que ce plan passe par un point donné, ou par une droite donnée, ou encore est donné; enfin les symboles g, g_e, g_p, g_s, G, relatifs à une droite g, expriment que cette droite rencontre une droite donnée, est contenue dans un plan donné, contient un point donné, appartient à un faisceau de droites donné ou est donnée complètement.

Si maintenant on considère une condition *composée*, ou, si l'on veut, l'ensemble de deux conditions, on l'exprimera par le *produit* des deux symboles des deux conditions composantes ; le carré d'un symbole de condition veut dire que deux conditions identiques doivent être remplies à la fois par la figure à laquelle se rapporte ce symbole de condition ; les produits d'un nombre quelconque de symboles, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un symbole s'expliquent de même. Ainsi, g^2 veut dire que la droite g doit couper deux droites données ; hh_p, où h désigne une droite, veut dire que cette droite rencontre une droite donnée et passe par un point donné.

La somme de deux symboles de conditions imposées à une figure signifie que l'une ou l'autre de ces conditions doit être remplie.

Les conditions imposées à une figure Γ doivent être divisées en deux classes suivant que ces conditions se rapportent à une figure donnée Γ' ou qu'elles ont un caractère invariant ; c'est dans cette dernière classe, par exemple, qu'il faudrait ranger la condition imposée à une courbe plane ponctuelle générale d'avoir un point double.

La *dimension* d'une condition est le nombre d'équations entre les constantes qui déterminent la figure à laquelle elle est imposée, par lesquelles on exprime cette condition ; ainsi la dimension des conditions p, e, g est 1, celle des conditions p_g, e_g, g_e, g_p est 2, celle des conditions P, E, g_s est 3, enfin la condition G est quadruple. Si l'on considère une figure dont la détermination dépend de c constantes, c est l'ordre de multiplicité (*Stufe*) du système formé par les ∞^c figures obtenues en donnant aux c constantes toutes les valeurs possibles ; si l'on impose à ces figures une condition dont la dimension est α, le système des figures qui satisfont à cette condition a pour ordre de multiplicité $c - \alpha$.

Par exemple, le système de points ou de plans situés sur un axe ou passant par un axe a pour ordre de multiplicité 1, un complexe de droites a pour ordre de multiplicité 3, etc.

Ces définitions établies, l'auteur expose un principe qui est fondamental dans ses recherches et auquel il donne le nom de *principe de la conservation du nombre* (*Princip von der Erhaltung der Anzahl*).

Soit Γ une figure dont la détermination dépende de c constantes; si on lui impose une condition de la $c^{\text{ième}}$ dimension, il y aura en général un nombre fini N de figures Γ satisfaisant à la condition imposée. Or, en supposant que celle-ci appartienne à la première catégorie, c'est-à-dire, se rapporte à une figure Γ' que l'on regarde comme donnée, ce nombre N restera le même, à moins de devenir infini, quelles que soient les diverses positions particulières que l'on assigne aux éléments de la figure Γ'. Ce principe est lié à ce fait que, dans une équation algébrique entière à une inconnue, le nombre des racines ne dépend pas des valeurs spéciales des coefficients, mais reste toujours le même, à moins que, tous les coefficients devenant nuls, il ne devienne infini ; par exemple, il y a évidemment deux droites qui satisfont à cette condition de rencontrer quatre droites dont les deux premières et aussi les deux dernières sont dans un même plan : il y aura donc toujours deux droites, ou une infinité, satisfaisant à la condition de rencontrer quatre droites données ; il est à peine utile de dire que l'application de ce principe demande quelques précautions.

Voici maintenant en quoi consistent les équations symboliques de M. Schubert.

Les deux membres d'une telle équation représentent les nombres de figures qui satisfont à certaines conditions ; ces conditions sont exprimées, comme il a été expliqué précédemment, par des lettres ou des produits de facteurs ; les conditions exprimées par chaque *monôme* symbolique doivent être de la même dimension, et, si cette dimension est égale à l'ordre de multiplicité du système des figures considérées, rien n'empêche de considérer ce monôme comme représentant, non plus la condition imposée à la figure, mais le nombre de figures du système qui satisfont à cette condition. On conçoit dès lors sans difficulté ce que signifie une équation dont les deux membres sont des sommes ou des différences de tels monômes.

M. Schubert introduit aussi des équations dans lesquelles la dimension α des conditions représentées par chaque monôme est inférieure à l'ordre de multiplicité c du système considéré.

Une telle équation doit devenir toujours une identité quand on multiplie chacun des symboles de conditions α^{uples} qui y figurent par un même facteur symbolique représentant une condition de dimension $c - \alpha$, d'ailleurs entièrement arbitraire.

Ainsi, relativement à une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre dépendant de c constantes, l'auteur établit l'équation symbolique

$$P = \mu\nu - n\mu^2,$$

où P représente la condition (double) pour que la courbe passe par un point donné, μ la condition (simple) pour que son plan passe par un point donné et ν la condition (simple aussi) pour que la courbe rencontre une droite donnée; en sorte que P, $\mu\nu$, μ^2 sont bien des conditions de même dimension. Si $c = 2$, le sens de cette équation, où l'on considère P, $\mu\nu$, μ^2 comme les nombres de courbes du système considéré (dont l'ordre de multiplicité est 2) qui satisfont aux conditions doubles P, $\mu\nu$, μ^2, est évident. Le nombre de courbes d'un tel système qui passent par un point donné est égal au nombre de celles dont le plan passe par un point donné, et qui rencontrent une droite donnée, diminué de n fois le nombre de celles dont le plan passe par deux points donnés. Si maintenant c est supérieur à 2, l'équation

$$Py = \mu\nu y - n\mu^2 y,$$

où y représente une condition de dimension $c - 2$, devra être identiquement satisfaite quelle que soit d'ailleurs cette condition. Il est clair, d'après cela, qu'on peut multiplier tous les termes d'une même équation par un facteur symbolique quelconque.

On voit qu'on peut appliquer aux équations symboliques les règles habituelles tant que les transformations sont opérées par voie d'addition, de soustraction ou de multiplication. Ainsi, de l'équation précédente on tire, en multipliant par P, par $\mu\nu$, par μ^2, les équations suivantes :

$$P^2 = \mu\nu P - n\mu^2 P,$$
$$\mu\nu P = \mu^2\nu^2 - n\mu^3\nu P,$$
$$\mu^2 P^2 = \mu^3\nu.$$

Dans la dernière équation, on a supprimé le terme $n\mu^4 = 0$; en effet, il n'y a point de plan qui passe par quatre points donnés arbitrairement.

Entre les conditions fondamentales relatives au point, au plan, à la droite, il existe des relations symboliques aisées à obtenir ; ainsi on a

$$p^2 = p_g, \quad p^3 = pp_g = \mathrm{P},$$
$$e^2 = e_g, \quad e^3 = ee_g = \mathrm{E},$$
$$g^2 = g_p + g_e,$$
$$gg_p = gg_e = g_s, \quad gg_s = g_p g_e = \mathrm{G}, \quad \ldots.$$

Il est facile de prévoir quel parti on peut tirer de ce calcul symbolique, quel degré de généralité et, pour ainsi dire, de condensation acquièrent les propositions relatives à la Géométrie numérique, combien enfin de telles propositions peut contenir un Livre comme celui de M. Schubert, entièrement rempli de formules où figurent quelques lettres et dont chacune équivaut à un théorème dont l'énoncé en langage ordinaire exigerait habituellement un grand nombre de lignes.

Il nous reste à exposer rapidement à quoi ces formules se rapportent.

La seconde Section (p. 25-41) contient les *formules d'incidence* (*Incidenzformeln*). Après les éléments fondamentaux de l'espace, point, droite et plan, les figures les plus simples que l'on puisse considérer sont formées de deux tels éléments, dont l'un contient ou rencontre l'autre ; M. Schubert dit alors qu'ils sont *incidents* ou qu'ils forment une *incidence*. Ainsi les trois éléments forment quatre *incidences*, à savoir les figures formées : d'un point et d'une droite, le point étant sur la droite ; d'un point et d'un plan, le point étant sur le plan ; d'une droite et d'un plan, le plan passant par la droite ; d'une droite et d'une droite qui la rencontre.

Pour l'incidence formée d'un point et d'une droite, on a l'équation fondamentale

$$pg = p^2 + g_e,$$

d'où l'on déduira, par la multiplication symbolique, des formules dont les dimensions seront 3, 4, 5. On saisira la portée de la méthode de M. Schubert par l'application qu'il donne de cette for-

mule à l'*incidence* formée par la tangente à une courbe gauche et son point de contact, p désignant un point quelconque de cette courbe et g sa tangente en ce point : en sorte que, pour cette courbe, p^2 représentera la condition pour que l'un de ses points p soit à la fois sur deux plans donnés ou, ce qui revient au même, sur une droite donnée, ou encore la condition pour que la courbe rencontre une droite donnée ; de même g_e sera la condition pour qu'elle touche un plan donné et pg la condition pour qu'elle rencontre un plan donné en un point tel que la tangente g en ce point rencontre une droite donnée.

En considérant un système de courbes d'ordre de multiplicité 1, et, par suite, d'ordre de multiplicité 2 par rapport aux éléments d'une de ces courbes (point, tangente, incidence formée par un point et une tangente), en identifiant ensuite les symboles de condition avec les nombres de courbes du système qui satisfont à ces conditions, on voit que l'équation fondamentale exprime le théorème suivant :

En ajoutant le nombre de courbes gauches d'un système d'ordre de multiplicité 1 qui rencontrent une droite donnée au nombre de celles qui touchent un plan donné, on obtient le nombre des courbes de ce système qui coupent un plan en un point tel que la tangente en ce point rencontre une droite donnée, ou, ce qui est la même chose, le degré de la courbe lieu des points de contact des tangentes qui rencontrent une droite donnée, ou encore le degré de la surface gauche lieu de ces mêmes tangentes.

Les autres formules d'incidence, relatives soit, comme la précédente, à l'incidence point-droite, soit aux autres incidences, donnent également lieu à de nombreuses applications.

La troisième Section (p. 42-89) contient les formules de coïncidence.

Deux éléments fondamentaux (point, plan, droite) forment une coïncidence quand ils sont infiniment voisins, et les problèmes que traitent l'auteur sont compris dans l'énoncé général que voici :

Exprimer les conditions de coïncidence d'un couple d'éléments au moyen des conditions fondamentales.

La solution de ces problèmes dépend du *principe de corres-*

pondance. Par exemple, pour la condition de coïncidence ε d'un couple de points p, q, on a l'équation fondamentale

$$\varepsilon = p + q - g,$$

g désignant la droite qui joint les deux points, *droite dont on suppose la position limite déterminée*. Cette formule et celles qui s'en déduisent s'appliquent à la détermination des nombres relatifs au contact de courbes planes et de surfaces. Les formules de coïncidence d'un couple de droites conduisent à des résultats importants dans la théorie des systèmes de génératrices des surfaces du second degré.

Ces deux Sections sont ainsi remplies par l'établissement de nombreuses équations symboliques ; celle qui suit concerne au contraire des déterminations de nombres (p. 90-227) relatifs à des figures assujetties à des conditions dont les dimensions ont pour somme un nombre égal au nombre des constantes qui entrent dans la définition de ces figures (coniques, surfaces du second degré, courbes planes avec point de rebroussement ou point double, cubiques gauches, courbes planes du quatrième ordre situées dans un plan fixe, congruences linéaires, etc.). Ces nombres sont obtenus par la considération des dégénérescences (*Ausartungen*).

Par exemple, en désignant par η et δ les deux espèces de coniques dégénérées et aussi les conditions pour qu'une conique appartienne à l'une ou à l'autre de ces deux espèces, puis par μ, ν et ρ les conditions pour que cette même conique ait son plan passant par un point donné, ou bien rencontre une droite donnée, ou encore touche un plan donné, on trouve aisément les *nombres*

$$\eta\mu^m\nu^n\rho^{7-m-n},$$
$$\delta\mu^m\nu^n\rho^{7-m-n},$$

qui correspondent à des conditions de la huitième dimension, conditions par lesquelles la conique est déterminée ; de ces résultats on peut s'élever à la détermination des nombres de la forme

$$\mu^m\nu^n\rho^{8-m-n}, \quad \ldots.$$

La cinquième Section (p. 228-270) concerne les coïncidences multiples (coïncidences des points d'intersection d'une droite et

d'une surface, de plusieurs points sur une droite, de plusieurs droites d'un faisceau); elle est terminée par l'étude des singularités d'un complexe du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Enfin, la dernière Section (p. 271-332) contient la théorie des caractéristiques sous une forme très générale, relative à une figure quelconque Γ ou plutôt à un système Σ de telles figures et d'un ordre de multiplicité quelconque i_4. Le problème général que se pose M. Schubert consiste à exprimer, lorsque cela est possible, toute condition de dimension i au moyen d'un certain nombre de conditions i^{uples}, l'équation qui relie ces diverses conditions subsistant pour tout système d'ordre de multiplicité i, composé de figures Γ. Outre les coniques, M. Schubert s'occupe des figures formées par une droite et un point situé sur elle, des faisceaux de droites, des figures formées par une droite, un point situé sur elle et un plan passant par elle, des figures formées par une droite et n points situés sur elle, des figures formées par une droite et n droites qui la rencontrent. L'étude de cette dernière figure le conduit à d'importants résultats concernant la congruence de droites communes à deux complexes.

Le Volume se termine par quelques pages contenant d'assez nombreux renseignements historiques et bibliographiques. Signalons le regret exprimé par M. Schubert de n'avoir pu utiliser les récents travaux de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques, travaux qu'il n'a pu connaître qu'après l'impression de son Livre.

BETTI (E.). — TEORICA DELLE FORZE NEWTONIANE E SUE APPLICAZIONI ALL' ELETTROSTATICA ED AL MAGNETISMO. — Pisa, T. Nistri, 1879.

Cet Ouvrage de M. Betti est la seconde édition, revue et fort augmentée d'une monographie, qui a paru en 1865 sous le titre : *Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton;* mais les changements introduits sont tels, qu'on peut regarder ce livre comme entièrement nouveau. L'Ouvrage est partagé en trois Chapitres, qui traitent respectivement des fonctions potentielles et des potentiels, de l'électrostatique et du magnétisme.

Dans le premier Chapitre, l'auteur, après avoir donné la définition de la fonction potentielle d'un système de masses qui agissent

en raison inverse du carré des distances et proportionnellement aux masses, expose, suivant la méthode de Jacobi, la transformation de l'expression Δ^2 pour des variables quelconques, ce qui lui permet de donner immédiatement la fonction potentielle d'une masse homogène distribuée entre deux sphères concentriques, la fonction potentielle d'une surface sphérique homogène et celle d'une droite. L'auteur, au moyen des résultats obtenus dans les cinq premiers paragraphes, détermine les propriétés de la fonction potentielle et de ses dérivées premières et secondes, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur des masses, soit lorsqu'on traverse les contours des masses; il démontre ensuite le théorème de Dirichlet, qui prouve que ces propriétés sont caractéristiques de la fonction potentielle.

Le § XI contient la démonstration du théorème de Green et de ceux qui ont été donnés par Gauss et qui peuvent facilement être déduits du premier.

Le § XII, outre le théorème de Stokes qui sert à transformer une intégrale double en une intégrale simple, contient les propriétés de la fonction potentielle d'une surface qui a sur une des faces une couche de matière attirante et sur la face opposée une couche égale de matière répulsive.

Lorsque l'on a déterminé les surfaces de niveau d'un système de corps donné, la fonction potentielle au delà d'une surface de niveau, qui renferme tous les corps donnés, est égale à la fonction potentielle d'une masse homogène, mais d'épaisseur variable, distribuée sur la surface de niveau. L'auteur résout alors ce problème : *Déterminer les conditions pour que, en prenant l'équation* $f(x, y, z, \lambda_0, h_0) = 0$, *dans laquelle* λ *et* h *sont des paramètres, et en supposant remplie de matière homogène la couche comprise entre les surfaces* $f(x, y, z, \lambda_0, h_0) = 0$, $f(x, y, z, \lambda_0, h_0 + \varepsilon) = 0$, *les surfaces de niveau dans l'espace extérieur à cette couche soient représentées par l'équation* $f(x, y, z, \lambda, h_0) = 0$, *dans laquelle on donne à* λ *toutes les valeurs comprises entre* λ_0 *et* ∞.

Si ces conditions sont vérifiées pour toutes les valeurs de h comprises entre deux nombres donnés α et β, la fonction potentielle d'une masse distribuée par couches correspondantes aux valeurs de h comprises entre α et β, même si la densité varie de couche en couche, dépend seulement de quadratures. L'auteur, en appliquant cette méthode, trouve la fonction potentielle d'une masse homogène

distribuée entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins, et ensuite la fonction potentielle d'une masse qui remplit l'espace compris entre deux ellipsoïdes homothétiques et dont la densité varie de couche en couche. L'auteur vérifie ensuite les résultats obtenus au moyen du théorème de Dirichlet sur les propriétés caractéristiques. La fonction potentielle de l'ellipse, soit homogène, soit hétérogène, est déduite comme cas limite de celle de l'ellipsoïde, et l'auteur retrouve ainsi l'expression déjà donnée par M. Dini.

La détermination de la fonction potentielle d'une surface plane (§ XVI), ainsi que celle d'un polyèdre (§ XVII), conduisent à une série de théorèmes fort élégants, et la détermination de la fonction potentielle d'un cylindre circulaire droit homogène est une application fort intéressante de la méthode de Dirichlet.

Dans ces premiers paragraphes, l'auteur non seulement donne toutes les propriétés des fonctions potentielles des forces newtoniennes, mais, soit directement, soit au moyen du théorème de Dirichlet, il retrouve aussi les expressions de presque toutes les fonctions potentielles qui jusqu'à présent ont pu être données en termes finis.

Le potentiel d'un système de masses sur un autre et le potentiel d'un système sur lui-même sont définis dans le § XX, et, comme application, on y trouve le potentiel d'un ellipsoïde sur lui-même. Quand on a le potentiel d'un système de masses, on peut écrire les équations du mouvement et il est important de savoir quelles doivent être les conditions afin qu'aucune des distances mutuelles des points ne devienne pas infiniment grande ni infiniment petite. En posant $\Phi = \frac{1}{M}\Sigma m_s m_{s_1} r_{ss_1}^2$, où M est la somme de toutes les masses et r_{ss_1} la distance du point m_s au point m_{s_1}, Jacobi avait trouvé la relation $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = P + 2h - MV^2$, dans laquelle P est la fonction homogène de degré -1 qui représente le potentiel, h la constante des forces vives et N la vitesse du centre de gravité; de cette équation l'auteur déduit que, toutes les fois que les points du système restent à distance finie différente de zéro entre eux, tandis que leurs actions mutuelles suivent la loi de Newton, la force vive relative moyenne est constante et égale à la moitié du potentiel moyen.

La recherche des points de maxima et de minima de la fonction potentielle d'un système donné conduit à plusieurs théorèmes remarquables et celle des conditions afin que le potentiel soit fini montre qu'il est pour cela nécessaire que les masses occupent un espace d'au moins deux dimensions.

Le § XXIII est employé à l'étude des lignes de force ; on y trouvera les méthodes analytiques pour la solution du problème général et l'application à la détermination des lignes de force d'un ellipsoïde de révolution.

Le deuxième Chapitre commence par l'exposition de l'hypothèse fondamentale de la théorie mathématique de l'électricité et des conditions générales afin que l'électricité distribuée sur un conducteur soit en équilibre sous l'action simultanée d'autres conducteurs électrisés et de corps cohibents chargés d'électricité. Le premier problème d'équilibre électrique que résout l'auteur est celui de l'électricité distribuée sur une sphère qui se trouve sous l'action de forces électriques données. Le problème analogue pour deux sphères chargées d'électricité en présence l'une de l'autre est résolu à l'aide des coordonnées dipolaires. L'auteur donne la solution de ce problème au moyen des fonctions elliptiques lorsque cela est possible. Le cas limite de deux sphères qui viennent en contact est traité analoguement, en substituant aux coordonnées dipolaires d'autres coordonnées qui se présentent comme cas limite de celles-ci.

L'auteur détermine ensuite la distribution de l'électricité en équilibre sur un conducteur terminé par deux calottes sphériques et sur un ellipsoïde.

Le professeur W. Thomson a donné sans démonstration, dans le *Journal de Liouville*, les formules relatives à la fonction potentielle de l'électricité en équilibre sur une calotte sphérique et de l'électricité d'induction sur une calotte en communication avec la terre et qui se trouve sous l'action d'un point où est concentrée une masse électrique. Le professeur Lipschitz a démontré en partie ces résultats et, plus récemment, le professeur Beltrami a résolu complètement le problème pour un disque dans le cas que les forces électriques d'induction fussent symétriques par rapport à l'axe du disque. L'auteur reprend dans le § XIV de ce Chapitre le problème général proposé par Thomson et, suivant la voie tracée par M. Lipschitz, résout complètement le problème, en trouvant

des formules analogues à celles qu'a données M. Beltrami, mais qui s'appliquent au cas général.

La théorie des condensateurs, c'est-à-dire la recherche de la fonction potentielle de l'électricité en équilibre distribuée sur deux corps minces, conducteurs, placés très près l'un de l'autre et séparés par une courbe cohibente, présente deux difficultés de genre différent. La première est relative à l'influence des bords des conducteurs sur la fonction potentielle, car il y a là une discontinuité; la seconde est relative à la détermination de la quantité d'électricité qui se porte sur la face extérieure des conducteurs. L'auteur commence par étudier la première, et suppose les deux conducteurs plans et tels qu'on puisse les considérer comme deux cylindres indéfinis ayant chacun une section formée par deux droites parallèles indéfinies dans un sens et réunies dans l'autre par une courbe : ce cas s'approche suffisamment de ce qui arrive dans la Physique expérimentale parce que l'influence des bords ne peut pas se faire sentir sur les parties éloignées du conducteur et par conséquent dans les condensateurs plans (Tableau de Franklin) on peut remplacer les conducteurs par deux plans comme ceux qui sont considérés dans cette théorie, tant qu'il s'agit seulement de calculer l'action des bords. Il faut alors déterminer une fonction qui, dans un plan, satisfasse à certaines conditions analytiques qui sont les mêmes qui se présentent dans la théorie des mouvements discontinus des fluides. Helmholtz et Kirchhoff ont résolu ce problème quand les courbes c et c' qui complètent les sections droites des cylindres ont une forme donnée. M. Betti trouve de ces conditions analytiques une solution plus générale, laquelle contient une constante arbitraire liée à la forme des courbes c et c'; il peut alors résoudre le problème pour un nombre plus grand de cas et déterminer la constante et, par suite, la forme des courbes c et c' de la façon la plus avantageuse. Après avoir donné la théorie générale des condensateurs, l'auteur résout la seconde difficulté en assignant les limites de l'épaisseur des conducteurs et de la couche interposée entre eux, dans lesquelles on peut négliger l'électricité qui se porte sur les faces des conducteurs qui ne sont pas en contact avec le corps cohibent.

Le troisième Chapitre contient l'application de la théorie du potentiel au magnétisme; dans cette application il est nécessaire de supposer les corps magnétiques comme composés d'éléments qui

contiennent quantités égales de magnétisme boréal et de magnétisme austral, qui ne peuvent pas passer d'un élément à l'autre. Si l'on connait la force à laquelle est due la magnétisation, on peut construire la fonction potentielle du magnétisme contenu dans chaque élément auquel on pourra assigner une forme déterminée. Gauss avait montré que, si sur la surface d'un corps magnétique on rencontre trois pôles, il y en a nécessairement un quatrième; M. Betti, en cherchant la distribution des forces sur la surface d'un corps magnétique, démontre ce théorème : *Si le nombre des pôles est fini, il doit être pair*.

Le professeur W. Thomson avait montré que la distribution du magnétisme dans un corps pouvait être, ou lamellaire simple, ou lamellaire composée, ou solénoïdale; l'auteur, en se servant du théorème que Jacobi a pris pour base de sa théorie du dernier multiplicateur, trouve les conditions analytiques auxquelles doivent satisfaire les composantes du moment magnétique afin que la distribution soit une de celles définies par Thomson, et ces conditions le conduisent au théorème : *Toute distribution magnétique peut être décomposée en une lamellaire simple et une lamellaire composée, ou bien en une lamellaire simple et une solénoïdale*.

Les composantes de l'action du magnétisme à l'intérieur d'un corps magnétique présentent un nombre infini de discontinuités, et par conséquent la détermination de la valeur de l'action en un point P n'est pas indépendante, comme dans la théorie de l'attraction de la forme de la surface σ au moyen de laquelle on sépare du corps un espace infiniment petit qui renferme le point P, espace que l'on fait diminuer d'une façon continue. L'auteur, après avoir montré quelles sont les composantes de l'action quand on laisse indéterminée la forme des surfaces σ, détermine complètement leur expression : 1° dans le cas où elles sont des sphères, 2° dans les cas où elles sont des surfaces de révolution avec l'axe incliné ou bien coïncident avec l'axe magnétique qui passe par le point P, 3° quand les σ sont les cylindres droits d'une hauteur infiniment petite relativement au rayon du cercle base. Le potentiel magnétique varie naturellement suivant que l'action est déterminée d'une façon ou de l'autre.

M. le professeur Maxwell a démontré, en se servant de certains résultats expérimentaux, que si l'on suppose, comme l'a fait Pois-

son, que les surfaces σ soient des sphères, quand le corps est magnétisé par induction, on arrive à des résultats qui contredisent l'idée que nous nous formons d'un corps, comme composé de molécules qui n'occupent qu'une partie pas bien grande du volume apparent. Cette contradiction disparaît si l'on suppose que les surfaces σ soient des cylindres très écrasés : c'est là une raison pour laquelle l'auteur croit devoir, entre toutes les surfaces σ, préférer les cylindres, d'autant plus que, dans un corps magnétisé par induction, la distribution magnétique est lamellaire simple et que l'hypothèse des cylindres est bien plus conforme que celle des sphères à la représentation géométrique d'une distribution lamellaire simple.

Les paragraphes successifs contiennent la détermination de la magnétisation d'un ellipsoïde et d'un corps terminé par deux sphères concentriques.

Dans le dernier paragraphe, on trouve l'application de la théorie du magnétisme à celle des corps diélectriques, et par suite l'explication des phénomènes connus sous le nom de *décharges de retour*, qu'on observe dans les condensateurs. E. P.

MÉLANGES.

EXTRAIT DU MANUSCRIT N° 24237 DU FONDS FRANÇAIS DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. ARISTIDE MARRE.

Le manuscrit du fonds français de la Bibliothèque nationale coté sous le n° 24237, anciennement n° 169 du fonds de l'Oratoire, porte un titre qui a sans doute l'avantage d'être bref et concis, mais qui malheureusement a le tort de ne point indiquer d'une manière suffisamment exacte ce que renferme le Volume. Qu'on en juge. Il est intitulé *Éléments de Mathématiques*. Or les trois quarts des cent soixante-huit feuillets de tout format et de toute sorte dont il se compose sont consacrés à des études sur le Calcul intégral, l'Optique, la gnomonique, les logarithmes hyperboliques, la cycloïde, le pendule isochrone, etc., et l'on y rencontre même

des pièces telles que celles-ci : Définition de la liberté et opinions sur la liberté chez les Thomistes, les Molinistes, etc. (en latin); Écrit des trois colomnes présenté à Innocent X par MM. Angray, Manessier, de Saint-Amour, de Lalane, députez vers Sa Sainteté de la part de quelques-uns de MM. les Évêques de France pour l'affaire des cinq propositions (en latin); Épigrammes de Racine, de Despréaux et de Perrault; deux pièces latines imprimées à Angers, dont une est le programme d'une Thèse à soutenir le 4 avril 1691 par François Chastelain, en la maison des Pères de l'Oratoire, à Angers.

Parmi les pièces si diverses et si disparates qui entrent sans beaucoup d'ordre dans le manuscrit n° 24237 du fonds français de la Bibliothèque nationale, nous en avons choisi deux, et nous les mettons sous les yeux des lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, dans la pensée qu'elles pourront les intéresser.

PROBLÈME OU IL EST BESOIN D'ADRESSE.

Trouver deux nombres qui ayent même différence que leurs cubes.

Solution. — Les deux nombres qu'il faut trouver sont

$$\frac{4a}{aa+3} \quad \text{et} \quad \frac{aa-2a-3}{aa+3}.$$

Démonstration. — Leurs cubes sont

$$\frac{64a^3}{a^6+9a^4+27aa+27} \quad \text{et} \quad \frac{a^6-6a^5+3a^4+28a^3-9aa-54a-27}{a^6+9a^4+27aa+27}$$

dont la différence est

$$\frac{27+54a+9aa+36a^3-3a^4+6a^5-a^6}{a^6+9a^4+27aa+27},$$

laquelle, si l'on divise son antécédent et son conséquent par

$$a^4+6aa+9,$$

se réduit à

$$\frac{3+6a-aa}{aa+3} \quad \text{ou} \quad \frac{4a-aa+2a+3}{aa+3},$$

différence des deux nombres

$$\frac{4a}{aa+3} \quad \text{et} \quad \frac{aa-2a-3}{aa+3}.$$

Ces deux nombres sont donc tels qu'il falloit.

Exemples. — $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{7}$ sont deux nombres qui ont même différence que leurs cubes $\frac{125}{343}$ et $\frac{27}{343}$; car $\frac{5-3}{7}$ ou $\frac{2}{7}$ est la même chose que $\frac{125-27}{343}$ ou $\frac{98}{343}$, dont chaque terme est multiple de 49.

De même, $\frac{16}{19}-\frac{5}{19}$ ou $\frac{11}{19}=\frac{4096}{6859}-\frac{125}{6859}$ ou $\frac{3971}{6859}$, dont chaque terme est multiplié par 361.

Que si l'on ne se contente pas de cette solution, l'on peut tâcher d'en trouver quelqu'autre en cherchant quelque voie plus générale que celle que j'ai prise pour faire que la grandeur $4-3xx$ soit un quarré.

Et alors, appellant x le plus petit des deux nombres que l'on demande, l'autre sera toujours $x \pm y$, et $y = \frac{\mp 3x + \sqrt{4-3xx}}{2}$, qui est tout ce qu'on peut trouver de plus général dans cette question.

Problème.

Tout nombre entier, moindre d'une unité qu'un quarré, étant donné, trouver un autre nombre entier qui ne soit point un quarré, par lequel étant multiplié, le produit soit un quarré, c'est-à-dire, $qq-1$ étant donné, trouver x qui soit tel que $xqq-x$ soit un nombre entier quarré.

Solution. — Si l'unité ajoutée au nombre donné fait un quarré dont la racine soit plus grande ou plus petite d'une unité qu'un

autre quarré, le nombre entier que l'on cherche sera plus grand ou plus petit d'une unité que cette racine.

Exemples. — 1° Le nombre donné est 24, auquel si l'on joint l'unité, on a le quarré 25, dont la racine 5 est plus grande d'une unité que le quarré 4 : il faut donc suivant la règle ajouter 1 à 5, et la somme 6 est un nombre entier qui n'est point un quarré, et qui, multipliant le nombre donné 24, produit le quarré 144.

2° On donne le nombre 8, moindre d'une unité que le quarré 9, dont la racine 3 est plus petite d'une unité que le quarré 4. Retranchant donc 1 de 3 selon la règle, on a pour reste le nombre entier 2, qui n'est pas un quarré, mais par lequel le nombre donné 8 étant multiplié, le produit est le nombre quarré 16.

3° 64 — 1 ou 63 est le nombre donné ; 8 racine de 64 est égale à 9 — 1 ; j'ôte donc 1 de 8 selon la règle, et j'ai le nombre entier 7, qui n'est point un quarré, et qui multipliant 63 me donne le quarré 441.

Démonstration. — Il faut que le nombre entier x soit tel que, multipliant le nombre entier donné $qq - 1$, le produit $xqq - x$ soit un quarré. Pour cela, supposons

$$x \pm 1 \propto q;$$

ainsi,

$$qq - 1 \propto xx \pm 2x + 1 - 1 \propto xx \pm 2x,$$

et

$$xqq - x \propto x^3 \pm 2xx,$$

qui est bien le quarré de $x\sqrt{x \pm 2}$, mais qui ne peut pas être un quarré parfait si $\sqrt{x \pm 2}$ n'est un nombre commensurable, ou, ce qui est la même chose, si x n'est égal à $dd \mp 2$, qui est un nombre entier plus grand ou plus petit d'une unité que le nombre $dd \mp 1$ égal à $x \pm 1$ ou q, lequel a une unité de plus ou de moins que le quarré quelconque dd. De sorte que, afin que le produit de $qq - 1$ par x soit un quarré parfait, il est nécessaire que q racine du quarré qq soit plus grande ou plus petite d'une unité qu'un quarré, et que x soit plus grand ou plus petit d'une unité que cette racine.

ERREURS DANS LES TABLES MATHÉMATIQUES,

D'APRÈS UNE COMMUNICATION DE M. DUNCAN-J.-M. M[c] KENZIE, A LONDRES.

I.

Dans l'Ouvrage intitulé *Tables de logarithmes à six décimales, par* M. VAZQUEZ QUEIPO, 2ᵉ édition française, 1876, *Appendice*, Table II, les valeurs de log $(1+t)$ doivent être corrigées pour les deux arguments suivants :

$1+t$.	Au lieu de	Lisez
$1,00\frac{1}{2}$.....	21660117...	21660617...
$1,10\frac{1}{4}$.....	4237 25981...	4237 85981...

II.

Dans sa *Table des diviseurs pour tous les nombres du premier million*, à la deuxième page de la *Manière de se servir de cette Table*, Burckhardt signale, en note, une erreur dans la valeur du logarithme hyperbolique du nombre 7853 (¹), tel qu'on le trouve dans la Table calculée par Wolfram avec quarante-huit décimales, et insérée *in extenso* dans les Tables de Schulze (Berlin, 1778) et dans le *Thesaurus logarithmorum* de Vega (Leipzig, 1794). Cette erreur a été reproduite dans la même Table réduite à huit décimales que Vega a insérée dans ses *Logarithmische Tafeln* (Vienne, 1783), et qui a passé de là dans le *Sammlung mathematische Tafeln* de Hülsse (Berlin, 1849), dans les éditions successives du *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch* de Köhler (9ᵉ édition, Leipzig, 1864), et dans le *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch* de Hantschl (Vienne, 1827).

Pour la valeur de lognat 7853, au lieu de 8,967..., il faut lire 8,968....

La valeur exacte se trouve dans la Table à dix décimales insérée

(¹) La note porte 1853, par suite d'une faute d'impression.

dans les *Logaritmische Tafeln* de Salomon (Vienne, 1827) et dans la Table à sept décimales de Dase (*Tafel der natürlichen Logarithmen der Zahlen*, Wien, 1850); depuis, elle a été reproduite dans les Tables à cinq décimales de Stegmann (*Tafeln der natürlichen Logarithmen*, Marburg, 1856) et de Wackerbarth (*Fem-ställiga logarithm-tabeller*, Upsala, 1867; 3e éd., 1876).

III.

Pour la page 197 des *Logarithmic Tables, by R. Shortrede* (Edinburgh, 1849), M. Mc Kenzie indique les corrections suivantes :

Logarithmes des nombres.	Au lieu de	Il faut lire
10023	7987	7937
10024	0966	0936
10043	6240	5240
10048	1166	1209
10055	7864	7607
10098	4615	4675
10099	3731	1624

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAYLEY (A.). — TRATTATO ELEMENTARE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE, traduzione riveduta e accresciuta d'alcune Appendici da F. BRIOSCHI. Napoli, U. Hoepli; 1880.

Nous avons déjà signalé l'apparition du Traité élémentaire des fonctions elliptiques que M. Cayley a publié en 1876 ([1]). Cet excellent Ouvrage est devenu rapidement classique en Angleterre et en Amérique; c'est la meilleure préparation que l'on puisse désirer à la lecture des beaux travaux sur la multiplication et la transformation que Jacobi a publiés dans les premiers Volumes du *Journal de Crelle*. A la vérité, l'auteur a laissé de côté toutes ces considérations sur la théorie générale des fonctions qui tiennent tant de place dans la plupart des Traités modernes sur les fonctions elliptiques; mais il faut convenir, comme le fait remarquer M. Brioschi dans la Préface, que trop souvent, dans les publications consacrées aux fonctions elliptiques, c'est surtout le développement de la nouvelle doctrine et des propriétés générales des fonctions qui constitue l'objet principal. On peut ajouter, il nous semble, que les propriétés des fonctions elliptiques sont ainsi obtenues d'une manière si rapide et si complète, qu'on n'a peut-être pas le temps d'insister sur chacune d'elles et d'en marquer l'importance. Enfin et surtout, les méthodes modernes sont si différentes de celles des premiers créateurs de la théorie, en exceptant toutefois Abel, que l'on peut craindre que l'étude de leurs travaux impérissables soit un peu négligée.

Toutes ces raisons ont engagé M. Brioschi à entreprendre, avec l'autorisation de M. Cayley, une traduction italienne de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Cette traduction, exécutée en grande partie par un des élèves les plus distingués de M. Brioschi, l'ingénieur Jorini, aidé dans la revision par M. Cazzaniga, de l'École Normale de Pavie, est enrichie de trois Appendices dus à la plume de M. Brioschi.

([1]) *Elementary Treatise on elliptic functions*, by Arthur Cayley. Cambridge, Deighton and Co; London, Bell and Sons, 1876. Voir *Bulletin*, I_1, 93.

Dans le premier, qui traite des formules relatives à la multiplication des fonctions elliptiques, M. Brioschi reprend et développe les recherches publiées sur ce sujet par Jacobi dans le Tome IV du *Journal de Crelle*, et il démontre en outre plusieurs résultats qu'il a communiqués en 1864, dans une Note, à l'Institut Lombard.

Le deuxième, qui traite de la transformation, doit être considéré comme une préparation au troisième, qui est véritablement important et qui contient un exposé systématique des belles recherches que M. Brioschi a publiées à diverses reprises sur la théorie de l'équation du cinquième degré. En substance, toute cette exposition coïncide avec celle qui a été exposée récemment par M. Brioschi dans le beau Mémoire *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (*Mathematische Annalen*, t. XIII), où l'auteur reprend et coordonne ses recherches antérieures sur ce sujet. Cet Appendice constituera donc une excellente lecture pour les géomètres qui veulent se mettre au courant de cette théorie de l'équation du cinquième degré et approfondir les rapports qu'elle présente avec la théorie des fonctions elliptiques.

Il ne nous reste plus, en terminant, qu'à exprimer un désir : c'est que l'on publie également une traduction française du Traité de M. Cayley et qu'on n'y oublie pas les additions dont s'est enrichie la traduction italienne.

G. D.

SCHELL (W.). — Theorie der Bewegung und der Kräfte, ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. T. I, 2e édition, 1 vol. in-8°, 580 pages; 1879.

La première édition du Livre de M. Schell date de 1870; elle formait un gros volume de neuf cent soixante-dix pages d'une impression compacte et dont une partie notable était en petit texte. Le succès qu'elle a eu est amplement justifié par la richesse des renseignements qu'on trouve dans ce Livre et par les qualités de l'exposition. La seconde édition paraît devoir être encore plus complète; elle sera divisée en deux Volumes, dont le premier seul est paru : c'est de lui que nous rendons compte.

Ce Volume est divisé en deux Parties : la première comprend la

Géométrie des systèmes de segments de droites (*Streckensysteme*) et la Géométrie des masses; la seconde contient la Géométrie du mouvement et la théorie des états de mouvement.

A coup sûr, il y a bénéfice pour l'enseignement à détacher, comme le fait M. Schell, de la Statique et de la Cinématique cette partie commune, qui concerne la composition des forces et des couples ou des rotations et des translations. Il y a là une théorie des systèmes de *segments de droites* que l'on peut faire indépendamment de toute idée de force ou de mouvement; il est clair que les notions de somme géométrique, de résultante, de moment d'un segment de droite par rapport à un point ou à un axe, de couple de segments, de systèmes équivalents et par suite de la réduction d'un système de segments de droites peuvent être présentées d'une façon purement géométrique : la réduction d'un système de segments à deux segments donne la notion de droites conjuguées; la réduction à un couple et un segment donne la notion de la correspondance de chaque point de l'espace à un plan passant par lui et dont ce point est le *pôle*, ou encore la notion du complexe linéaire qui correspond à tout système de segments de droites, complexe qu'on peut aussi regarder comme l'ensemble des lignes qui coïncident avec leurs conjuguées. M. Schell consacre une soixantaine de pages à ces divers sujets.

Il n'y a pas non plus d'inconvénient à débarrasser la Statique et la Dynamique de la théorie du centre de gravité et des moments d'inertie : telles sont les matières traitées sous le titre de *Géométrie des masses* (p. 72-143). Naturellement la masse d'un point est simplement regardée comme un coefficient numérique attaché à ce point; ce coefficient peut d'ailleurs être positif, nul ou négatif. Si l'on considère deux points O et M_i, dont le second est affecté de la masse m_i, le segment dont la grandeur est $m_i \,OM_i$ et dont la ligne d'action est la droite Om_i est dit le moment polaire du premier degré de la masse m_i par rapport au point O; la résultante $\Sigma m_i \,OM_i$ des segments analogues relatifs à un système de points (M_i) est le moment polaire du premier degré de ce système de points par rapport au point O; le centre de masse de ce système de points est défini par cette propriété que, si on l'affecte de la masse Σm_i, son moment polaire du premier degré par rapport à un point quelconque O sera égal au moment polaire du premier degré du

système par rapport à ce même point; le produit $m_i r_i^2$ de la masse d'un point par le carré de sa distance à un point O est le moment polaire quadratique de m_i par rapport au point O; la somme $\Sigma m_i r^2$ est le moment polaire quadratique d'un système de points (M_i) par rapport au pôle O. Il existe, entre les moments polaires quadratiques d'un système de points par rapport à un point O et à son centre de masse, le moment polaire quadratique du centre de masse affecté de la masse totale par rapport au point O, la somme des produits des masses de deux points du système par le carré de leur distance, des relations bien connues. La notion des moments polaires quadratiques conduit à celle des moments d'inertie, à la théorie desquels M. Schell consacre deux Chapitres.

La seconde Partie débute par l'étude (p. 144-187) des propriétés concernant deux figures identiques situées dans deux positions différentes ou, suivant le langage de l'auteur, deux systèmes congruents et les déplacements qui permettent de passer de l'un à l'autre. L'existence d'un point double (de deux points homologues coïncidents) entraîne celle d'un plan double passant par ce point, et, réciproquement, tous les points de la droite passant par le point et perpendiculaires au plan sont doubles, et l'on peut passer d'un système à l'autre par une rotation autour de cette droite. Dans le cas général, deux systèmes congruents ont une droite double, mais dont les points situés à distance finie sont simples; un mouvement de torsion autour de cette droite permet de passer d'un système à l'autre. Deux déplacements sont équivalents quand les positions initiales du système déplacé coïncident ainsi que les positions finales. Dans le cas où les déplacements considérés se réduisent à des rotations et à des translations, leur réduction s'opère par des règles simples qui se simplifient encore quand on suppose les déplacements infiniment petits.

C'est arrivé à ce point que l'auteur fait intervenir la notion de temps et définit la vitesse. Après avoir donné les formules usuelles, la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes, les règles de la composition des vitesses, des rotations, translations, etc., il traite du mouvement hélicoïdal et développe, dans le sens de la Cinématique, les propriétés des droites conjuguées, du complexe linéaire formé par l'ensemble des normales aux trajectoires de tous les points du système, du pôle et de la caractéristique de chaque plan, etc.,

propriétés dont il a été question, à un autre point de vue, dans la première Partie (p. 187-218).

L'auteur étudie ensuite (p. 218-312), au point de vue de la vitesse, des propriétés des normales aux trajectoires, de la représentation du mouvement par le roulement d'une surface cylindrique, conique, réglée sur une autre surface cylindrique, conique, réglée, le mouvement continu d'un système de forme invariable, soit qu'un plan de ce système glisse sur un plan fixe, soit qu'un de ses points soit fixe, soit enfin qu'aucune de ces particularités n'ait lieu.

Vient ensuite l'étude de l'accélération et du mouvement d'un point libre (p. 312-387). Il n'est pas question d'ailleurs des causes de ce mouvement, qui est regardé comme défini par trois équations entre les coordonnées, la vitesse et l'accélération. M. Schell examine les cas où ces équations sont telles que le principe des aires et celui des forces vives aient lieu; il dit même quelques mots du principe du dernier multiplicateur, dont, dans la première édition, il avait traité à cette place, et développe les problèmes classiques sur le mouvement d'un point pesant ou attiré vers un centre fixe : les *forces* sont simplement remplacées par les accélérations correspondantes; comme dans chaque problème il n'entre qu'une seule force, il n'y a à cela aucune difficulté.

M. Schell ne sort pas de la Cinématique, au sens où il entend ce mot, en traitant (p. 387-441) du mouvement d'un point sur une courbe ou une surface : cela n'est pas sans choquer nos habitudes. Il a eu soin, d'ailleurs, de prévenir qu'il prétendait écarter systématiquement toute spéculation sur les causes du mouvement, se couvrant en cela de la grande autorité de Jacobi. « Ces causes », dit-il dans son Introduction, « s'appellent *forces* : la cause de la vitesse d'un point est une force instantanée; la cause de l'accélération est une force continue, ou plus simplement une force; les causes des accélérations d'ordre supérieur sont de même des forces d'ordre supérieur; un système de forces instantanées est un état de vitesse; un système de forces continues est un état d'accélérations, etc. » Et il a rappelé auparavant ces paroles de Jacobi : « *Theoria Mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium, insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur; de quibus theoremata proponi possint prorsus ana-*

loga iis, quæ de vi et de velocitate circumferuntur. » Sans doute toute difficulté ne disparaît pas quand on se place à ce point de vue; mais ce n'est pas à propos des matières contenues dans ce premier Volume qu'il y a lieu de traiter cette question.

Quoi qu'il en soit, pour en revenir au point assujetti à se mouvoir, par exemple, sur une ligne, on regardera cette ligne comme la cause d'une accélération qui se compose avec l'accélération que le point aurait s'il était libre; peu importe d'ailleurs comment se fait cette composition, puisque l'accélération qui remplace la condition imposée est entièrement inconnue, et rien n'empêche d'écrire les équations

$$\frac{dv}{dt} = \psi_t - R_t, \quad \left(\frac{v^2}{\delta}\right) = \left(\psi_n\right) + \left(N\right),$$

ψ_t et ψ_n étant les composantes tangentielle et normale de l'accélération donnée, R_t et N étant des quantités entièrement inconnues. Pour pouvoir tirer parti de ces équations, on leur « joint habituellement l'équation de condition $R_t = fN$ », f étant un coefficient constant qui est nul s'il n'y a pas de frottement; au fond, cela revient à écrire les équations du mouvement d'un point sur une courbe en supprimant toute explication à ce sujet. C'est ainsi que Jacobi, invoquant l'autorité de Gauss, comme M. Schell invoquait la sienne, écrivait, au début de ses *Leçons de Mécanique analytique*, l'équation

$$\sum \left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \ldots = 0$$

en la regardant comme l'expression d'un « principe qu'il est inutile de démontrer ». M. Schell développe la théorie du pendule circulaire et sphérique et donne diverses autres applications.

On rentre à coup sûr dans la Cinématique proprement dite en étudiant le mouvement d'un corps solide au point de vue des accélérations (p. 441-516). Les propositions relatives à la courbure des trajectoires trouvent là leur place naturelle; viennent ensuite le théorème de Coriolis et ses applications (p. 517-544). Enfin les deux derniers Chapitres (p. 544-571-580) sont consacrés aux accélérations d'ordre supérieur et aux systèmes variables; ce dernier Chapitre, où l'auteur traite des systèmes qui restent semblables,

collinéaires à eux-mêmes, et particulièrement surtout en *affinité* avec eux-mêmes, manquait dans la première édition.

Les nombreux renseignements bibliographiques donnés par M. Schell ajoutent encore à la valeur et à l'utilité de son Livre.

J. T.

WESTPHAL (G.). — UEBER DAS SIMULTANE SYSTEM ZWEIER QUATERNAEREN FORMEN 2-TEN GRADES UND EINE ALLGEMEINE ALGEBRAISCHE PARAMETERDARSTELLUNG DER RAUMCURVE 4-TER ORDNUNG, p. 1. — *Mathematische Ann.*, t. XIII, 1878.

I. Si l'on désigne, suivant la notation d'Aronhold et de Clebsch, par $a_x^2 = b_x^2 = \ldots$ et $\alpha_x^2 = \beta_x^2 = \ldots$ les équations des deux surfaces du second ordre qui ont pour intersection la courbe du quatrième ordre, les deux autres points où un plan mené par la tangente à un point y de la courbe coupe cette courbe seront représentés par la résultante des formes

$$a_x^2 = 0, \quad \alpha_x^2 = 0, \quad \varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y = 0, \quad w_x = 0,$$

sous la condition $a_y^2 = 0$, $\alpha_y^2 = 0$, tandis qu'on peut séparer de cette résultante le facteur w_y^2. Mais cette élimination entre deux formes quadratiques et deux formes linéaires peut être remplacée, comme le fait voir l'auteur, par une autre plus simple. Les covariants

$$\mathrm{H}_x^2 = \alpha_x \beta_x (\alpha abc)(\beta abc) - \frac{\Theta}{2} \alpha_x^2, \quad [\Theta = (abc\alpha)^2]$$

$$\mathrm{I}_x^2 = a_x b_x (a\alpha\beta\gamma)(b\alpha\beta\gamma) - \frac{\Theta_1}{2} a_x^2, \quad [\Theta_1 = (\alpha\beta\gamma a)^2],$$

jouissent de cette propriété remarquable que l'on a, pour toutes les valeurs de x et de y,

$$\alpha_x^2 \mathrm{H}_y^2 + \alpha_y^2 \mathrm{H}_x^2 - a_x^2 \mathrm{I}_y^2 - a_y^2 \mathrm{I}_x^2 = 2(\alpha_x \alpha_y \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y - a_x a_y \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y).$$

De cette identité, écrite sous la forme

$$\alpha_x^2 \mathrm{H}_y^2 + \alpha_y^2 \mathrm{H}_x^2 - a_x^2 \mathrm{I}_y^2 - a_y^2 \mathrm{I}_x^2$$
$$= \frac{2}{\varkappa} [\alpha_x \alpha_y (\varkappa \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y + \lambda \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y) - \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y (\varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y)].$$

résulte ce théorème :

Si l'on fait tourner, autour de la tangente en un point y de la courbe, un plan $\varkappa a_x a_y + \lambda \alpha_x \alpha_y = 0$, *alors par ses deux points de rencontre avec la courbe gauche, lesquels varient avec* $\varkappa : \lambda$, *passera toujours le plan* $\varkappa H_x H_y + \lambda I_x I_y = 0$.

On conclut encore de là que *le plan osculateur au point y a pour équation* $H_y^2 \alpha_x \alpha_y - I_y^2 a_x a_y = 0$; *les quatre plans du tétraèdre polaire commun aux deux surfaces sont* $(a\alpha HI) a_y \alpha_y H_y I_y = 0$.

On déduit ensuite de la résultante les équations cherchées qui donnent les coordonnées des deux points d'intersection. Comme la forme sous laquelle l'auteur présente le résultat final ne fait pas ressortir directement quels sont les couples du système simultané que l'on a à considérer dans cette recherche, nous nous permettrons de communiquer ici le résumé d'un calcul relatif à ce passage.

II. Si l'on se pose d'abord le problème de déterminer les deux points ξ et η où le plan tangent $a_x a_y = 0$ coupe la courbe gauche, il résulte de l'identité écrite plus haut ce théorème :

La résultante R *des formes* $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$, $a_x a_y = 0$, $w_x = 0$ *est, après la séparation du facteur* w_y^2, *identique, à un facteur indépendant de* w, *avec la résultante* R' *des formes* $a_x^2 = 0$, $a_x a_y = 0$, $H_x H_y = 0$, $w_x = 0$.

On a

$$R = [b_y c_y (ba\alpha w)(ca\alpha w)]^2 \\ - [c_y d_y (cabw)(dabw)][a_y b_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta w)].$$

On en tire

$$c_y d_y (cabw)(dabw) = -\frac{1}{12} w_y^2 \Delta, \quad \Delta = (abcd)^2,$$

$$b_y c_y (ba\alpha w)(ca\alpha w) = w_y \left[\frac{1}{3} \alpha_y (abcw)(abc\alpha) - \frac{1}{6} w_y \Theta \right].$$

En posant

$$\alpha_y (abcw)(abc\alpha) = L = L_y w_l,$$
$$a_y b_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta w) = P = P_y^2 w_p^2,$$

il vient

$$R = w_y'^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].$$

On a ainsi l'équation

$$(1)\quad (ab\mathrm{H}w)(ac\mathrm{H}'w)b_y c_y \mathrm{H}_y \mathrm{H}'_y = m\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right].$$

Le multiplicateur m indépendant de w se détermine de la manière la plus simple, en posant $w_x^2 = a_x^2$. On a

$$(ab\mathrm{H}d)(ac\mathrm{H}'d)b_y c_y \mathrm{H}_y \mathrm{H}'_y = -\frac{1}{12}\Delta[\mathrm{H}_y^2]^2,$$

$$a_y b_y(a\alpha\beta c)(b\alpha\beta c) = \frac{1}{3}\mathrm{H}_y^2,$$

$$\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 = \frac{1}{36}\mathrm{H}_y^2\Delta, \quad (\text{pour } w_x^2 = a_x^2).$$

On trouve ainsi

$$m = -\frac{3}{2}\mathrm{H}_y^2,$$

et l'équation (1) devient

$$(2)\quad \begin{cases} (ab\mathrm{H}w)(ac\mathrm{H}'w)b_y c_y \mathrm{H}_y \mathrm{H}'_y \\ \quad = -\frac{3}{2}\mathrm{H}_y^2\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)^2 + \frac{1}{12}\Delta P\right]. \end{cases}$$

Pour parvenir maintenant à une représentation isolée des points ξ et η, désignons, pour abréger, la résultante qui forme le premier membre par $(a\rho\sigma w)^2$.

De l'équation

$$w_\xi w'_\eta = (a\rho\sigma w)^2$$

on tire

$$w'_\xi u_\eta + u_\xi w'_\eta = 2(a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u),$$

$$w'_\xi u_\eta - u_\xi w'_\eta = \sqrt{[2(a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u)]^2 - 4(a\rho\sigma w)^2(a\rho\sigma u)^2}$$

$$= 2(\rho\sigma u w)\sqrt{-\frac{1}{2}(aa'\rho\sigma)^2},$$

$$(3)\quad w'_\xi u_\eta = (a\rho\sigma w)(a\rho\sigma u) + (\rho\sigma u w)\sqrt{-\frac{1}{2}(aa'\rho\sigma)^2}.$$

Donc

$$(4)\begin{cases} w_\xi u_\eta = -\frac{3}{2}H_y^2\left[\left(\frac{1}{3}L_y w_l - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)\left(\frac{1}{3}L_y u_l - \frac{1}{6}u_y\Theta\right) + \frac{1}{12}\Delta P_y^2 w_p u_p\right] \\ \qquad + (aHuw)a_y H_y - H_y^2\sqrt{\frac{1}{24}\Delta}. \end{cases}$$

Si l'on pose, dans cette expression, $u_x = \alpha_x \alpha_y$, il vient, à la place de L,

$$\alpha_y \beta_y (abc\alpha)(abc\beta) = \mathrm{H},$$

à la place de $P_y^2 w_p u_p$,

$$a_y b_y v_y (a\alpha\beta w)(b\alpha\beta v) = \frac{1}{3} w_y a_y b_y (a\alpha\beta v)(b\alpha\beta v) = \frac{1}{3} w_y \mathrm{I},$$

et, en laissant de côté le facteur H_y^2, on obtient l'équation d'un point d'intersection :

$$(5)\quad \mathrm{M} w_\xi = -\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}L - \frac{1}{6}w_y\Theta\right)\frac{1}{3}H + \frac{1}{36}w_y \mathrm{I}\Delta\right] - (a\alpha H w)a_y H_y\sqrt{\frac{1}{24}\Delta}.$$

Pour résoudre le problème général, on remplacera dans cette équation a_x^2 par la forme $\varkappa a_x^2 + \lambda\alpha_x^2$, et l'on aura

$$\begin{aligned} \Delta(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^4\Delta + 4\varkappa^3\lambda\Theta + 6\varkappa^2\lambda^2\Phi + 4\varkappa\lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta', \\ H(\varkappa, \lambda) &= \varkappa H_y^2 + \lambda I_y^2, \\ \Theta(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^3\Theta + 3\varkappa^2\lambda\Phi + 3\varkappa\lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta', \\ L(\varkappa, \lambda) &= \varkappa^3 L + 3\varkappa^2\lambda M + 3\varkappa\lambda^2 N + \frac{1}{4}\lambda^3\Delta' w_y, \\ M &= \alpha_y(ab\beta w)(ab\beta x), \quad N = \alpha_y(a\gamma\beta w)(a\gamma\beta\alpha). \end{aligned}$$

Après la substitution de ces valeurs, on pourra encore faire sortir le facteur $\varkappa$ des premières parenthèses.

III. Après avoir ensuite effectué la transformation de l'intégrale elliptique relative à la courbe en sa forme normale, suivant la méthode indiquée par Aronhold pour les courbes planes du troisième ordre, l'auteur démontre ce théorème :

La somme des deux intégrales prises depuis un point arbitraire de la courbe jusqu'aux points de sécance x et y d'une corde

est constante lorsque cette corde décrit l'une des séries de génératrices d'une surface du faisceau.

A chaque valeur de la constante comprise dans le parallélogramme des périodes correspond une surface; cette correspondance peut être réglée de telle manière que la valeur opposée de la constante détermine la seconde série de génératrices de la surface. Au moyen de cette représentation, on obtient la solution de ce problème :

Trouver les surfaces du faisceau sur lesquelles on puisse construire des polygones d'un nombre pair de côtés, dont les sommets soient situés sur la courbe gauche et dont les côtés appartiennent alternativement à chacune des deux séries de génératrices de cette surface.

Si du sommet de l'un des cônes qui font partie du faisceau on projette ces polygones sur un plan, ils se changent en des polygones plans, inscrits à une section conique et circonscrits à une autre. Les théorèmes de Poncelet résultent des propriétés des polygones gauches (¹). Ax. H.

MÉLANGES.

ESSAI HISTORIQUE SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE D'UNE SEULE VARIABLE PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE (²);

PAR M. ARNOLD SACHSE.

Depuis que Riemann, dans sa dissertation inaugurale publiée en 1854, a donné un aperçu historique sur les recherches antérieures

---

(¹) Au sujet de ces recherches, *voir* KILLING, *Der Flächenbüschel zweiter Ordnung* (Berlin, 1872); HARNACK, *Ueber die Darstellung der Raumcurve 4. Ordnung* (*Annalen der Mathematik*, t. XII).

(²) *Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Va-*

des géomètres concernant la représentation d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante, on a publié tant de recherches fécondes sur ce sujet qu'il nous a paru utile d'exposer dans leurs points essentiels les résultats nouveaux qui ont été obtenus. Si l'on entend par ce mot de *fonction arbitraire* toute fonction dont la manière d'être dans un intervalle, quelque petit qu'il soit, n'entraine aucune restriction relative à sa détermination dans tout autre intervalle, le problème le plus général qui constitue le point de départ et la tâche la plus importante des travaux sur la représentation d'une fonction arbitraire est le suivant : *Représenter une telle fonction sous une forme mathématique dans laquelle interviennent seulement les opérations fondamentales de l'Arithmétique, addition, soustraction, multiplication et division; ces opérations pouvant d'ailleurs être répétées soit un nombre fini, soit un nombre infini de fois.* L'extrême généralité du problème ainsi posé a naturellement limité les recherches entreprises en premier lieu au cas des fonctions d'une seule variable; et c'est de ce cas seulement que nous nous occuperons dans ce qui va suivre.

Dans le siècle dernier, les recherches sur les cordes vibrantes conduisirent à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

D'Alembert donna comme intégrale générale la somme suivante des deux fonctions entièrement arbitraires des variables x, t,

$$y = f(x + at) + \varphi(x - at),$$

et il montra qu'il doit subsister dans cette solution une seule fonction arbitraire, si y doit en outre satisfaire à la condition de s'annuler pour $x = 0$ et $x = l$. Daniel Bernoulli montra de son côté

---

riabeln durch trigonometrische Reihen : Inaugural-Dissertation, zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vorgelegt von Arnold Sachse *aus Schwerin a/W.* Göttingen, 1879.

Nous avons cru devoir traduire cet intéressant travail, qui donnera à nos lecteurs une idée d'ensemble des travaux accomplis dans différentes directions sur ce sujet, surtout depuis Riemann. Nous rappellerons que déjà le Mémoire de Riemann se traduit dans le *Bulletin*, t. V, 1re série. p. 20 et 79.

que l'équation aux dérivées partielles, ainsi que les conditions aux limites, peuvent être vérifiées également par une série trigonométrique, et il affirma que cette série donnait la solution la plus générale.

La comparaison de ces deux solutions différentes conduisit Euler à formuler le problème suivant : *Une fonction entièrement arbitraire d'une variable peut-elle être toujours représentée par une série trigonométrique?*

Le but de notre travail est précisément d'indiquer tous les pas qui ont été faits jusqu'à notre époque vers la solution complète de ce problème.

A l'époque d'Euler, la notion de fonction arbitraire était entendue d'une manière beaucoup plus étroite que nous ne l'avons fait au début de notre travail. On partait de considérations purement géométriques et l'on avait seulement en vue les fonctions qui peuvent être représentées par une courbe formant un trait continu. On parlait de fonctions *déterminées graphiquement,* et cette expression a été employée plus tard par Riemann à cause du sens précis dont elle est susceptible. Euler nommait ces fonctions *functiones continuæ.* En ce qui les concerne, après une longue discussion, on crut être parvenu à ce résultat, qu'elles peuvent toujours être représentées par une série trigonométrique. On considérait aussi d'autres fonctions, celles qui s'interrompent brusquement en un point et qui sont continuées par une autre fonction. On ne les regardait pas comme formant une fonction proprement dite, mais plutôt comme formées de *parties de fonctions,* et l'on pensait que toutes les parties ensemble ne pouvaient pas être représentées par une même série trigonométrique. Aussi l'impression fut-elle profonde lorsque Fourier affirma que toute fonction arbitraire, soit simple, soit composée de parties de fonctions, peut être représentée par une série trigonométrique. Car cette proposition était en contradiction avec la notion de fonction telle qu'elle était acquise à l'époque de Fourier, et elle conduisait nécessairement pour l'avenir à regarder une fonction composée de différentes parties définies par des lois différentes comme une véritable fonction. C'est en 1807 que Fourier communiqua à l'Académie des Sciences la grande découverte qu'il venait de faire; ses recherches ultérieures sur la représentation des fonctions arbitraires, qui

se rattachaient à des problèmes de la théorie de la chaleur, ont été publiées dans différents Mémoires et finalement réunies dans son grand Ouvrage, la *Théorie de la chaleur*, publié en 1822.

Supposons que l'on veuille représenter une fonction $f(x)$ par une série trigonométrique de telle manière que l'on ait, pour chaque valeur de x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Fourier détermine les coefficients a_n, b_n, en multipliant les deux membres successivement par $\sin nx$, $\cos nx$, et en intégrant de $-\pi$ à $+\pi$. Il croit pouvoir énoncer en toute généralité la proposition suivante : Si, dans la série $\Sigma\,(a_k \sin k\,x + b_k \cos k\,x)$, on a

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha,$$

la série représente la fonction pour toute valeur de x, dans l'intervalle entre $-\pi$ et $+\pi$. On a depuis appelé *séries de Fourier* les séries trigonométriques dont les coefficients sont déterminés par les intégrales précédentes, et finalement on a donné le même nom à toutes les séries trigonométriques. C'est seulement dans ces derniers temps qu'à la suite de M. Heine (¹) on a commencé à distinguer de nouveau les séries trigonométriques avec des coefficients quelconques des séries de Fourier, et à admettre qu'il puisse exister des fonctions d'une nature particulière, représentées par des séries trigonométriques, n'ayant pas leurs coefficients déterminés par les intégrales précédentes.

Tout ce qui concerne l'origine des séries trigonométriques et leur emploi dans certains problèmes de Physique mathématique a été traité d'une manière détaillée par Riemann ; nous nous contenterons d'appeler l'attention sur deux points différents.

Le mérite de Fourier n'est pas, à notre avis, dans la découverte

---

(¹) *Journal de Borchardt*, t. LXXI, p. 354.

d'un moyen général de détermination des coefficients, mais plutôt dans cette remarque, qu'il a faite le premier, qu'une série trigonométrique, ayant les coefficients déterminés par les intégrales définies données plus haut, peut représenter une fonction entièrement arbitraire. En effet, la détermination des coefficients par des intégrales ne lui appartient pas. Lagrange avait déjà fait connaître cette méthode en 1766 dans les *Miscellanea Taurinensia* (1), à la vérité sans se rendre pleinement compte de son importance et sans la conduire jusqu'au bout. Il résout le problème de faire passer une courbe, dont l'équation a la forme

$$y = \alpha \sin x + \ldots + \lambda \sin n x,$$

par les n sommets d'une ligne brisée donnée, et il dit expressément que la ligne précédente et cette ligne brisée se rapprocheront à mesure que l'on prendra un plus grand nombre de points, en sorte qu'en prenant un nombre infini de points on obtiendrait l'expression d'une courbe continue qui serait identique à la courbe donnée. La méthode d'interpolation de Lagrange est, au fond, celle de Fourier; seulement le procédé employé par Lagrange pour la détermination des coefficients est plus fécond; aussi a-t-il été employé avec avantage par Dirichlet (2) et par Riemann (3) dans leurs démonstrations. Mais il y a plus, la méthode de multiplication employée par Fourier ne lui appartient pas en propre. Il semble avoir échappé à Riemann qu'Euler, dans un Mémoire de 1777 publié dans les *Nova Acta Acad. Scient. Petrop.*, t. XI, 1798, p. 114, avait indiqué le procédé de détermination des coefficients par la multiplication et les intégrales définies. Jacobi a, du reste, déjà signalé ce fait (4). Comme, dans le troisième Volume des *Misc. Taur.*, où le Mémoire de Lagrange a été publié, se trouvent aussi des travaux d'Euler, il n'est pas douteux qu'Euler ait connu la formule de Lagrange; il n'est pas moins certain que Fourier a connu les résultats d'Euler; car il indique lui-même (*Théorie de la chaleur*, art. 428) que l'on trouve chez presque tous les mathémati-

(1) *Voir* LAGRANGE, *Œuvres*, t. I, p. 551.

(2) DOVE et MOSER, *Repertorium für Physik*, t. I, p. 152-174; 1837.

(3) RIEMANN, *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen*.

(4) *Journal de Crelle*, t. 2, p. 2.

ciens de cette époque, Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler, Lagrange, des résultats et des développements analogues aux siens.

Peut-être devrait-on aussi ajouter à l'exposé historique de Riemann que Poisson a fait connaître une méthode particulière de détermination des coefficients qui mérite l'attention à cause des nombreuses recherches et des conséquences auxquelles elle a donné lieu. Poisson part de la formule ([1])

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\alpha)+r^2}d\alpha$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(x-\alpha)\,d\alpha,$$

qui est exacte toutes les fois que r est plus petit que 1; il y fait $r=1$, et il cherche à prouver que l'intégrale du premier membre a pour limite la valeur de la fonction $f(x)$.

Fourier n'a pas prouvé que la série trigonométrique qu'il obtient pour la représentation de la fonction converge réellement vers la valeur de la fonction. A la vérité, il donne (*Théorie de la chaleur*, art. 177) une définition rigoureuse de la convergence d'une série; mais il regarde, dans le cas actuel, la démonstration de la convergence comme facile, et il laisse au lecteur le soin de la trouver. Dans les cas particuliers que l'on avait surtout à considérer et pour des valeurs particulières de la variable, on reconnaissait qu'en réalité la série convergeait vers la valeur de la fonction; mais Cauchy paraît être le premier qui ait senti la nécessité d'une démonstration rigoureuse, indépendante de la forme de la fonction et applicable à toutes les valeurs de la variable ([2]).

Il communiqua, en 1826, à l'Académie des Sciences une démonstration de la formule de Fourier. Il y amène le terme général de la série à une forme qui prouve que le rapport de ce terme à la quantité $A\frac{\sin nx}{n}$, où A est une constante indépendante de n, dif-

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XIX, p. 404, 1823; *Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 574, 1823, et *Théorie de la chaleur*. Une étude rigoureuse des conditions d'existence de la formule se trouve dans un Mémoire de M. A. Schwarz: *Zur Integration der part. Differentialgl.* $\Delta u=0$ (*Journal de Borchardt*, t. LXXIV, p. 226; 1872).

([2]) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 603 et suiv.

fère d'autant moins de l'unité positive que n est plus grand. De ce que la série dont le terme général est $A\frac{\sin nx}{n}$ est convergente, Cauchy conclut qu'il en est de même pour la série de Fourier. Dirichlet a montré que cette conclusion est inexacte ([1]). Cauchy reconnaissait aussi lui-même que sa méthode est insuffisante dans bien des cas, et qu'elle exige que le terme général soit déterminé pour $n=\infty$. D'ailleurs, la transformation que Cauchy fait subir à la série et contre laquelle Dirichlet élève des objections repose, comme Riemann le fait remarquer (*loc. cit.*, art. 2), seulement sur la supposition qu'il existe une fonction $\varphi(x+yi)$ de l'argument complexe $x+yi$, qui demeure finie pour toutes les valeurs positives de y, et dont la partie réelle se réduit pour $y=0$ à la fonction arbitraire donnée $f(x)$. Riemann ajoute à ce sujet : « Si l'on admet ce théorème qui, en fait, est exact, alors la voie suivie par Cauchy conduit au but; de même que, réciproquement, ce théorème peut se déduire de la série de Fourier. »

Dans un Mémoire déjà cité (*Journal de Borchardt*, t. LXXIV, p. 232), M. Schwarz appelle l'attention sur cette affirmation de Riemann et engage à l'examiner. On ne peut pas admettre que Riemann ait voulu dire que, le théorème une fois admis, la démonstration de Cauchy devient irréprochable, puisque les objections de Dirichlet aux autres parties de la démonstration conservent toute leur valeur.

La remarque de Riemann ne peut donc recevoir que le sens suivant : Étant données une fonction $f(a)$ et la série de Fourier correspondante Σ, il est toujours possible de trouver une fonction $\varphi(x+yi)$ de l'argument complexe $x+yi=re^{i\alpha}$ qui soit développable en une série Σ' ordonnée suivant les puissances de cet argument complexe, série dont la partie réelle se réduira, pour une valeur déterminée de r, à la série Σ, en sorte que la convergence de cette série résulte de la convergence de la première. Or on a la série

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\,d\gamma+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} r^n\int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\cos n(\alpha-\gamma)\,d\gamma,$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 158.

qui est convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon 1 et qui, pour $r = 1$, se réduit à la série de Fourier. La question est de savoir si l'on peut faire $r = 1$. Cette question et les questions connexes ont été complètement résolues dans deux Mémoires parus presqu'en même temps : le premier de M. A. Schwarz (¹), le second de M. Prym (²). M. A. Schwarz démontre le théorème suivant, déjà donné dans ses parties essentielles par Riemann :

Considérons sur un cercle de rayon 1 *une fonction réelle de l'argument* α *qui soit finie, continue et uniforme et qui reprenne la même valeur quand l'argument* α *augmente de* 2π, *mais qui ne soit assujettie à aucune autre condition ; il existe toujours une fonction, et une seule,* u, *continue à l'intérieur et sur la circonférence du cercle, dont les dérivées* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *sont, dans l'intérieur du cercle, des fonctions uniformes et continues de* x *et de* y, *qui satisfait à l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *et qui est égale pour tous les points du cercle à la fonction* $f(\alpha)$. La démonstration de ce théorème ne se déduit pas toutefois de la considération de la série ; elle repose sur l'emploi de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2}\,d\alpha.$$

Cette intégrale est parfaitement déterminée pour tous les points à l'intérieur du cercle ; elle est égale à la série donnée plus haut, et elle constitue la partie réelle de l'intégrale suivante :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{e^{\alpha i} + z}{e^{\alpha i} - z}\,d\alpha,$$

qui, pour toutes les valeurs de $z = re^{\alpha i}$ dont le module est plus petit que 1, offre les caractères d'une fonction entière et uniforme

---

(¹) *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich*, 15ᵉ année : *Ueber die Integration der Dffgl.* $\Delta u = 0$ *für die Fläche eines Kreises*. Un extrait de ce Mémoire, avec la continuation et le développement des recherches qui y sont contenues, a paru dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXIV ; 1872.

(²) *Ueber die Dffgl.* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*Journal de Borchardt*, t. LXXIII ; 1871).

de l'argument complexe $x+yi$. L'intégrale de Poisson cesse d'avoir un sens déterminé seulement pour les points du cercle; mais, si l'on admet que la fonction qui cesse d'être déterminée par cette intégrale coïncide avec la fonction $f(\alpha)$ en tous les points du cercle, il est aisé de montrer qu'il y a continuité et que la valeur de l'intégrale tend vers celle de $f(\alpha)$ lorsqu'on s'approche de la circonférence. En d'autres termes, la partie réelle de la fonction $\varphi(x+yi)$ définie ainsi à l'intérieur du cercle se transforme d'une manière continue dans la fonction $f(\alpha)$ quand on s'approche du contour.

D'autre part, il résulte d'un théorème bien connu d'Abel ([1]) que le développement en série, pour les points à l'intérieur du cercle de la partie réelle de $\varphi(z)$, se transforme dans la série de Fourier pour les points du cercle. Toutes les fois donc que cette série sera convergente, elle sera nécessairement égale à la valeur correspondante de $f(\alpha)$. Mais l'on n'a aucun moyen de savoir si la série sera convergente, et la proposition précédente ne permet de rien affirmer à cet égard.

Il nous reste à revenir sur la seconde partie de la remarque de Riemann, à savoir que le théorème qui joue un rôle fondamental dans l'analyse de Cauchy peut se déduire de la série de Fourier. Cette marche a été suivie par M. Neumann dans son écrit : *Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen* ([2]). Mais elle est soumise à des difficultés qui ont été signalées de différents côtés. M. Heine a donné l'impulsion et a fait remarquer qu'en laissant même de côté différentes objections, la méthode de M. Neumann lui paraît incertaine; car elle con-

---

([1]) Ce théorème, démontré dans le célèbre Mémoire sur la série du binôme, est le suivant : Toutes les fois que la série

$$c_0 + c_1 + \ldots$$

est convergente, elle est la limite de la série

$$c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots,$$

où r tend vers l'unité par des valeurs réelles inférieures à l'unité.

Voir aussi la démonstration de Dirichlet, *Journal de Liouville*, t. VII, 2e série, p. 253-255.

([2]) *Journal de Borchardt*, t. LXXI, p. 361.

duirait, sans aucune hypothèse nouvelle, à cette conclusion, que toute fonction serait développable d'une seule manière en série trigonométrique. M. Prym, dans le travail déjà cité, a appuyé sur les différentes objections qu'on peut présenter. Il ne semble donc pas qu'on puisse partir de la série de Fourier si l'on veut démontrer le théorème dans toute sa généralité, parce qu'on n'a pas la démonstration que la série de Fourier converge pour toutes les fonctions continues. La deuxième partie de la remarque de Riemann ne paraît donc pas justifiée.

II.

La tentative de Cauchy était la seule que Dirichlet connût, lorsqu'il publia, en 1829, son Mémoire sur les séries trigonométriques, que Riemann regarde à juste titre comme la première recherche solide sur ce sujet. On avait remarqué que les méthodes regardées auparavant comme rigoureuses se montraient défectueuses et insuffisantes dans les cas particuliers, sans qu'on pût trouver une faute dans les calculs, et l'on en avait conclu que l'erreur ne pouvait se trouver que dans les principes. Les principaux représentants de cette période, dans laquelle on soumit à une revision tous les principes de l'Analyse infinitésimale, sont Cauchy, Abel et Dirichlet. Dans une Lettre de 1826 (¹), Abel insiste sur l'insuffisance des démonstrations de la théorie des séries infinies, et, en particulier, il trouve étonnant que l'on étende sans démonstration aux séries infinies toutes les règles qui s'appliquent aux fonctions formées à l'aide d'un nombre limité d'opérations. Il indique ainsi la véritable origine des paradoxes si nombreux que l'on rencontrait alors en Analyse.

Riemann, dans son travail, a mis en évidence, d'une manière magistrale, les points fondamentaux de la démonstration de Dirichlet, qui repose précisément sur la découverte, due à Dirichlet et signalée par lui à différentes reprises, de la distinction essentielle qui sépare les séries absolument convergentes et celles qui cessent de l'être quand on prend tous les termes avec leurs valeurs

(¹) ABEL, *Œuvres complètes*, t. II, p. 265.

absolues. Dirichlet, en employant dans la théorie des séries trigonométriques la définition la plus précise des notions fondamentales de l'Analyse, a donné naissance, par cela même, à l'extension et aux éclaircissements que ces principes ont reçus à la suite des recherches ultérieures, relatives aux séries trigonométriques.

En dehors du Mémoire déjà cité, Dirichlet en a publié un autre sur les séries trigonométriques, dans le *Repertorium* de Dove; mais ce second travail n'est, en somme, qu'une exposition développée des méthodes exposées seulement d'une manière incomplète dans son premier travail.

Dirichlet se propose le problème de rechercher dans quel cas la série de Fourier converge, et il suit la méthode suivante : il recherche comment doit se comporter une fonction $\varphi(x)$, pour que la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\cos kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\sin kx\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi+x}{2}}\varphi(x-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi-x}{2}}\varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \end{aligned}$$

converge, lorsque n croît, vers la valeur de la fonction $\varphi(x)$. La recherche revient à la détermination de la limite suivante :

$$\lim_{k=\infty}\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta,\quad 0 < h \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on suppose que $f(\beta)$ soit constamment finie et déterminée entre o et h, et ensuite qu'elle soit constamment positive et ne décroisse jamais, l'intégrale est décomposable en une suite d'intégrales partielles, dont chacune est telle que la fonction sous le signe d'intégration garde le même signe dans tout l'intervalle. Dans chaque intervalle on peut appliquer alors un théorème

connu, et l'on obtient une suite alternée formée de termes décroissant indéfiniment. Par suite de cette propriété de la série, on peut trouver deux quantités comprenant l'intégrale et qui toutes les deux convergent vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$, quand n croît indéfiniment. On a donc

$$(\text{I}) \qquad \lim_{k=\infty}\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = \frac{\pi}{2}f(0), \quad 0 < h \leqq \frac{\pi}{2},$$

et il suit de là immédiatement que l'on a

$$(\text{II}) \qquad \lim_{k=\infty}\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta = 0, \quad 0 < g < h \leqq \frac{\pi}{2}.$$

A l'aide du théorème II, on peut étendre le théorème I à toutes les fonctions continues qui ont seulement un nombre fini de maxima et de minima. Dirichlet dit qu'une fonction est continue si elle demeure finie et déterminée entre 0 et h, et si, en outre, $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ décroît indéfiniment avec δ. Dans la suite, nous adopterons partout la définition suivante, qui est plus précise : Une fonction $f(\beta)$ est continue pour un point β si, pour chaque valeur de ε, ε étant une quantité différente de zéro, mais aussi petite qu'on le voudra, il existe une quantité δ' telle que, pour toutes les grandeurs δ'' dont la valeur absolue est inférieure à δ', la différence $f(\beta+\delta'')-f(\beta)$ soit inférieure en valeur absolue à ε.

Si la fonction β est discontinue pour la valeur zéro, l'intégrale précédente converge encore, mais vers la valeur

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\pi}{2}[f(0+\varepsilon)+f(0-\varepsilon)].$$

Cela a encore lieu s'il existe en outre dans l'intervalle de 0 à h un nombre quelconque, mais fini, de points de discontinuité.

Si l'on assujettit maintenant la fonction $\varphi(x)$ aux mêmes conditions que $f(\beta)$, on reconnaît sans difficulté que la somme S converge, pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, vers la valeur $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)}{2}$, et, pour les limites mêmes, vers la valeur

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varphi(-\pi+\varepsilon)+\varphi(\pi-\varepsilon)}{2}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

La série de Fourier relative à une fonction qui 1° *ne devient jamais infinie,* 2° *n'a pas un nombre infini de discontinuités,* 3° *n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, converge vers la valeur de la fonction à toutes les places où il n'y a pas de discontinuité, et, pour les points de discontinuité, elle converge vers la moyenne des deux valeurs de la fonction prises de part et d'autre de ce point.* Les conditions auxquelles est ici assujettie la fonction s'appellent le plus souvent *les conditions de Dirichlet.*

Proposons-nous maintenant de rechercher ce que l'on doit entendre par cette expression : *La série représente la fonction.* Si nous entendions par là que, pour chaque point pris dans l'intervalle, la valeur de la série coïncide avec celle de la fonction, nous devrions déjà renoncer, même pour les fonctions qui satisfont aux conditions de Dirichlet, à une représentation par les séries de Fourier. Nous proposerons donc la définition suivante : *Une série représente une fonction dans un intervalle donné, si ses valeurs coïncident avec celles de la fonction pour tous les points pris dans l'intervalle, à l'exception d'un nombre limité de points connus.* Alors une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet peut être considérée comme représentée par une série de Fourier, et les points d'exception correspondent aux discontinuités. Il est encore plus avantageux d'admettre avec Riemann qu'en un point de discontinuité on donnera à la fonction une valeur égale à la demi-somme des valeurs limites $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Autrement une fonction qui posséderait des discontinuités en nombre infini ne pourrait pas être représentée par une série de Fourier. Si l'on fait cette supposition, alors une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet sera représentée par la série pour tous les points; et de plus, on n'exclut pas la possibilité de représenter une fonction avec un nombre infini de points de discontinuité par une série de Fourier.

On pourrait encore adopter comme définition qu'une série représente une fonction, même en renonçant à l'égalité de la fonction et de la série pour un nombre infini de valeurs de x. Riemann

parait avoir fait cette supposition (voir en particulier *loc. cit.*, à la fin de l'article 12), bien qu'il n'ait jamais donné dans son Mémoire une définition de l'expression : Une série représente une fonction. Comme il s'agit en tout ceci d'une question de mots, je garde la première définition, car elle me paraît la plus naturelle.

Jusqu'ici il a été question, pour plus de simplicité, seulement de la représentation entre $-\pi$ et $+\pi$ d'une fonction ayant 2π pour période. A ces limites on peut aisément en substituer d'autres quelconques et étendre les théorèmes précédents aux fonctions ayant une période arbitraire. Ils ont lieu aussi pour une fonction non périodique, si elle satisfait aux conditions reconnues comme nécessaires, entre des limites quelconques, puisque la variation d'une fonction arbitraire dans un intervalle déterminé n'impose aucune condition aux valeurs que l'on peut attribuer à la fonction en dehors de cet intervalle.

Nous avons encore à insister sur un point de la démonstration de Dirichlet, à savoir que la série de Fourier converge, pour tous les points de discontinuité, vers la moyenne des valeurs-limites à droite et à gauche, $f(x+0)$, $f(x-0)$. M. Schläfli n'a pas cru que cette conclusion fût légitime ([1]). M. Schläfli s'appuie de l'autorité de Duhamel ([2]). Il lui semble que, dans son Mémoire, le géomètre français a eu la pensée qu'il serait plus naturel d'attribuer, en un point de discontinuité, toutes les valeurs comprises entre $f(x-0)$ et $f(x+0)$ à la fonction représentée par la série trigonométrique. Il est vrai que Duhamel énonce le théorème suivant : *Si l'on fait la somme des n premiers termes d'une série dont tous les termes sont des fonctions continues de x, et que l'on y mette à la place de x une fonction de n qui jouisse de la propriété de tendre, lorsque n croît indéfiniment, vers la valeur x_1 pour laquelle la continuité de la fonction est interrompue, on peut choisir cette fonction de n de telle manière que la somme converge vers toute*

([1]) *Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer wilkürlichen periodischen Function einer Variebelen durch eine trigonometrische Reihe*, Berne, 1874; Universitäts-Programm, p. 15, et *Journal de Borchardt*, t. LXXII, *Ueber die part. Differentialgl.* $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, p. 284.

([2]) *Journal de Liouville*, t. XIX. 1854; *Note sur la discontinuité des séries et sur les moyens de la reconnaître.*

valeur comprise entre les deux limites $f(x_1+0), f(x_1-0)$. Il dit en même temps qu'il y a deux moyens de déterminer la somme de la série pour la valeur x_1 de la variable. On peut ou bien faire tout de suite $x=x_1$ et effectuer la sommation : on trouvera alors une valeur déterminée, et c'est la méthode que l'on emploie pour calculer la valeur numérique de la série ; ou bien considérer la somme des n premiers termes, y remplacer x par une valeur qui tend vers x_1 quand le nombre des termes croît indéfiniment. Duhamel reconnait, comme cela est vrai, que pour les fonctions continues les deux méthodes conduisent au même résultat, et que pour les fonctions discontinues on est conduit au théorème énoncé plus haut. Mais la seconde méthode de sommation n'est pas admissible, parce qu'on ne peut pas affirmer que la somme obtenue par le second procédé coïncide avec la valeur de la série pour $x=x_1$. Il y a une objection décisive à faire à cette seconde méthode : c'est sa complète indétermination. Il est donc seulement permis d'adopter la première, et par suite la série de Fourier converge seulement vers la valeur moyenne.

M. P. du Bois Reymond [1] a aussi cherché à établir que la série de Fourier, aux points de discontinuité, peut prendre toutes les valeurs comprises entre les limites $f(x+0), f(x-0)$. Il donne comme valeur de la série de Fourier, pour $x=x_1$,

$$\frac{1}{2}[f(x_1+0)+f(x_1-0)]$$
$$+[f(x_1+0)-f(x_1-0)]\lim_{\substack{n=\infty\\ x=x_1}}\int_0^{n(x-x_1)}\frac{\sin\alpha}{\pi\alpha}\,d\alpha.$$

Si l'on fait d'abord $x=x_1$, puis $n=\infty$, on obtient la valeur de Dirichlet ; si l'on fait d'abord $n=\infty$, puis $x=x_1$, on obtient l'une ou l'autre des deux limites $f(x_1+0), f(x_1-0)$, suivant que x s'approche de x_1 par des valeurs supérieures ou par des valeurs inférieures ; si on laisse arbitraire le passage à la limite, on obtient toutes les valeurs intermédiaires. C'est en cela que consiste, d'a-

---

(1) *Math. Annalen*, t. VII, 1873, *Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen.*

près M. du Bois-Reymond, *la détermination précise de la somme de la série de Fourier*. Il résulte de ce qui précède que cette détermination repose sur une définition, qui ne parait pas admissible, de la somme d'une série. Il ne peut y avoir qu'une manière d'opérer : faire $x = x_1$ et ensuite $n = \infty$, et alors disparaît ce que l'on a appelé l'*indétermination continue* de la série [1].

On a été conduit à cette opinion erronée, que la détermination de Dirichlet n'est pas absolument exacte, par la considération déjà rappelée d'une fonction de x et de r, définie à l'intérieur du cercle de rayon 1 par l'intégrale de Poisson. Si la série identique à l'intégrale de Poisson se transforme pour tous les points du cercle en une fonction finie continue et bien déterminée, ce passage a lieu d'une manière continue; j'ajoute que le théorème de M. Schwarz a encore lieu quand la fonction est discontinue pour un nombre limité de points du contour. Si l'on ne considère que les points pour lesquels la fonction est continue, M. Prym, dans le Mémoire cité, a étudié comment s'effectue le passage à la valeur-limite $r = 1$ pour les points de discontinuité, et il montre que pour ces points l'intégrale de Poisson peut tendre vers toutes les valeurs comprises entre les limites $f(x + 0), f(x - 0)$, et que sa valeur-limite dépend de la direction-limite de la droite qui joint le point variable à sa position-limite sur le cercle. La série de Fourier, au contraire, converge seulement vers la valeur moyenne assignée par Dirichlet, parce qu'il s'agit ici de fonctions d'une seule variable.

Les conditions de Dirichlet ne sont en aucune façon nécessaires; elles sont seulement suffisantes. Il restait à examiner si une fonction qui 1° devient infinie en un ou plusieurs points, 2° qui a un nombre infini de discontinuités, 3° qui a un nombre infini de maxima et de minima, peut encore être représentée par la série de Fourier.

Si la fonction devient infinie pour un point c, Dirichlet, dans un autre Mémoire [2], indique la convergence de l'intégrale $\int f(x)\,dx$

---

[1] Il y a ici encore une question de mots et de définition. L'auteur a choisi entre les deux définitions de la somme celle qui est la meilleure; mais il n'a nullement l'intention de méconnaître l'intérêt du théorème de Duhamel et de la curieuse formule de M. du Bois-Reymond. G. D.

[2] *Journal de Crelle*, t. 17, p. 54.

étendue de part et d'autre du point c comme condition pour que la série de Fourier représente encore la fonction. Pourtant Dirichlet a voulu présenter cette condition non comme nécessaire, mais seulement comme suffisante. Si l'intégrale est absolument convergente, cette condition est en effet suffisante, comme l'a remarqué M. P. du Bois-Reymond [1].

Pour ce qui concerne les deux autres cas d'exception, Dirichlet, à la fin de son premier Mémoire (*loc. cit.*, p. 169), affirmait qu'ils peuvent être ramenés à ceux qu'il avait examinés. Il annonce qu'une fonction, ayant un nombre infini de discontinuités ou de maxima et de minima, pourra toujours être représentée par la série de Fourier pourvu que, dans un intervalle quelconque (a, b), on puisse toujours en placer un autre (r, s) dans lequel la fonction demeurera continue. « Mais », dit-il en terminant son Mémoire, « la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer, exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'Analyse infinitésimale, et qui seront exposés dans une autre Note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série de Fourier ». Dirichlet n'a pas tenu cette promesse. Quant à la restriction qu'il formule relativement aux fonctions discontinues un nombre infini de fois, elle résulte d'après lui de la notion de l'intégrale définie, et l'on peut par conséquent conclure que, dans l'opinion de Dirichlet, toutes les fonctions intégrables dans le sens qu'il a donné à ce mot peuvent être représentées par la série de Fourier.

Le développement rigoureux de la démonstration a été donné par M. Lipschitz [2].

Pour ce qui concerne les fonctions ayant un nombre infini de discontinuités, M. Lipschitz interprète certainement d'une manière fidèle les vues de Dirichlet en considérant le cas unique d'un nombre limité de points singuliers, dans le voisinage desquels existent une infinité de points de discontinuité. Dans ce cas encore la série représente la fonction, comme le démontre M. Lipschitz.

---

[1] *Journal de Borchardt*, t. LXXIX, 1874, *Allgemeine Lehrsätze über den Giltigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen*, p. 43-46, et *Abhandl. der Bayerischen Akad.*, t. XII, II, *Math. physik. Classe*, p. 43-44.

[2] *Journal de Borchardt*, t. LXIII, 1864, p. 296 : *De explicatione per series trigonometricas*, etc.

Mais la démonstration n'indique rien relativement aux valeurs singulières, et nous n'avons aucun moyen de reconnaître si pour ces valeurs particulières la série est égale à la fonction.

Si l'on a maintenant une fonction ayant un nombre infini de maxima et de minima, rien n'empêche de former la série de Fourier pour cette fonction, si les coefficients ont un sens et si la série est convergente. Mais on ne peut affirmer que la série ainsi formée représente la fonction qu'après avoir prouvé que la série a les mêmes valeurs que la fonction, sauf pour un nombre fini de points déterminés.

Les fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima peuvent être divisées en deux classes : les unes qui ont dans le voisinage d'un point déterminé une infinité d'oscillations avec une amplitude infiniment petite, et les autres pour lesquelles les amplitudes sont finies. Les premières peuvent être des fonctions continues ; les autres sont des fonctions discontinues. Dirichlet regardait toutes les fonctions continues comme susceptibles d'être représentées par la série de Fourier, *sans aucun point d'exception*, et, d'après une communication verbale de M. Weierstrass à laquelle fait allusion M. P. du Bois-Reymond (1), nous pouvons penser qu'il a toujours conservé cette opinion. Riemann aussi paraît avoir accepté cette affirmation de Dirichlet, comme on peut le reconnaître en plusieurs endroits de ses écrits (2). H. Hankel pense même qu'il a été démontré par Dirichlet, Lipschitz et Riemann que toutes les fonctions continues sont développables en une série de Fourier (3). L'inexactitude de cette opinion a été reconnue par M. P. du Bois-Reymond qui, après plusieurs essais infructueux pour démontrer le théorème, a été conduit à penser qu'il pourrait bien être inexact. Dans un travail développé (4) il a fait connaître des conditions compliquées sous lesquelles la série de Fourier, qui représente d'ailleurs la fonction, cesse de lui être égale pour un

---

(1) *Abhandl. der Bayer. Akad.*, t. XII, II, p. 8.

(2) *OEuvres complètes*, p. 3 : « Neuere Untersuchungen haben, ... », et p. 223 : « In der That für alle Fälle der Natur, ... » ; p. 224 : « Wenn man die unnöthige Voraussetzung, etc. »

(3) *Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*. Tübingen, 1870, Universitätsschrift, § 3.

(4) *Abh. der Bayer. Akad.*, t. XII, *Math. phys. Classe*, 187? : *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln*. Chap. IV.

certain nombre de valeurs. Comme, pour nous, le résultat principal de ces recherches consiste dans la découverte de telles fonctions continues, nous donnerons à la fin de ce travail un exemple simple, que M. Schwarz a fait connaître dans ses Leçons et qu'il a bien voulu nous autoriser à publier. Cet exemple est formellement compris dans l'exemple plus général de M. du Bois-Reymond, mais il s'en distingue par une plus grande simplicité dans la définition comme dans la démonstration.

Cette supposition que la méthode de Dirichlet s'applique à toutes les fonctions continues a conduit Riemann à cette opinion que les fonctions auxquelles la méthode de Dirichlet ne s'étend pas ne se trouvent pas dans la nature (p. 223, 230 et 251 des *OEuvres complètes*). M. Heine (¹) pense qu'il est inutile de rechercher si les fonctions discontinues se trouvent dans la nature. Ce qu'il y a de mieux peut-être à dire sur cette question philosophique, c'est que nous ne savons rien à son égard. Toutefois nous devons demeurer convaincus que ce serait ajouter une nouvelle hypothèse à toutes celles qui sont déjà admises en Physique que d'admettre la possibilité de développer une fonction rencontrée dans un problème en une série trigonométrique.

M. Lipschitz a étudié les fonctions ayant un nombre infini de maxima et de minima, mais satisfaisant pour le reste aux conditions de Dirichlet, et il en a fait connaître une classe pour laquelle la série de Fourier est convergente et en outre est toujours égale à la fonction. M. Lipschitz considère une fonction qui est finie et continue entre les limites extrêmes, ou du moins qui n'a qu'un nombre limité de solutions de continuité, mais qui possède un nombre illimité de maxima, soit en des points, soit en des segments. Les deux autres cas, que Dirichlet n'avait pas traités d'une manière complète, ne doivent pas avoir lieu ici : *quia duobus vel tribus casibus simul additis seriei species potius quam vis et natura mutatur*. Pourtant le caractère de la série se conserve seulement si plusieurs des singularités laissées de côté par Dirichlet ne se superposent pas en un point. M. Lipschitz appuie sa démonstration sur les théorèmes I, II de Dirichlet, donnés plus haut. Il montre qu'ils

(¹) *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2ᵉ édition, t. I, p. 55.

sont encore vrais et par conséquent que la série de Fourier converge encore vers la valeur de la fonction, si, à toutes les places où la fonction oscille, la valeur absolue de la différence $f(\beta+\delta)-f(\beta)$ décroît plus rapidement, quand δ tend vers zéro, que le produit d'une constante B et d'une puissance de δ avec un exposant positif quelconque. Désignons par D la valeur absolue de la différence

$$f(\beta+\delta)-f(\beta);$$

alors la condition de M. Lipschitz est $D<\beta\delta^\alpha$, où l'on a $\alpha>0$. Cette condition est plus restrictive que l'hypothèse d'une continuité uniforme. Si l'on veut que la fonction soit uniformément continue, il doit y avoir pour toute valeur de β une valeur minimum δ' dépendante de β et telle que, pour toute valeur δ'' inférieure en valeur absolue à δ', $f(\beta+\delta'')-f(\beta)$ soit plus petit qu'une quantité σ donnée à l'avance et aussi petite qu'on le veut. La condition de M. Lipschitz exige plus que la continuité uniforme, car elle entraine entre les deux quantités σ, δ' la relation $\sigma \leqq B\delta'^\alpha$ et par conséquent $\delta' \geqq \sqrt[\alpha]{\frac{\sigma}{B}}$. Or rien, dans la définition de la continuité uniforme, n'exige que cette relation soit vérifiée. La condition ne s'applique donc pas à toutes les fonctions continues.

La démonstration de M. Lipschitz ne s'applique pas seulement si la différence D s'approche plus rapidement de zéro que $B\delta^\alpha$. Il est aisé de reconnaitre qu'elle exige seulement que l'on ait $\lim_{\delta=0} D\log\delta=0$, et cette dernière condition est plus générale que la première, car elle est remplie toutes les fois que la première l'est; mais la réciproque n'a pas lieu, et il suffit de prendre le cas où l'on aurait $D=\frac{1}{\log\delta\log\log\delta}$ pour reconnaître que la seconde condition peut être vérifiée sans qu'il en soit de même de la première. Dans son Mémoire (*Sopra la serie di Fourier*; Pise, 1872), M. Dini se sert sans aucune explication de la seconde. On peut donc dire que la série de Fourier représente toute fonction ayant un nombre infini de maxima et de minima, pourvu que l'on ait, à toutes les places où la fonction oscille, $\lim_{\delta=0} D\log\delta=0$. Si, pour un nombre *limité* de points d'oscillation, cette condition cesse d'être remplie, on peut dire encore que la série de Fourier représente la fonction; toute-

fois l'on doit renoncer à démontrer, par les moyens qui conduisaient au but dans les cas précédents, la convergence de la série de Fourier, en ces points singuliers, et son égalité avec la fonction. Le succès des recherches de M. Lipschitz sur l'extension des deux théorèmes relatifs à l'intégrale de Dirichlet nous apprend déjà que Riemann était dans l'erreur quand il pensait (*Œuvres*, p. 224) que ces théorèmes ne peuvent plus servir dans le cas où la fonction a un nombre infini de maxima et de minima. Il me semble que la question de savoir si la série de Fourier converge ou diverge ne peut en général être décidée que par l'emploi de ces deux théorèmes, tant que la fonction est intégrable. Si la fonction ne remplit plus la condition d'intégrabilité, alors, il est vrai, les deux théorèmes perdent toute signification; mais dans ce cas nous ne connaissons aucune méthode générale de recherche.

Les recherches de M. Lipschitz ont fait connaître une classe nouvelle de fonctions qui peuvent être représentées par la série de Fourier; mais, pas plus que celles de Dirichlet, elles ne nous ont rien appris sur la nature des conditions qui sont nécessaires pour la représentation d'une fonction par la série de Fourier. On n'a aucun moyen de reconnaître si une fonction qui ne satisfait ni aux conditions de Dirichlet ni à celles de M. Lipschitz est ou n'est pas susceptible d'être représentée par la série de Fourier. On peut objecter, il est vrai, que c'est peut-être trop exiger que de demander les conditions nécessaires pour qu'une fonction puisse être représentée par la série de Fourier. Quand on a donné la définition la plus générale d'une série à termes positifs en disant que la série est convergente lorsque la somme des n premiers termes tend, pour n croissant indéfiniment, vers une limite déterminée, il n'y aucune autre définition qui ait précisément la même étendue.

On pourra bien trouver des conditions de plus en plus étroites, des classes de plus en plus étendues de fonctions susceptibles d'être représentées par la série de Fourier; mais si l'on parvenait à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation, elles pourraient fort bien être équivalentes à celles qui sont contenues dans la définition, et tout énoncé caractérisant les fonctions susceptibles d'une représentation par la série de Fourier pourrait se réduire purement et simplement à la définition même de la représentation.

Si une tentative d'obtenir des conditions plus étroites que celles de Dirichlet et de M. Lipschitz ne paraît pas devoir conduire à des résultats simples, il est néanmoins à désirer que l'on puisse obtenir un nombre illimité de classes de plus en plus étendues, absolument comme on a pour les séries à termes positifs des règles de convergence dont l'application peut être indéfiniment poursuivie. Une seule tentative a été faite dans cette voie par M. P. du Bois-Reymond dans son Mémoire : *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungs-Formeln* (*loc. cit.*, Chap. I-III). Nous ne signalerons dans ce travail que le résultat suivant : il y a en réalité des fonctions qui ne satisfont pas à la condition énoncée par M. Lipschitz et pour lesquelles la série de Fourier est divergente.

(*A suivre*).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

НАЧАЛА ЕВКЛИДА съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями. Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра *М.-Е. Ващенко-Захарченко*. — Кіевъ, въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра, 1880 (1).

Le célèbre Livre des *Éléments* n'a pas manqué d'éditions : celle que nous annonçons est au moins la quatre cent soixante et unième depuis l'invention de l'imprimerie. Malgré ce nombre toujours croissant, on manquait d'une édition rédigée au point de vue des dernières découvertes, faites depuis un demi-siècle sur la nature des principes de la Géométrie élémentaire. Nous avons aujourd'hui la satisfaction d'annoncer que cette lacune est remplie par la remarquable publication dont nous venons de transcrire le titre; grâce aux Notes et aux Suppléments dont le savant éditeur l'a enrichi, le Traité d'Euclide peut maintenant servir de texte pour l'enseignement élémentaire, et en même temps de guide pour les géomètres qui veulent prendre connaissance des recherches de l'ordre le plus élevé auxquelles l'étude approfondie des principes de la science de l'espace a donné lieu dans ces dernières années.

L'Ouvrage du professeur de Kief est précédé d'une intéressante Préface, où l'on mentionne d'abord les efforts faits de nos jours par plusieurs géomètres éminents pour rappeler l'attention des auteurs et des lecteurs sur l'immortel Traité d'Euclide, dont l'usage comme Livre d'enseignement est tombé en désuétude dans tous les pays, sauf l'Angleterre. L'étude de la Géométrie devant avoir pour principal but le développement des aptitudes logiques, rien ne saurait être plus profitable que la connaissance approfondie du chef-d'œuvre de la science antique, chef-d'œuvre que les modernes n'ont pas encore réussi à faire oublier, et qui reste toujours, depuis

(1) *Les Éléments d'Euclide*, avec une Introduction explicative et des Commentaires, par M.-E. Vachtchenko-Zakhartchenko, professeur ordinaire à l'Université Impériale de Saint-Vladimir. Kief, imprimerie de l'Université Impériale de Saint-Vladimir. — Grand in-8°, XVI-750 pages, 601 figures dans le texte. Prix : 6 roubles.

plus de vingt siècles, le modèle le plus parfait de raisonnement rigoureux. De notre temps, la Science s'est développée tout autour du domaine d'Euclide; les conséquences de ses principes s'étendent chaque jour à l'infini; les principes eux-mêmes ont été soumis à un sévère examen : au milieu de ces merveilleux progrès, le corps de doctrine du géomètre alexandrin n'a pas été entamé; tout au plus a-t-on proposé quelques simplifications ou corrigé quelques négligences de détail, dont la plupart peuvent être le fait de l'ignorance des copistes ou du zèle maladroit des commentateurs.

Est-ce à dire pour cela que le Livre d'Euclide, sous sa forme archaïque, soit le dernier mot de la science géométrique et qu'il faille imiter l'exemple des Anglais, qui naguère encore l'étudiaient mot pour mot, comme s'il se fût agi d'un texte sacré? Nous sommes loin de le penser, et notre ferme croyance est qu'il y a tout avantage, dans l'étude d'une science quelconque, à remplacer la marche synthétique et apodictique des anciens par la marche analytique qui est mieux appropriée aux tendances modernes, et qui, n'affirmant une vérité qu'au moment où elle vient d'être démontrée, accoutume l'esprit à se rendre compte de tout. Mais il n'en reste pas moins vrai que, pour celui qui aspire à une connaissance approfondie de la Géométrie, la lecture d'Euclide est un des plus utiles exercices auxquels il puisse se livrer.

Une des causes qui ont détourné les commençants de cette étude, c'est la forme prolixe et embarrassée qu'imposait aux anciens le manque des notations si claires et si concises à l'usage desquelles les Mathématiques doivent en grande partie les immenses progrès que nous admirons depuis deux siècles. La plupart des traducteurs d'Euclide se sont fait un devoir de respecter la forme antique, en se plaçant au point de vue archéologique et littéraire, et dès lors il n'est pas étonnant que l'on ait presque partout abandonné le vieux géomètre, qui n'était en réalité qu'à moitié traduit, et qu'on lui ait préféré ses successeurs qui s'exprimaient en langage moderne et facilement intelligible.

Déjà, cependant, nous avons plusieurs éditions des *Éléments* où l'on a tenu compte des convenances des lecteurs contemporains. Nous pouvons citer, entre autres, l'édition de Barrow (1655) en Angleterre, celle de Lorenz (1781) en Allemagne, sans parler des innombrables éditions classiques répandues dans les écoles de la

Grande-Bretagne, et dans lesquelles, depuis quelques années, les notations modernes empiètent de plus en plus sur la version littérale.

Dans sa longue pratique de l'enseignement et des examens, M. le professeur Vachtchenko-Zakartchenko avait reconnu, dans la plupart des Traités classiques contemporains, de graves et nombreuses imperfections dont on pouvait suivre la généalogie en remontant, non jusqu'à Euclide lui-même, mais à quelques-uns de ses médiocres commentateurs, qui n'avaient pu se rendre compte de l'œuvre du maître sans l'abaisser à leur niveau en la défigurant. Il a pensé avec raison qu'avant de vouloir, comme tant d'autres, *faire mieux* qu'Euclide, on devait commencer par apprendre à *faire aussi bien*, en se pénétrant de l'esprit de rigueur qui règne dans les *Éléments* et dont bien peu d'écrivains scientifiques contemporains ont su approcher. Pour favoriser cette étude, il a entrepris la tâche considérable d'une édition de la *partie géométrique* des *Éléments*, traduite dans la langue mathématique usitée de nos jours et accompagnée d'Additions et de Notes explicatives, qui mettent l'antique géomètre en face de la science actuelle et montrent combien sa doctrine vingt fois séculaire est plus voisine des conclusions de nos grands mathématiciens contemporains que celle de bon nombre de Traités publiés depuis cinquante ans.

Avant de parler de la Préface, sur laquelle nous reviendrons, nous nous occuperons d'abord de la remarquable *Introduction* que le savant professeur a placée en tête de son Ouvrage et dans laquelle il discute à fond le sens et la portée des *hypothèses géométriques* d'Euclide. Ces hypothèses sont au nombre de quatre, déduction faite des principes qui s'appliquent à toute espèce de quantités et qui sont réunis, dans les meilleures éditions, aux hypothèses géométriques sous la dénomination d'*axiomes* ou *notions communes* (κοιναὶ ἔννοιαι). M. Zakhartchenko a adopté, avec raison, la classification de Barrow, de Robert Simson, de Lorenz, qui réduit à trois le nombre des *demandes* (αἰτήματα) et qui réunit aux *axiomes* les trois énoncés que d'autres éditeurs, tels que Peyrard et August, en avaient distraits, bien que leur nature n'eût rien de commun avec celle des *demandes* précédentes (1).

---

(1) En effet, les *demandes* 1, 2 et 3 portent uniquement sur la *possibilité* d'exécuter

Les quatre hypothèses géométriques sont contenues, implicitement ou explicitement, dans les axiomes portant, suivant la classification suivie par l'auteur, les nos 8, 10, 12 et 11, en intervertissant ici à dessein l'ordre des deux derniers.

L'axiome 8 (τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί) suppose avant tout l'idée indéfinissable de l'*invariabilité des figures* lorsqu'on les transporte soit dans le plan, soit dans l'espace. Cette propriété des figures étant admise, l'*égalité* des figures est *définie* par la possibilité de les faire coïncider soit l'une avec l'autre, soit (axiome 1) chacune successivement avec une même troisième. Ainsi l'axiome 8 contient implicitement la *première hypothèse* essentielle de la Géométrie, celle de l'*invariabilité des figures*.

L'axiome 10 (πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι), que Peyrard et August rangent, ainsi que les deux suivants, parmi les *demandes*, est, en réalité, un théorème résultant immédiatement de la *deuxième hypothèse*, laquelle consiste à admettre l'existence d'une surface superposable à elle-même dans toutes ses parties, soit à la fois directement ou par retournement (comme le plan), soit seulement directement (comme la sphère).

L'axiome 12 (δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν) précise la définition assez vague qu'Euclide a donnée précédemment de la ligne droite (définition 4). Il admet pour cela, comme *troisième hypothèse*, l'existence d'une ligne superposable à elle-même dans toutes ses parties lorsqu'on la déplace soit en l'entraînant avec une portion de surface superposable à elle-même (propriété qui convient non seulement à la ligne droite, mais aussi au cercle et à l'hélice), soit encore en faisant tourner cette surface autour de deux points de cette ligne (propriété qui appartient à la ligne droite exclusivement).

Ces trois hypothèses suffisent à la démonstration des *vingt-huit* premières propositions du premier Livre, lesquelles s'appliquent

---

certaines constructions, de tracer certaines figures, comme l'exigeait la loi qu'Euclide s'était imposée, de ne s'appuyer sur aucune construction avant d'avoir indiqué les moyens de la réaliser. Cela équivaut à dire que, pour tracer les figures de la Géométrie plane, il faut se munir d'une règle et d'un compas. Les axiomes déplacés par les éditeurs que Peyrard a suivis expriment, au contraire, des vérités objectives ou des définitions de mots indépendantes, les unes et les autres, de nos moyens de construction.

indifféremment aux figures planes et aux figures tracées sur une même sphère. Ce n'est certainement pas sans dessein qu'Euclide a groupé ainsi ces propositions, en les plaçant avant celles qui ne peuvent s'établir sans le secours d'un nouveau principe, la *quatrième hypothèse,* exprimée par l'axiome 11, plus généralement connu sous le nom impropre de *postulatum d'Euclide*.

Cet axiome a été depuis longtemps le sujet de nombreuses recherches. Son analogie apparente avec les énoncés de certains théorèmes qui se déduisent des trois hypothèses précédentes a porté un grand nombre de géomètres à en chercher une démonstration fondée sur les mêmes principes. Tous leurs efforts ont échoué jusqu'à présent, et l'on sait maintenant, de science certaine, qu'ils échoueront toujours (1).

Il n'en est pas moins vrai que les tentatives faites par des mathématiciens comme Legendre, pour diminuer d'une unité le nombre des hypothèses géométriques, ont, du moins, contribué puissamment à élucider la question et ont eu pour résultat important de faire connaître avec précision quelles sont les propositions de la Géométrie plane qui sont indépendantes de l'axiome des parallèles.

Après avoir exposé les belles recherches de Legendre sur les divers énoncés qui peuvent remplacer l'axiome 11, M. Zakhartchenko aborde les théories de la Géométrie non-euclidienne, en suivant principalement la marche tracée par Lobatchefsky et tenant compte des travaux plus récents de M. Beltrami. On lira avec intérêt et profit ce résumé substantiel de soixante pages, qui forme actuellement le complément indispensable d'un Traité de Géométrie élémentaire. Nous ne pouvons qu'approuver l'auteur d'avoir fait de ce résumé un Chapitre entièrement indépendant du reste de l'Ouvrage, la lecture de cette théorie délicate supposant un esprit déjà exercé aux déductions géométriques et accoutumé à raisonner en dehors du concours immédiat des sens.

---

(1) Cette certitude, qui résulte des études profondes faites depuis un demi-siècle sur ce sujet difficile, n'empêche pas de voir chaque jour les géomètres les plus novices user leurs forces à la recherche d'une solution qui a résisté aux efforts des plus grands génies et dont d'autres génies non moins illustres ont démontré l'impossibilité. Dans ces dernières années, cette maladie géométrique a pris les proportions d'une véritable épidémie.

Pour faire connaître maintenant à nos lecteurs le contenu de la nouvelle édition d'Euclide, et leur rappeler en même temps l'ordre des matières traitées dans les *Éléments,* nous ne saurions prendre un meilleur guide que l'auteur lui-même, en donnant ici la traduction d'une partie de son intéressante Préface :

« Les *Éléments* d'Euclide se composent de quinze Livres, dont les deux derniers sont attribués à Hypsiclès (¹). Parmi les treize autres, ceux qui portent les nᵒˢ V, VII, VIII, IX et X contiennent l'Arithmétique des anciens, savoir les Livres V, VII, VIII, IX, l'Arithmétique des quantités rationnelles, le Livre X celle des irrationnelles. De ces Livres arithmétiques je n'ai traduit que le Vᵉ et le Xᵉ, qui ont un caractère plus géométrique, surtout le Xᵉ. J'ai cru pouvoir me dispenser de traduire les autres.

» Livre I. — Ce Livre se compose de quarante-huit propositions formant deux groupes distincts, dont le premier comprend vingt-huit propositions fondées sur les axiomes relatifs aux quantités en général et sur deux axiomes géométriques, savoir : la définition de la ligne droite et la possibilité de superposer les parties du plan soit directement, soit par retournement. Ce groupe de théorèmes constitue la base de la Géométrie ; ils sont rangés dans un tel ordre logique, que, en dehors de quelques changements de peu d'importance, cet ordre ne saurait être altéré.

» Le second groupe de théorèmes découle de la célèbre *hypothèse* d'Euclide connue sous le nom de *postulatum*. Ces théorèmes sont le fondement de la théorie des parallèles et de celle de la proportionnalité. Pour bien faire comprendre l'importance et le rôle de l'*hypothèse* d'Euclide, il est utile, dans une dernière revision de l'enseignement de la Géométrie, que le maître expose, à la suite de la proposition XXVIII, les six premières propositions de l'*Introduction* mise en tête de la présente édition, lesquelles expliquent la liaison qui existe entre l'hypothèse euclidienne et la somme des angles d'un triangle. De la théorie des parallèles se déduit le groupe

(¹) Friedlein a établi (*Bullettino di Bibliogr. e di Storia delle Scienze matem. e fis.*, t. VI, 1863, p. 493-529) que le Livre XIV peut bien être l'ouvrage d'Hypsiclès, qui vivait au IIᵉ siècle *avant* (et non *après*) notre ère. Mais il n'en est plus de même pour le Livre XV, qui appartient à une époque beaucoup plus récente, et M. Th.-H. Martin (*Bullettino di Bibl.*, t. VII, 1874) attribue cette médiocre production au philosophe néoplatonicien Damascius (VIᵉ siècle *après* J.-C.). (*Note de la Rédaction.*)

des théorèmes XXXV à XLVIII, relatifs à l'équivalence des figures. Ce groupe comprend le fameux *théorème de Pythagore*, démontré au moyen des figures équivalentes.

» Livre II. — Il se compose de propositions exprimant géométriquement les identités algébriques qui découlent des trois lois fondamentales des quantités :

» 1° La loi de *commutativité*, représentée par les deux identités

$$a+b=b+a, \quad a.b=b.a,$$

dont la première exprime l'addition des lignes et la seconde la construction d'un rectangle de côtés a et b ;

» 2° La loi de *distributivité*, représentée par l'identité

$$a(b\pm c)=a.b\pm a.c.$$

» 3° La loi de *répétition*, représentée par l'identité

$$a^n a^m = a^{n+m};$$

en Géométrie plane, cette identité ne peut être que de la seconde dimension, c'est-à-dire qu'elle donne

$$a.a=a^2;$$

en Stéréométrie, elle est de la troisième dimension, savoir,

$$a.a.a=a^2.a=a^3.$$

» Les propositions II à X sont des identités algébriques, reproduites sous cette dernière forme dans la Note 5 à la fin du Livre. A l'aide des propositions IV à VII, on peut résoudre géométriquement les équations du second degré de la forme

$$x^2\pm px=q^2 \quad \text{et} \quad px-x^2=q^2.$$

La proposition XI a reçu le nom de *sectio aurea* ou *divina*.

» La plupart des propositions de ce Livre ne figurent pas dans nos Traités classiques, bien qu'elles soient très utiles pour la représentation concrète des identités algébriques et pour le développement parallèle des transformations algébriques et des constructions géométriques. Le Livre II est l'Algèbre des anciens; au moyen des propositions qu'il renferme, les géomètres de l'antiquité ont effectué les transformations géométriques correspondantes à

celles de notre calcul algébrique. Au point de vue pédagogique, ce Livre est d'une haute valeur; le maître doit en tirer profit pour mettre en évidence les liens étroits qui unissent l'Algèbre à la Géométrie.

» Livre III. — Euclide y expose toutes les propriétés fondamentales du cercle. Parmi les propositions de ce Livre, la VIIe et la VIIIe éclaircissent la notion de maximum et de minimum. Suivant nos habitudes actuelles, les propositions XXXV, XXXVI et XXXVII seraient exposées dans la section consacrée à la *similitude* des figures et aux *lignes proportionnelles;* mais la manière dont elles sont présentées dans le Livre III des *Éléments* donne une représentation concrète plus lumineuse.

» Livre IV. — On y trouve la résolution des problèmes suivants: *Inscrire ou circonscrire à un cercle un polygone régulier de trois, de quatre, de cinq, de six et de quinze côtés.* Une des propositions de ce Livre mérite une attention particulière : c'est la proposition X, d'où l'on tire un grand nombre de conséquences indiquées dans les problèmes qui se rapportent à ce Livre.

» Livre V. — C'est l'Arithmétique *rationnelle* des anciens. Certaines définitions de ce Livre ayant été l'objet de beaucoup de discussions, de malentendus et de recherches, j'ai expliqué dans les Notes la manière actuelle d'envisager les rapports et les proportions, et j'ai fait voir que la cinquième définition d'Euclide ([1]), au sujet de laquelle se sont élevés des doutes, est identique à notre définition la plus générale, relative aux grandeurs incommensurables. Cette cinquième définition a été qualifiée d'*inintelligible,* parce qu'après elle vient la sixième ([2]), dans laquelle la proportionnalité est définie très simplement; mais cette dernière définition, dans son sens propre, se rapporte uniquement aux grandeurs commensurables. On rencontre plus loin encore une autre définition de la proportionnalité, la huitième ([3]). Cette triade de définitions a désorienté les géomètres.

([1]) Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρου, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

([2]) Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

([3]) Ἀναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης.

» J'ai remarqué que, dans nos écoles, les élèves sont très faibles sur cette partie, et à cause de cela, dans les Notes 3 et 5, j'ai expliqué en détail tout ce qui touche aux rapports et aux proportions ([1]).

» Livre VI. — Ce Livre a pour objet les rapports des aires de figures et tous les théorèmes sur la proportionnalité et la similitude. Nous engageons les professeurs à appeler spécialement l'attention des élèves sur les propositions VIII à XIII, qui servent à construire des expressions algébriques telles que

$$\frac{ab}{c},\ \frac{a^2}{c},\ \frac{a^2bc}{efc},\ \frac{a^3}{bc},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2 \pm b^2},\ \ldots.$$

Il faut aussi remarquer les propositions XXIV à XXIX, qui manquent dans nos Traités, et qui ont cependant une grande importance, en ce qu'elles peuvent fournir la résolution des équations quadratiques. La proposition XXX donne une nouvelle construction de la *sectio aurea*, déjà traitée sous une autre forme dans le Livre II.

» Dans la Note 23, j'ai ajouté certains théorèmes qui ne se trouvent pas dans Euclide.

» Avec le Livre VI finit la planimétrie. Par conséquent les *Éléments* ne parlent pas de la mesure du cercle, c'est-à-dire de la recherche du rapport de la circonférence au diamètre. C'est pour cette raison que j'ai traité, dans l'*Appendice I*, des théories qui manquent chez Euclide, savoir des polygones en général, et particulièrement des polygones étoilés; j'ai donné toutes les propositions qui conduisent à la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, avec l'historique de ces recherches et la traduction du Livre d'Archimède, Κύκλου μέτρησις, Livre dont on parle souvent, mais que bien peu de personnes ont lu. J'ai ajouté, dans les Notes, les éclaircissements nécessaires, et, enfin, j'ai expliqué la *méthode des limites* et les procédés modernes pour obtenir la détermination du nombre π.

([1]) Dans les définitions 10 et 11 du Livre V, M. Zakhartchenko a choisi, à l'exemple de Lorenz, le signe de la duplication ou de la triplication pour représenter ce que nous appelons maintenant l'*élévation au carré* ou *au cube* d'un rapport. Il écrit ainsi $2(a:b)$, $3(a:b)$ au lieu de $(a:b)^2$, $(a:b)^3$. Nous ne voyons pas bien clairement l'avantage qu'il trouve à ne pas adopter purement et simplement la notation moderne.

» Livre X. — C'est l'Arithmétique ou l'Algèbre *irrationnelle* des anciens, monument du génie profond des géomètres des temps antiques. On trouvera dans la Note 14 l'exposition en langage algébrique de toutes les recherches contenues dans ce Livre. Nous recommandons à l'attention spéciale du lecteur les dix-huit premières propositions, où sont développées, suivant la méthode des anciens, les propriétés fondamentales des grandeurs incommensurables, mais dont la lecture est loin d'être inutile aux géomètres de notre temps. La proposition XXIX, avec ses conséquences, mérite aussi qu'on s'y arrête, ainsi que la proposition CXVII. En somme, la lecture attentive du Livre tout entier ne peut manquer d'être profitable.

» Les Livres XI, XII et XIII contiennent la Stéréométrie; les deux suivants, le XIVe et le XVe, sont communément attribués à Hypsiclès ([1]). Dans les Notes et dans le texte, j'ai éclairci et complété ce qui, dans les *Éléments*, peut paraître obscur ou insuffisant, et j'ai rempli les lacunes laissées par Euclide. Je recommanderai à l'attention du lecteur la Note 1, relative à un passage du Livre XIII, où Euclide définit brièvement ce qu'il faut entendre par l'*analyse* et la *synthèse*, en donnant des exemples des deux méthodes. Dans ma Note, j'ai examiné ces méthodes en détail, avec des exemples à l'appui.

» Les Livres XIV et XV traitent des propriétés des polyèdres réguliers, et, dans l'*Appendice VIII sur les polyèdres*, j'ai exposé les découvertes les plus récentes faites sur ces corps.

» Enfin, les *Éléments* d'Euclide ne donnant pas la mesure des volumes et des surfaces des corps terminés par des faces planes ou courbes, j'ai présenté, dans l'*Appendice IX*, toutes les propositions relatives à cet objet.

» A la suite de cet *Appendice IX*, j'ai placé un Recueil de problèmes ([2]) sur chaque Livre, avec l'indication de la partie du Livre à laquelle chaque problème se rapporte et de la proposition dont dépend sa solution. J'ai ajouté, en dernier lieu, quelques problèmes remarquables, avec leurs solutions développées.

» Les *Appendices XI* et *XII*, qui terminent le Volume, traitent

---

([1]) *Voir* la note, p. 70.

([2]) Ce Recueil ne contient pas moins de six cent cinquante-sept énoncés.

l'un des maxima et minima des grandeurs en Géométrie, l'autre des quantités négatives. Tous les deux contiennent des exemples choisis. »

M. Zakhartchenko a encore enrichi son Ouvrage d'un précieux complément, consistant dans trois index bibliographiques, dont le premier donne la liste de quatre cent soixante éditions d'Euclide, publiées dans presque toutes les langues littéraires depuis l'invention de l'imprimerie. Nous indiquerons encore quelques articles omis sur cette liste :

1685. Les quinze Livres des Elemens geometriques d'Euclide et son Livre des Donnez, par le sieur Henrion. Roüen et Paris. 2 vol. in-12.

1685. Euclidis elementorum Libri XV, breviter demonstrata, opera Isaaci Barrow. Londini, in-12.

1700. Les Elemens d'Euclide, par le P. Milliet-Dechales. Paris, in-12.

1809. Les Élémens de Géométrie d'Euclide, traduits littéralement par Peyrard. 2e édition, augmentée du Ve Livre. Paris, in-8°.

1840. Euklid's Elemente fünfzehn Bücher, übersetzt von Lorenz, nebst einem Anhang von Dippe. Halle, in-8°.

On pourrait encore y joindre l'Ouvrage suivant, quoique ce soit plutôt un *arrangement* qu'une traduction :

1663. Euclide rinnovato dal Sig. G.-A. Borelli. Bologna, in-12.

Vient ensuite la liste, par noms alphabétiques d'auteurs, des principaux travaux sur la Géométrie non euclidienne qui ont paru jusqu'à l'année 1880.

Nous proposons d'y ajouter les deux articles suivants :

De Tilly (*J.-M.*). — Sur les principes de la Géométrie et de la Mécanique. Bordeaux et Bruxelles, 1879. Grand in-8°.

Wagner (*H.*). — Lehrbuch der Geometrie, nach Grundsätzen Bolyai's. Hamburg, 1874. In-8°.

Enfin un troisième index fait connaître les titres des principaux Ouvrages que l'auteur a consultés.

D'après cette Notice, où nous avons dû omettre bien des détails intéressants, le lecteur pourra déjà juger de l'importance de cette nouvelle édition du plus ancien des Traités de Géométrie. Le savant professeur de Kief, par son excellente traduction et par ses *Addi-*

tions, qui s'harmonisent si bien avec le texte, en a fait l'Ouvrage classique le plus neuf et le plus complet que nous possédions sur la Géométrie élémentaire. En attendant que les langues slaves aient pris dans notre enseignement une importance correspondante au rôle scientifique actuel des nations qui les parlent, nous appelons de tous nos vœux une traduction de ce beau Livre dans un idiome plus répandu chez nous.

Un travail aussi utile ne pouvant manquer d'avoir plusieurs éditions, nous nous permettrons d'indiquer en passant quelques améliorations typographiques dont il nous paraît susceptible.

Bien que l'usage des *titres courants* ne paraisse pas répandu dans l'imprimerie russe, nous croyons que l'on ferait une très utile innovation en l'appliquant à la prochaine édition des *Начала Евклида*, où l'indication du numéro du Livre en tête de chaque page faciliterait considérablement les recherches.

Nous désirerions aussi que l'énoncé de chaque proposition fût indiqué plus distinctement par quelque modification du type, par exemple en imprimant le mot *Предложение* en caractères gras.

Peut-être enfin serait-il bon de placer, en partie du moins, les notes au bas des pages, ce qui les mettrait plus en évidence, en empêchant de les confondre avec le texte.

Abstraction faite de ces *desiderata*, l'impression du Livre est d'une remarquable exécution et fait honneur aux presses de l'Université de Saint-Vladimir. Le texte nous a paru d'une grande correction, et les nombreuses figures qu'il contient sont gravées avec le plus grand soin.

J. H.

RICCARDI (Prof. PIETRO). — NOTIZIE DELLA VITA DEL CONTE PIETRO ABBATI MARESCOTTI (¹). Modena, Società tipografica, 1879. — Gr. in-8°, 15 pages.

D'après la charmante coutume établie en Italie, d'offrir aux nouveaux époux, comme présent de noces, un travail littéraire, l'auteur donne ici une courte Notice biographique d'un homme ayant appar-

---

(¹) Écrit à l'occasion du mariage de l'ingénieur comte Cesare Abbati Marescotti avec Mlle Adèle d'Allay-Marinelli.

tenu à la famille du marié. Né à Modène en 1768, le comte Pietro Abbati Marescotti étudia les Mathématiques sous la direction de Venturi, et, dans la suite, il se consacra tout entier à cette science. En 1826, il remplaça l'habile analyste Ferroni comme membre de la Société Italienne. Il occupa dans son pays natal, le duché de Modène, de hautes fonctions publiques, et mourut en 1842. Les travaux scientifiques de Marescotti sont encore peu connus du public; aussi devons-nous savoir gré à M. Riccardi de la Notice littéraire qu'il a jointe à son travail biographique. Ces travaux ne sont pas nombreux, mais ils sont loin d'être insignifiants. Dans une Lettre imprimée, adressée à son ami intime Ruffini, il communique une démonstration originale du fait, reconnu pour la première fois par Ruffini, que les racines d'une équation littérale du $m^{\text{ième}}$ degré ($m \geqq 5$) ne peuvent pas être exprimées au moyen d'irrationnelles algébriques. Trois autres Mémoires, dus à la plume de Marescotti, traitent encore de la théorie des équations, tandis que dans un quatrième Mémoire se trouve une solution nouvelle d'un problème de probabilités déjà résolu par Daniel Bernoulli et par Lagrange. L'histoire de l'Analyse ne pourra se dispenser de prendre note des résultats signalés ici par M. Riccardi. S. G.

MÉLANGES.

THÉORÈME DE STAUDT ET CLAUSEN;

PAR M. E. CATALAN.

I. — LEMMES PRÉLIMINAIRES.

I. *Si n est un nombre non premier, supérieur à 4, on a*

$$1.2.3\ldots(n-2) = \mathfrak{M}\, n.$$

Soit $n = abc\ldots$, les facteurs a, b, c, ... étant *premiers entre eux, deux à deux*. Chacun de ces facteurs ne surpasse pas $\frac{n}{2}$; donc il se rencontre dans la suite $2, 3, \ldots, (n-2)$. Par conséquent, le produit $1.2.3\ldots(n-2)$ est divisible par $abc\ldots$.

II. *Si n est un nombre premier,*

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)}{1.2\ldots(k-1)} = \mathfrak{M}\,n \mp k,$$

selon que k est pair ou impair.

Si k est *pair*,

$$(n-2)(n-3)\ldots(n-k) + 1.2.3\ldots(k-1)k = \mathfrak{M}\,n.$$

Chacune des parties du premier membre est divisible par $2.3\ldots(k-1)$. De plus, *ce produit est premier avec n*. Donc

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)}{1.2\ldots(k-1)} + k = \mathfrak{M}\,n.$$

Même démonstration si k est *impair*.

III. *n étant un nombre premier, impair, et p étant un nombre entier moindre que n — 1, on a*

$$S_{p,n-1} = 1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p = \mathfrak{M}\,n \quad (^1).$$

IV. *Si n est un nombre premier, impair, on a*

$$S_{n-1,\,n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} = \mathfrak{M}\,n - 1.$$

D'après le théorème de Fermat, chacune des puissances $n-1$ est un multiple de n, augmenté de l'unité; donc

$$S_{n-1,\,n-1} = \mathfrak{M}\,n + (n-1) = \mathfrak{M}\,n - 1.$$

V. (Corollaire des lemmes III et IV.) *n étant un nombre premier, impair, la somme $S_{p,n-1}$ est un multiple de n, diminué de l'unité, ou un multiple de n, selon que n — 1 divise ou ne divise pas l'exposant p.*

VI. *Les nombres de Bernoulli sont donnés par chacune des*

---

(1) Ce curieux théorème, presque évident, a été démontré par M. Lionnet (*Nouvelles Annales de Mat*[illegible] J'ignore à qui on le doit.

deux formules :

$$\text{(A)}\quad B_q=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Delta(1^q)+\frac{1}{4}\Delta^2(1^q)-\ldots\pm\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q)\mp\ldots-\frac{1}{q+2}\Delta^q(1^q),$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} B_q=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\varphi(1,q)+\frac{1.2}{4}\varphi(2,q)-\ldots \\ \quad\pm\frac{1.2.3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2,q)\mp\ldots \\ \quad-\frac{1.2\ldots q}{q+2}\varphi(q,q), \end{cases}$$

dans lesquelles q est impair (¹).

II. — Théorème de Staudt et Clausen.

Soient $n, n', n'', \ldots$ les nombres premiers, impairs, tels que $n-1, n'-1, n''-1, \ldots$ divisent $q+1$. Le $q^{\text{ième}}$ Nombre de Bernoulli, B_q, est donné par la formule

$$\text{(C)}\qquad -B_q=E_q+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}+\ldots,$$

dans laquelle E_q est un entier, positif ou négatif.

Démonstration. — Il s'agit d'examiner quelles sont, dans la formule (A), les *fractions réductibles à des nombres entiers.*

1°
$$\frac{1}{4}\Delta^2(1^q)=\frac{1}{4}(3^q-2.2^q+1^q).$$

q étant *impair*, $3^q=\mathfrak{M}4-1$. Donc la quantité entre parenthèses est un multiple de 4; et, en conséquence,

$$\frac{1}{4}\Delta^2(1^q)=\textit{entier}.$$

(¹) *Sur les différences de 1^p. et sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (*Mélanges mathématiques; Annali di Matematica*, 1859). Dans cette Note, les *nombres entiers* $\varphi(1,q)$, $\varphi(2,q)$, ... sont désignés par B_q, C_q, ...

2° *Si n est un nombre composé, supérieur à 4,*

$$\frac{1.2.3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2, q) = \textit{entier};$$

d'après le lemme I.

3° *Soit n premier, impair.*

On a

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} \Delta^{n-2}(1^q) = (n-1)^q - \dfrac{n-2}{1}(n-2)^q \\ \qquad + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2}(n-3)^q - \ldots + \dfrac{n-2}{1}2^q - 1. \end{cases}$$

Par le lemme II, le second membre égale

$$\mathfrak{M}n + (n-1)^q + 2(n-2)^q + 3(n-3)^q + \ldots - 2.2^q - 1,$$

ou

$$\mathfrak{M}n - [(n-1)^{q+1} + (n-2)^{q+1} + \ldots + 2^{q+1} + 1^{q+1}].$$

Ainsi

$$(\mathrm{E})\qquad \Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}n - \mathrm{S}_{q+1,\, n-1}.$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

Si $n-1$ ne divise pas $q+1$, le second membre est un multiple de n, puis

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \textit{entier}.$$

Si, au contraire, $n-1$ *divise* $q+1$, l'égalité (E) devient

$$\Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}n - (\mathfrak{M}n - 1)$$

ou

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \text{entier} + \frac{1}{n}.$$

En résumé,

$$\mathrm{B}_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} - \frac{1}{n'''} - \ldots \pm \textit{entier},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(\mathrm{F})\qquad -\mathrm{B}_q = \mathrm{E}_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots$$

III. — Remarques.

1. Soit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}+\frac{1}{n'''}+\ldots=\frac{N}{2.3.n'n''n'''}.$$

Cette fraction est *irréductible*. Donc la forme la *plus simple* des nombres de Bernoulli est

(G) $$B_q=\pm\frac{N_q}{2.3.n'n''n'''\ldots}.$$

2. *Tous les dénominateurs sont divisibles par* 6.

3. *Si* $n'=5$, $q=\mathfrak{M}4-1$: B_3, B_7, B_{11}, ... *contiennent, en dénominateur, le facteur* 5.

De même, B_5, B_{11}, B_{17}, ... *contiennent, en dénominateur, le facteur* 7; etc.

4. *Si* 4 *divise* $q+1$, *et que les nombres* $2n'-1$, $2n''-1$, ... *soient composés*, B_q *et* B_{2q+1} *ont même partie fractionnaire*.

Par exemple,

$$-B_{15}=+6+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17},$$

$$-B_{31}=15116315766+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17};$$

donc

$$B_{15}-B_{31}=15116315760.$$

5. On sait que

(H) $$B_q=\pm\frac{P_q}{2(2^{q+1}-1)},$$

P_q étant un nombre *impair* (¹).

(¹) *Mélanges mathématiques*, p. 131.

La comparaison des égalités (G), (H) donne

$$N_q = P_q : \frac{2^{q+1}-1}{3.n'n''\ldots}.$$

Ainsi, *au moyen des nombres* P_q [dont le calcul n'exige que des additions et des multiplications ([1])], on peut déterminer le numérateur N_q. D'ailleurs, N_q est un diviseur de P_q.

6. Généralisation du lemme II :

$$C_{p+q.q} \pm C_{n-p-1.q} = \mathfrak{M}\, n \quad (- \text{ si } q \text{ est } pair).$$

Par exemple,

$$\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} - \frac{21.20.19.18}{1.2.3.4} = \mathfrak{M}\, 29.$$

([1]) A l'endroit cité, on trouve une formule qui revient à

$$P_q = [illegible] \Big[P_{q-2} + \frac{(q-1)(q-2)}{3.4} P_2 P_{q-4} + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{3.4.5.6} P_4 P_{q-6} + \ldots + \frac{(q-1)(q-2)}{3.4} P_{q-4} P_2 + P_{q-2} \Big].$$

[illegible] de P [illegible], P [illegible], elle donne, successivement :

P [illegible], P [illegible], $P_9 = 155$, $P_{11} = 2073$,
P_{13} [illegible], P_{15} [illegible], $P_{17} = 28820619$, ...

Par suite :

N [illegible], N [illegible], $N_5 = 1$, $N_7 = 1$, $N_9 = 5$,
N_{11} [illegible], N_{13} [illegible], $N_{15} = 3617$, $N_{17} = 43867$, ...

puis

B [illegible], B [illegible], $B_5 = \frac{1}{42}$, $B_7 = -\frac{1}{30}$,
B [illegible], B_{11} [illegible], B_{13} [illegible], $B_{15} = -\frac{3617}{510}$, $B_{17} = \frac{43867}{798}$, ...

[illegible] est plus simple que celui qui consiste à déterminer, [illegible] K_q.

ESSAI HISTORIQUE
SUR LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE
D'UNE SEULE VARIABLE
PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. ARNOLD SACHSE.

(SUITE.)

III.

Dans son Mémoire, Riemann a réalisé un progrès considérable et il a ouvert la voie à de nouvelles recherches sur un sujet qui paraissait épuisé, en abandonnant la marche de Dirichlet et en se proposant la question suivante : Quelles sont les propriétés que doit avoir la fonction pour qu'il existe une série trigonométrique qui, partout où elle converge, converge vers la valeur de la fonction?

Dans la solution de ce problème, Riemann ne s'est pas occupé de savoir si la série représente la fonction. De cette manière, il pouvait reprendre la question des conditions nécessaires et suffisantes, ou, plus brièvement, « des conditions nécessaires ». Et, en fait, il a réussi à trouver les conditions nécessaires *pour qu'il y ait une série trigonométrique qui, partout où elle converge, converge vers la fonction.* Mais toutes les fois qu'il est revenu dans la voie de Dirichlet, il a dû, de nouveau, avoir recours aux conditions simplement suffisantes. C'est en ce sens que l'on doit entendre la remarque de Riemann (*loc. cit.*, art. 7) « que l'on doit d'abord rechercher les conditions nécessaires pour que la représentation soit possible, et en déduire ensuite les conditions suffisantes pour cette représentation. » Cette affirmation ne paraît pas tout à fait correcte, si on la prend dans un autre sens; car les conditions suffisantes doivent toujours comprendre toutes les conditions nécessaires, de même qu'inversement les classes de fonctions qui satisfont aux conditions nécessaires doivent comprendre toutes les fonctions qui satisfont seulement aux conditions suffisantes.

Le Mémoire de Riemann se compose de trois Parties. La première est l'historique, auquel nous avons déjà fait de nombreux

emprunts. La seconde Partie comprend cette revision des propositions fondamentales de l'Analyse, dont Dirichlet avait déjà reconnu la nécessité et qu'il se proposait d'entreprendre. Avant de poursuivre ses études sur ce sujet, Riemann définit d'une manière précise l'intégrale définie, et il recherche dans quel cas une fonction a une intégrale. Ces recherches sont universellement acceptées et nous pouvons par conséquent nous dispenser de les soumettre à un examen détaillé. A la vérité, M. P. du Bois-Reymond reprend dans ses écrits sur les intégrales de Fourier le point de départ de Cauchy relativement à l'intégrale définie, et il rejette celui de Riemann à cause de son indétermination. Par suite, plusieurs de ses résultats sont écrits d'une manière différente de celle qui est généralement acceptée (¹). Les recherches de Riemann sur les conditions d'intégrabilité des fonctions discontinues dans tout intervalle ont conduit à cette conclusion qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée. Les travaux de M. Weierstrass ont montré qu'il y a des classes très étendues de fonctions continues n'admettant pas de dérivée. Mais les fonctions continues sans dérivée n'appartiennent nullement, comme le pense M. Schläfli dans le travail déjà cité, à la classe de celles qui échappent entièrement aux méthodes précédemment indiquées. Ni la démonstration de Dirichlet, ni la condition d'intégrabilité de Riemann ne supposent l'existence de la dérivée.

Dans la troisième Partie de son Mémoire, qui traite de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique sans aucune hypothèse préliminaire sur la nature de la fonction, Riemann adopte la marche suivante.

Désignons par Ω une série trigonométrique

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_k + \ldots,$$

où

$$A_0 = \frac{b_0}{2}, \quad A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

et nommons $f(x)$ sa valeur à toutes les places où elle converge.

(¹) Voir *Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 70 et suivantes : *Ueber die 14 Werthe eines Doppelintegrals*, et *Math. Annalen*, t. VII : *Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen*, en particulier p. 257 et suivantes.

Nous supposerons d'abord que le terme A_k devienne infiniment petit quand k croît indéfiniment, pour toute valeur de x. Riemann prouve alors que la série déduite de Ω par une intégration répétée deux fois

$$F(x) = C + C'x + A_0\frac{x^2}{2} - \frac{A_1}{1} - \ldots - \frac{A_k}{k^2} - \ldots$$

est convergente pour toute valeur de x, toujours continue et toujours susceptible d'intégration. De plus, il fait voir 1° que, toutes les fois que la série est convergente, l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x-\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converge vers $f(x)$ lorsque α et β deviennent infiniment petits, pourvu que leur rapport demeure fini; 2° que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx$$

devient infiniment petite quand μ croît indéfiniment, si b et c sont des limites finies, d'ailleurs arbitraires, si $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ sont nulles aux limites de l'intégrale et toujours continues entre ces limites, et enfin si $\lambda''(x)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima.

Ces deux propositions nous montrent que, si une fonction périodique $f(x)$ ayant pour période 2π peut être représentée par une série trigonométrique, de telle manière que la série, toutes les fois qu'elle sera convergente, soit égale à la fonction, il faudra 1° qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers $f(x)$.

2° Il faudra, de plus, que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx,$$

où $\lambda(x)$ satisfait aux conditions déjà énoncées, devienne infiniment petite lorsque μ augmente indéfiniment.

Il y a maintenant à rechercher si ses conditions sont suffisantes et à faire voir que, lorsqu'elles sont remplies, il existe une série trigonométrique dans laquelle les coefficients deviennent infiniment petits, et qui est égale à la fonction toutes les fois qu'elle est convergente.

Pour cela Riemann considère la fonction

$$\Phi(x) = F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2},$$

et il détermine A_0, C' de telle manière que $\Phi(x)$ ait 2π pour période; puis il développe cette fonction par la méthode de Fourier,

$$F(x) - C'x - A_0 \frac{x^2}{2} = C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} \cdots - \frac{A_k}{k^2} - \cdots.$$

On a pour A_n la valeur

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2} \right] \cos n(x - t)\, dt,$$

et tout se réduit à établir que A_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Riemann se contente d'indiquer que cela résulte de l'hypothèse 2°, faite sur $F(x)$; mais cette difficulté a été complètement levée par M. Weber (p. 252 des *OEuvres* de Riemann) et aussi, et de la même manière, par M. Ascoli dans un Mémoire (¹) qui est dans ses points essentiels un commentaire de l'écrit de Riemann.

Il est donc démontré que la série

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

a ses termes qui décroissent infiniment; il résulte d'ailleurs de l'hypothèse 1° que, partout où elle converge, elle est égale à $f(x)$.

Riemann établit ensuite (art. 9, III) le théorème très important, que la convergence de la série pour une valeur déterminée ne dépend que de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de cette valeur.

(¹) *Annali di Matematica*, série II, t. VI, déc. 1873, p. 21 et 298, *Sulla serie di Fourier*.

On le voit, le Mémoire de Riemann se maintient jusqu'ici dans les généralités. Si nous voulons maintenant reconnaître sous quelles conditions une fonction peut être représentée par une série trigonométrique, nous devrons renoncer à trouver les conditions nécessaires. Riemann considère des cas particuliers dans lesquels les deux conditions générales qu'il a données sont remplies, et alors il reste à rechercher d'après la méthode de Dirichlet pour quelles valeurs de x la série trigonométrique converge effectivement. Riemann montre que ses deux conditions générales sont remplies, quand la fonction (1) ne devient pas infinie, (2) est intégrable, (3) n'a pas un nombre infini de maxima et de minima. Dans ce cas, les coefficients A_n sont ceux de la série de Fourier et cette série, toutes les fois qu'elle est convergente, est égale à la fonction. D'ailleurs la série sera convergente pour toutes les valeurs dans le voisinage desquelles il n'y a pas un nombre infini de discontinuités. Si ces valeurs sont en nombre limité, nous pourrons dire, d'après notre définition, que la série représente la fonction. Si, au contraire, elles sont en nombre illimité, il ne pourra plus être question d'une représentation de la fonction, quoique la série de Fourier puisse encore converger pour une infinité de valeurs de x.

Jusqu'ici Riemann avait laissé de côté le cas où la fonction devient infinie : supposons que la fonction devienne infinie pour la valeur a, mais sans maxima ni minima. Riemann indique dans ce cas, comme conditions de la représentation, d'abord que

$$f(a+t)+f(a-t)$$

puisse être intégrée jusqu'à zéro, et ensuite que $tf(a+t)$, $tf(a-t)$ deviennent infiniment petits avec t. Mais on reconnaîtra aisément qu'il n'a pas voulu traiter cette question de la manière la plus précise. C'est ainsi qu'à la condition que la fonction $F'(x)$ puisse être intégrée jusqu'à la valeur a, pour laquelle elle devient infinie, il substitue la condition que $(x-a)F'(x)$ soit infiniment petit avec $(x-a)$, ce qui n'est pas permis en général tant que la fonction $F'(x)$ ne devient pas infinie comme une puissance de $x-a$. Il n'a donc examiné que le cas le plus simple où l'intégrale de Dirichlet converge d'une manière absolue. Du reste, il est possible de montrer par des exemples qu'il n'y a aucun moyen de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une

intégrale, qui soient différentes de la définition générale de cette condition.

Riemann a démontré que les coefficients de Fourier deviennent infiniment petits à mesure que leur indice croît, toutes les fois que la fonction demeure finie et qu'elle est susceptible d'intégration. Il est donc à désirer que l'on puisse apprécier l'ordre de grandeur des coefficients et indiquer comment il dépend de leur rang. Si l'on suppose seulement que la fonction soit susceptible d'intégration, cela n'est pas possible, comme le montre la démonstration de Riemann. Mais en faisant des hypothèses plus restrictives on peut arriver au résultat. Nous ferons connaitre ici les théorèmes que M. Heine a donnés (*Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 59). Désignons respectivement par A_n et B_n les coefficients de Fourier,

$$\int_0^h f(\beta)\sin n\beta\, d\beta,\quad \int_0^h f(\beta)\cos n\beta\, d\beta.$$

Si la fonction $f(\beta)$ demeure finie et que pour toutes les valeurs de l'argument elle soit plus petite que γ, si en outre il y a entre o et h seulement un nombre fini de maxima et de minima et de solutions de continuité, alors nA_n, nB_n demeurent inférieurs à $G\gamma$, G désignant une constante indépendante de n. Mais si $f(\beta)$ devient infinie pour $\beta = 0$ de telle manière que (ν étant inférieur à 1) le produit $\beta^\nu f(\beta)$ demeure fini quand β tend vers zéro, alors les expressions

$$n^{1-\nu}A_n - \frac{\pi H}{2\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi},\quad n^{1-\nu}B_n - \frac{\pi H}{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}$$

où H désigne la valeur de $\beta^\nu f(\beta)$ pour $\beta = +0$, deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$. Les produits $n^{1-\nu}A_n$, $n^{1-\nu}B_n$ demeureront donc finis quand n croîtra indéfiniment.

On peut encore obtenir une évaluation si $f(\beta)$, tout en satisfaisant d'ailleurs aux autres conditions indiquées, acquiert pour la valeur o un nombre infini de maxima et de minima, mais de telle manière que la condition de M. Lipschitz soit satisfaite. Séparons dans $A_n = \int_0^h f(\beta)\sin n\beta\, d\beta$ les deux intégrales partielles

$\int_0^{\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}$. Le reste peut être rendu plus petit que $\frac{K}{n}$, où K désigne une constante indépendante de n. Les deux intégrales partielles donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right)\right] \sin n\beta\, d\beta;$$

mais, d'après la condition de M. Lipschitz, on doit avoir en valeur absolue

$$f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < B\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}$$

ou encore

$$f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < \frac{B}{\left(\log \frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}},$$

α étant plus petit que zéro, et l'intégrale, d'après cela, devient plus petite que

$$B\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{B'}{n(\log n)^{1+\alpha}},$$

B' désignant une autre constante.

S'il y a dans l'intervalle plusieurs points pour lesquels la fonction devient infinie ou acquiert une infinité de maxima et de minima, on peut encore obtenir une évaluation en partageant l'intervalle en intervalles partiels dont les limites sont précisément ces points singuliers.

Riemann a montré, nous l'avons vu, que la convergence de la série de Fourier en un point déterminé dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ce point; mais il a déduit cette proposition de ses théorèmes généraux. Dans le cas où la fonction est intégrable, il sera utile de donner de ce théorème une démonstration particulière, en partant directement de l'intégrale de Dirichlet à laquelle ramène d'ailleurs la méthode suivie par Riemann. M. Schwarz a donné dans ses leçons une formule d'évaluation pour l'intégrale

$$\int_g^h \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} f(\beta)\, d\beta, \quad 0 < g \leqq h \leqq \frac{\pi}{2},$$

qui conduit immédiatement au but et qui sera encore employée plus loin.

Pour évaluer l'intégrale

$$S = \int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}, \quad 0 < g \leqq h \leqq \frac{\pi}{2},$$

divisons l'intervalle (g, h) en intervalles partiels

$$\left(g, \frac{m\pi}{k}\right), \quad \left(\frac{m\pi}{k}, \frac{(m+1)\pi}{k}\right), \quad \dots, \quad \left(\frac{m'\pi}{k}, h\right)$$

où l'on a

$$\frac{(m-1)\pi}{k} \leqq g \leqq \frac{m\pi}{k}, \quad \frac{m'\pi}{k} \leqq h \leqq \frac{(m'+1)\pi}{k}.$$

Posons dans le premier intervalle

$$f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_1(\beta),$$

dans le second

$$f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_2(\beta),$$

dans le troisième

$$f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_3(\beta),$$

dans le quatrième

$$f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_4(\beta),$$

et ainsi de suite, et partageons S en deux parties S′ et S″, dont la première se rapporte aux fonctions f, la seconde aux fonctions ψ. On a maintenant

$$S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right]$$
$$+ f\left((m+2)\frac{\pi}{k}\right)\left[\int_{\frac{(m+1)\pi}{k}}^{\frac{(m+2)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{(m+2)\pi}{k}}^{\frac{(m+3)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right]$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Posons avec Dirichlet

$$(-1)^{\nu-1}\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \rho_\nu;$$

si l'on remarque que l'on a

$$\int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\, d\beta = (-1)^{m-1}\frac{2}{\sin g},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_{g}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\, d\beta\right] \\ + (-1)^{m-1}\left\{ f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left(\frac{2}{k\sin g} - \rho_{m+1}\right)\right. \\ \left. + f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)(\rho_{m+2} - \rho_{m+3}) + \ldots\right\}; \end{aligned}$$

mais on a

$$\int_{g}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\, d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\, d\beta < \frac{2}{k\sin g}.$$

La seconde partie de S', si l'on désigne par c la plus grande des valeurs de f et si l'on remarque que l'on a $\rho_n < \rho_{n+1}$, est plus petite que

$$c\left[\frac{2}{k\sin g} - (\rho_{m+1} - \rho_{m+2}) - (\rho_{m+3} - \rho_{m+4}) - \ldots\right]$$

et, par suite, on a

$$S' < \frac{4c}{k\sin g},$$

et comme on a

$$\frac{1}{\sin g} > \frac{\pi}{2}\frac{1}{g},$$

puisque g est plus petit que $\frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$S' < \frac{2c\pi}{kg}.$$

Il reste encore la seconde partie, S'', de S. Si l'on désigne par $\sigma_i(\beta)$ la valeur absolue de la plus grande oscillation de $f(\beta)$

dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle, elle n'est jamais plus petite que la valeur absolue de la fonction correspondante $\psi_q(\beta)$. On a donc

$$S'' < \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\sin\beta} d\beta < \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta,$$

où l'on suppose que $\sigma(\beta) = \sigma_q(\beta)$ dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle. On a donc pour S l'évaluation

$$S = \int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta < \frac{2c\pi}{kg} + \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta.$$

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale $\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut si l'on prend une valeur suffisamment grande de k, pourvu que la fonction $f(\beta)$ soit intégrable et demeure finie.

En effet, on a

$$\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta < \frac{1}{g}\int_g^h \sigma(\beta) d\beta.$$

$\int_g^h \sigma(\beta) d\beta$ est certainement plus petit que $\Sigma\sigma_q(\beta)\Delta_q\beta$, en désignant par $\Delta_q\beta$ la grandeur du $q^{\text{ième}}$ intervalle, la somme s'étendant d'ailleurs à tous les intervalles; mais cette somme, d'après la notion même de l'intégrale définie, doit pouvoir être rendue aussi petite que l'on veut par la réduction des grandeurs des intervalles.

Pour démontrer maintenant le théorème de Riemann, partageons l'intégrale de Dirichlet $\int^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta$ dans les deux parties $\int_0^g + \int_g^h$ où g sera très petit. Supposons d'abord que $f(\beta)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima; si l'on applique maintenant à l'intégrale $\int_g^h$ la formule d'évaluation précédente, on pourra prendre k assez grand pour que $\frac{2c\pi}{kg}$, aussi bien que $\frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta} d\beta$, soient aussi petits qu'on le voudra.

On peut donc de cette manière s'approcher autant qu'on le voudra de la valeur considérée, puisque la partie de l'intégrale relative à l'intervalle (g, h) ajoute à la valeur de l'intégrale une quantité qui peut être diminuée indéfiniment par une augmentation convenable du nombre k. Il est ainsi démontré que la convergence de la série de Fourier pour une valeur déterminée dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de cette valeur. On peut alors, au moyen de théorèmes très simples de valeurs moyennes, montrer que la valeur de la série, pour tous les points où la fonction est continue et même pour les points de discontinuité simple, est égale à la fonction. Mais nous allons en outre établir que cela a encore lieu si la fonction a, pour la valeur o de β, une infinité de maxima et de minima, pourvu qu'elle satisfasse à la condition de M. Lipschitz.

Il faut dans ce but calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$. Posons $f(\beta) = f(0) + \varphi(\beta)$, et partageons l'intégrale dans les suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(0)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta + \left(\int_0^g + \int_g^{\frac{\pi}{2}}\right)\varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta.$$

La première intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}f(0)$. Comme $f(\beta)$ satisfait à la condition de M. Lipschitz, on peut poser

$$\varphi(\beta) = f(\beta) - f(0) < B\beta^\alpha \quad \text{où l'on a} \quad \alpha > 0.$$

La deuxième intégrale J est donc plus petite que $B\int_0^g \beta^\alpha \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$, et, comme on a $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\beta}{\beta} \leqq 1$, on en déduit

$$J < B\frac{\pi}{2}\int_0^g \beta^{\alpha-1}d\beta < B\frac{\pi}{2}\frac{g^\alpha}{\alpha}.$$

La troisième partie est, d'après la formule d'évaluation déjà donnée, plus petite que

$$\frac{2c\pi}{gk} + \int_g^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(\beta)}{\beta}d\beta.$$

On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f(0) + \mathrm{K},$$

où

$$\mathrm{K} < \mathrm{B}\frac{\pi}{2}\frac{g^{\alpha}}{\alpha} + \frac{2c\pi}{gk} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Mais on peut prendre g aussi petit qu'on le veut, puis choisir k assez grand pour que la quantité K devienne aussi petite qu'on le veut, et l'on obtient, par conséquent,

$$\lim_{k=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f(0),$$

ce qui démontre la proposition.

Riemann recherche encore, dans l'article 11 de son Mémoire, si une série trigonométrique, dont les termes A_x ne deviennent pas infiniment petits pour chaque valeur de x, est propre à la représentation d'une fonction. Il montre que, s'il s'agit de fonctions n'ayant pas une infinité de maxima et de minima, la série ne peut être égale à la fonction que pour un nombre limité de valeurs de la variable et, par conséquent, est impropre à représenter la fonction (*Œuvres*, p. 242, 245).

Pour ce qui concerne les fonctions ayant une infinité de maxima et de minima, Riemann ne donne aucune règle générale, mais il établit par des exemples (¹) les deux théorèmes suivants :

I. *Il existe des fonctions ayant une infinité de maxima et de minima, susceptibles d'intégration et qui cependant ne peuvent être représentées par la série de Fourier.*

II. *Il y a des fonctions ayant un nombre fini de maxima et de minima, n'étant pas susceptibles d'intégration, et qui cependant peuvent être représentées par la série de Fourier.*

(¹) Ces exemples ont été soumis à une revision attentive par M. Genocchi : *Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino*, vol. X, 1875, *Intorno ad alcune serie*.

IV.

Le Mémoire de Riemann forme la conclusion naturelle des recherches entreprises uniquement sur la question de la représentation par une série trigonométrique. Les méthodes variées qu'il a appliquées aux séries trigonométriques ont permis aux géomètres d'aborder avec succès l'étude de questions nouvelles, dont nous allons maintenant nous occuper.

Cauchy, dans une Note, avait énoncé le théorème que l'intégrale d'une série est égale à la somme des intégrales de tous ses termes. Cette proposition avait été acceptée sans restriction, et c'est sur elle que reposent toutes les recherches que nous avons analysées jusqu'ici. M. Weierstrass montra que l'on ne peut démontrer le théorème que si la série est uniformément convergente dans l'intervalle de l'intégration, et il entendait par là que, pour toutes les valeurs de la variable, le reste de la série, toujours compté à partir du même terme, peut être rendu plus petit que toute quantité donnée. Cette remarque a trouvé une première application dans le Mémoire de M. Heine sur les séries trigonométriques ([1]). M. Heine y cite un Mémoire de M. Thomé dans lequel l'idée de convergence uniforme est considérée comme tout à fait connue ([2]). Cependant cette notion de la convergence uniforme était déjà contenue dans un Mémoire de M. Seidel publié en 1848 ([3]), et elle semble avoir été pendant longtemps négligée. Cauchy ([4]) avait affirmé qu'une série convergente, dont tous les termes sont des fonctions continues de l'argument, représente toujours une fonction continue. Abel remarqua à ce sujet ([5]) qu'il lui semblait que ce théorème souffre des exceptions, et il cita comme exemple la série

$$\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots,$$

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LXXI, 1870.

([2]) *Ibid.*, t. LXVI, p. 334; 1866.

([3]) *Abh. der Bayerischen Akad.*, 1847-49 : *Note über eine Eigenschaft von Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.*

([4]) *Analyse algébrique*, p. 131.

([5]) *Journal de Crelle*, t. I, p. 316.

qui, malgré la continuité de ses termes, est discontinue pour $\varphi = (2m+1)\pi$. Pour éclaircir ce point, M. Seidel démontre le théorème suivant : *Si une série convergente dont les termes sont des fonctions continues de l'argument est une fonction discontinue, il y a dans le voisinage d'un point de discontinuité des points pour lesquels la série converge aussi lentement qu'on le veut*. Il distingue deux cas : le premier, lorsque la fonction montre ce que nous appelons aujourd'hui *la convergence uniforme;* alors le théorème de Cauchy est exact; le second, quand la convergence n'est pas uniforme; alors son théorème a lieu. M. Heine démontre aussi qu'une fonction discontinue ne peut jamais être représentée par une série uniformément convergente; mais il introduit d'abord la notion d'une série *uniformément convergente en général,* où il faut entendre, par cette expression *en général,* que l'on doit renoncer à la convergence uniforme dans le voisinage de tous les points de discontinuité. M. du Bois-Reymond ([1]) montre que la convergence uniforme ne cesse pas seulement aux points de discontinuité, ce que M. Seidel avait déjà présumé (*loc. cit.*, p. 393) ([2]).

Il n'est donc pas évident *a priori* qu'une série trigonométrique, qui représente une fonction continue, présente la convergence uniforme.

Par suite de la remarque de M. Weierstrass, il était devenu clair que le procédé employé par Fourier pour la détermination des coefficients par des intégrales définies ne pouvait pas être appliqué sans examen, puisqu'il repose sur la supposition que l'intégrale d'une série convergente est égale à la somme des intégrales de ses différents termes. La méthode suivie par Fourier avait porté les géomètres à conclure que l'on obtient toujours le même développement pour une fonction, quelle que soit la manière dont on opère. Sur ce théorème de l'existence d'un seul développement pour une même fonction, reposaient non-seulement les applications à la Physique, mais aussi plusieurs recherches mathématiques impor-

---

([1]) *Abhandl. der Bay. Akad.*, t. XII, p. 119.

([2]) Pour compléter cet historique, il reste à signaler une Note de Cauchy (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVI, p. 456-458; 1853), où l'illustre géomètre revient sur le théorème qu'il avait donné dans son *Analyse algébrique*, et établit au fond la notion de la convergence uniforme. G. D.

tantes, par exemple la représentation que Jacobi a donnée des racines d'une équation par des intégrales définies. Ce théorème fut donc remis en question. Une démonstration nouvelle en a été entreprise par M. Heine dans le Mémoire cité, et achevée par MM. G. Cantor et P. du Bois-Reymond.

M. Heine remarque qu'il est établi par les travaux de Dirichlet, de Riemann et de Lipschitz, qu'une fonction de x peut être développée sous certaines conditions en une série trigonométrique, mais que l'on ne peut savoir de combien de manières cette représentation peut avoir lieu.

On pourrait peut-être se proposer de démontrer qu'une série trigonométrique, qui représente une fonction continue, converge d'une manière uniforme; mais, comme il n'est pas établi généralement qu'il existe une série jouissant de cette propriété, M. Heine se contente d'abord de démontrer (*lot. cit.*, §§ 7, 9) que la série de Fourier possède la convergence uniforme lorsqu'elle représente une fonction continue, discontinue seulement en un nombre limité de points et n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima. M. Schläfli (dans le travail cité, p. 7) a fait à ce sujet la remarque que la démonstration cesse d'être probante quand la valeur de la variable se rapproche de l'une des valeurs qui font acquérir un maximum ou un minimum. Mais on peut répondre à cette objection et montrer que la proposition subsiste dans tous les cas. M. Schwarz a donné cette démonstration dans une de ses leçons à l'Université; nous allons en faire connaître les points essentiels.

Considérons l'intégrale

$$S = \int_0^{h} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

Si la fonction $f(\beta)$ n'est jamais croissante entre les limites zéro et h, et si elle demeure constamment positive, en désignant par c sa valeur maximum dans l'intervalle, on a

$$S - \frac{\pi}{2} f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

où m désigne un nombre positif entier assujetti à l'unique condition que $2m+1$ soit inférieur à k. Cette formule a encore lieu si la fonction n'est jamais décroissante et elle est modifiée d'une ma-

nière insignifiante si $f(\beta)$ devient négative. Mais, pour plus de simplicité, nous supposerons dans ce qui va suivre que $f(\beta)$, par l'addition d'une constante convenable, ait été ramenée à être toujours positive. Il reste à examiner ce que devient la formule précédente, lorsque $f(\beta)$ a un nombre fini de maxima et de minima. Supposons, pour fixer les idées, que $f(\beta)$ croisse depuis o jusqu'à g, puis qu'elle décroisse depuis le maximum qui a lieu pour g jusqu'à un minimum ayant lieu pour $\beta = h'$, et ainsi de suite; supposons qu'il y ait en tout μ maxima ou minima entre o et h. Pour évaluer l'intégrale entre g et h', considérons la fonction $f_1(\beta)$ égale à $f(g)$ entre o et g et à $f(\beta)$ entre g et h'. On peut lui appliquer la formule précédente, et l'on a

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f_1(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f_1(0) - f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right].$$

Mais la fonction $f(\beta)$ étant continue, on sait que, étant donnée une quantité ε_1 aussi petite qu'on le veut, il existe toujours une quantité δ' telle que l'on ait, quelle que soit la valeur de β prise dans l'intervalle considéré, $f(\beta+\delta'') - f(\beta) < \varepsilon_1$, dès que l'on a $\delta'' \leqq \delta'$ en valeur absolue. Il est clair que l'on peut déterminer $\frac{2m\pi}{k}$ de manière à le rendre inférieur à δ'. Si l'on a alors $\delta' < g$, on obtiendra

$$f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right) = f_1(0) = f(g),$$

et la formule précédente deviendra

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\int_0^{g} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m},$$

il en résulte que l'on peut écrire

$$\int_g^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta < \frac{c}{m}.$$

Cette formule s'applique à tous les intervalles suivants entre un maximum et un minimum, de sorte que nous pouvons en conclure

$$S - \frac{\pi}{2}f(0) < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

et comme, d'ailleurs, on a

$$f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) < \varepsilon_1,$$

on pourra écrire

$$S - \frac{\pi}{2}f(0) < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1.$$

Mais si la valeur g, contrairement à l'hypothèse faite plus haut, est inférieure à δ' et qu'en outre h' soit supérieure à δ', l'évaluation donnée plus haut pour l'intégrale de g à h' n'a plus lieu, parce qu'ici $f_1\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ n'est plus constant et égal à $f(g)$. Voici comment on peut lever cette difficulté.

Considérons une fonction $f_1(\beta)$ qui, de o à g, soit égale à $f(\beta)$, et de g à h' à $f(g)$; et une fonction $f_2(\beta)$ qui, de o à g, soit égale à $f(g)$, et de g à h' à $f(\beta)$. Notre première formule est maintenant applicable à $f_1(\beta), f_2(\beta)$, et l'on a

$$\int_0^{h'} f_1(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left[f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right],$$

$$\int_0^{h'} f_2(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta} - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m}.$$

Par l'addition on obtient

$$\int_0^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(0)$$
$$+ \int_0^{h'} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$\int_0^{h'} f(g)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta - \frac{\pi}{2}f(g) < \frac{c}{2m},$$

on en conclut

$$\int_0^{h'} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1 + \frac{c}{m},$$

et, par suite,

$$S - \frac{\pi}{2}f(0) < \frac{c}{2m} + \frac{2}{\pi}\varepsilon_1 + \frac{c}{m} + (\mu - 1)\frac{c}{m} < (2\mu + 1)\frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_1,$$

comme précédemment.

Jusqu'ici ε_1 était arbitraire. Si on le choisit de telle manière que l'on ait $\varepsilon - \frac{\pi}{2}\varepsilon_1 > 0$, on voit que m peut toujours être choisi de telle manière que $S - \frac{\pi}{2}f(0)$ soit inférieur à ε.

Si l'on applique les considérations précédentes à chacune des deux intégrales de l'expression

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \varphi(x - 2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \varphi(x + 2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta,$$

qui est égale à la somme des n premiers termes de la série de Fourier, on établira sans difficulté que la formule précédente s'applique pour toute valeur de x, et, par conséquent, que la série précédente est absolument convergente.

S'il y avait entre o et δ' plusieurs maxima et minima, pourvu qu'ils fussent en nombre limité, il y aurait à appliquer plusieurs fois la méthode précédente, et la conclusion ne cesserait pas de subsister.

Il est ainsi démontré qu'il y a en général un développement en série qui possède la convergence uniforme. Mais il pourrait y avoir d'autres développements possédant ou ne possédant pas la convergence uniforme. Or, pour reconnaître l'identité des deux développements, il suffit de former leur différence, qui sera un développement de même nature, devant représenter zéro. Le théorème qu'il s'agit d'établir pour prouver l'existence d'un seul développement est donc le suivant : *Il n'existe pas de série trigonométrique qui converge en général* (c'est-à-dire à l'exception d'un nombre limité de valeurs particulières) *et qui représente zéro, ou, en*

d'autres termes, tous les coefficients de ce développement doivent être identiquement nuls.

M. Heine n'examine pas cette proposition dans toute sa généralité, mais il la démontre d'une manière complète, en supposant que la série qui représente zéro possède la convergence uniforme en général (c'est-à-dire à l'exception d'un nombre limité de valeurs particulières). Pour cela il montre que, si $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ est le terme général de la série, a_k et b_k doivent devenir infiniment petits avec $\frac{1}{k}$; en se servant ensuite de cette propriété et d'un théorème de Riemann, il conclut que a_k et b_k doivent être identiquement nuls.

Le résultat du travail de M. Heine est donc le suivant : Une fonction finie, discontinue en un nombre limité de points, n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima, peut être développée d'une seule manière en une série douée en général de la convergence uniforme, et ce développement est celui de Fourier.

Il reste maintenant à examiner s'il ne peut pas y avoir d'autres développements qui n'auraient pas la convergence uniforme et qui représenteraient la même fonction. M. G. Cantor s'est occupé de cette question. Il suit la même méthode que M. Heine et il démontre d'abord que, si la série $\Sigma\,(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ est convergente en général, les coefficients a_n, b_n deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$; toutefois il établit ce théorème sans rien supposer sur la nature de la convergence. Il démontre ensuite qu'une série trigonométrique $\Sigma(c_n \sin nx + d_n \cos nx)$ convergente en général et qui représente zéro, à l'exception d'un nombre fini de places, ne peut exister, c'est-à-dire que les coefficients c_n, d_n sont tous nuls (¹). M. Kronecker a remarqué (²) que le théorème préliminaire est inutile. Considérons, en effet, la différence de deux développements, convergents en général, d'une même fonction,

$$D(x) = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots = 0$$

(¹) *Journal de Borchardt*, t. LXXII, 1870 : *Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*, et *Math. Annalen*, t. IV, 1871 : *Ueber trigonometrische Reihen.*

(²) *Journal de Borchardt*, t. LXXII, 1870 : *Beweis dass eine für jeden reellen Werth*, etc.

où

$$C_0 = \frac{d_0}{2}, \quad C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx.$$

Formons la différence

$$D(x+\delta) - D(x-\delta) = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \ldots = 0.$$

On aura

$$e_n = c_n \sin n\delta + d_n \cos n\delta,$$

et, par suite, e_n devra devenir infiniment petit avec $\frac{1}{n}$ si la nouvelle série est convergente en général, ce qui a lieu en vertu des hypothèses primitives. On peut maintenant appliquer à cette fonction le procédé de MM. Heine et Cantor.

Formons la fonction de Riemann

$$F(x) = e_0 \frac{x^2}{2} - e_1 - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{9} - \ldots;$$

alors

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

devra converger vers zéro; il n'y aura d'exception que pour un nombre limité de valeurs de x. Par suite, d'après une proposition due à M. Schwarz, $F(x)$ devra être une fonction linéaire dans chaque intervalle où la limite demeure nulle, et, en outre, comme l'a montré M. Heine, elle devra être égale à la même fonction linéaire dans tous les intervalles. Ainsi l'on doit avoir

$$e_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = e_1 + \frac{e_2}{4} + \frac{e^3}{9} + \ldots.$$

Si l'on multiplie par $\cos n(x-t)$ et que l'on intègre de $-\pi$ à $+\pi$, on voit que, pour chaque valeur de n et pour une infinité de valeurs de t, $c_n \cos nt + d_n \sin nt$ doit s'annuler et, par conséquent, c_n et d_n sont eux-mêmes nuls.

Il est ainsi démontré, par cela même, qu'une fonction, continue en général, qui a seulement un nombre limité de solutions de continuité et qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, peut être développée d'une seule manière en une série trigonométrique convergente en général.

M. Cantor est parvenu, en appliquant un théorème de M. Weierstrass, à étendre la proposition précédente aux fonctions qui possèdent un nombre infini de discontinuités, pourvu toutefois que ces discontinuités soient distribuées d'une certaine manière [1]. S'il y a dans une région limitée un nombre infini de points caractérisés par une propriété déterminée, il résulte, d'un théorème que M. Weierstrass établit dans son Cours, qu'il existe dans cette région au moins une position dans le voisinage de laquelle se trouvent un nombre infini des points considérés, mais il peut y avoir plusieurs positions de ce genre, et même il peut y en avoir un nombre illimité. Appelons l'ensemble de ces positions *le premier groupe dérivé*. S'il contient un nombre infini de points on peut en déduire un second, et ainsi de suite. Si, en opérant de cette manière sur les points de discontinuité d'une fonction, on finit par arriver à un groupe composé d'un nombre limité de points, M. Cantor démontre qu'il est possible d'étendre la démonstration précédente et d'établir le théorème relatif à l'existence d'un seul développement. Cela revient à montrer que, dans les segments séparés par les points de discontinuité, $F(x)$ est toujours la même fonction linéaire de x.

Pour cela, on établit que, dans chacun des intervalles qui sont compris dans les intervalles formés par les points du premier groupe dérivé, il ne peut exister qu'un nombre limité de points de discontinuité, en sorte que la démonstration de M. Heine a lieu pour chacun de ces intervalles. On n'a qu'à répéter ce raisonnement un nombre limité de fois, puisque le dernier groupe dérivé comprend seulement un groupe fini de points pour établir que $F(x)$ est partout la même fonction linéaire.

Nous avons donc le théorème suivant : *Une fonction finie qui possède un nombre fini de discontinuités, de telle manière que l'un des groupes dérivés se compose d'un nombre limité de termes, et qui, d'ailleurs, est développable en une série trigonométrique, ne peut l'être que d'une seule manière.* Une telle fonction est intégrable si elle n'a pas un nombre infini de maxima et de minima; par suite, toutes les fois que la série de Fourier converge, elle a pour

---

(1) *Math. Ann.*, t. V, 1872 : *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.*

limite la valeur de la fonction et elle est le seul développement possible.

D'après cela, pour toutes ces fonctions, les coefficients de la série doivent être les intégrales de Fourier et d'Euler, et, si l'on démontre directement qu'il en est ainsi, on sera conduit, par une voie différente, aux mêmes résultats que MM. Heine et Cantor. De même, une démonstration qui prouverait que le développement d'une fonction de cette classe ne peut avoir comme coefficients que les intégrales de Fourier rend inutile le théorème relatif à l'existence d'un seul développement pour la fonction. Des démonstrations de ce genre ont été données par MM. Dini[1] et Ascoli[2]; mais elles s'appliquent seulement à des fonctions formant une classe moins étendue que celles dont il est question dans la démonstration de MM. Heine et Cantor, et par conséquent elles ne donnent pas une extension de la théorie.

Nous devons, au contraire, reconnaître un progrès dans les recherches de M. du Bois-Reymond[3] où se trouve démontré le théorème suivant : *De quelque manière qu'une fonction puisse être développée en une série* $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ *dont les coefficients* a_n, b_n *deviennent infiniment petits avec* $\frac{1}{n}$, *les coefficients ont toujours la forme*

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,$$

pourvu toutefois que les intégrales aient un sens.

M. du Bois-Reymond néglige d'indiquer dans l'énoncé la restriction que les coefficients a_n, b_n deviennent infiniment petits; mais il est aisé de voir qu'elle est nécessaire dans la démonstration (*loc. cit.*,

(1) *Sopra la serie di Fourier*, 1872.

(2) *Voir* le Mémoire déjà cité et *Math. Ann.*, t. VI, p. 231-240; 1873.

(3) *Abh. der Bayer. Akad.*, t. XII, p. 117-167, 1875 : *Beweis dass die Coefficienten*, etc.

p. 141). Le théorème précédent comprend celui de MM. Heine et Cantor, et, comme il entraine cette conséquence que, toutes les fois que le développement sera possible, il sera unique et sera précisément celui de Fourier, il donne aux recherches antérieures le complément qui leur faisait défaut.

Nous allons maintenant exposer les points principaux de la démonstration de M. P. du Bois-Reymond. Nous considérerons d'abord la fonction comme demeurant finie et nous allons, en premier lieu, présenter la démonstration pour les fonctions continues qui n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima, démonstration qui, d'ailleurs, ne diffère pas dans ses traits généraux de celle qui avait été donnée par MM. Dini et Ascoli.

Formons la fonction de Riemann

$$(1)\qquad F(x) = b_0\frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a_n\sin nx + b_n\cos nx}{n^2}.$$

On a nécessairement, pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x}d\alpha\int_{-\pi}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta = f(x).$$

Formons l'expression

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x}d\alpha\int_{-\pi}^{\beta}f(\beta)\,d\beta,$$

on en déduit

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Phi(x+\varepsilon)-2\Phi(x)+\Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2\Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x.$$

Donc on a

$$(2)\qquad F(x) = \int_{-\pi}^{x}d\alpha\int_{-\pi}^{\alpha}f(\beta)\,d\beta + c_0 + c_1 x.$$

Si, multipliant successivement la formule (1) par $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, 1

on intègre entre $-\pi$ et $+\pi$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = -\frac{a_n}{n^2}\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = -\frac{b_n}{n^2}\pi + (-1)^n\frac{2\pi b_0}{n_2},$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha = -\frac{\pi^3}{3}b_0.$$

Remplaçons maintenant $F(x)$ par l'expression (2), et déterminons la valeur de l'intégrale au moyen de l'intégration par parties. En remarquant que a_n, b_n et les intégrales $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$, $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$ doivent devenir nulles avec $\frac{1}{n}$, on trouve d'abord

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{\pi^2}{3} - (\pi-\alpha)^2\right]d\alpha,$$

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)(\pi-\alpha)\,d\alpha, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,$$

et, en général, pour toute valeur de n,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha.$$

On peut ensuite, en suivant la méthode de MM. Heine et Cantor, étendre cette démonstration, relative aux seules fonctions continues, à toutes les fonctions qui ont un nombre fini de maxima et de minima et un nombre infini de discontinuités, mais de telle manière qu'il existe pour les points de discontinuité un groupe dérivé composé d'un nombre limité de points.

La démonstration précédente cesse d'être applicable si la fonction est assujettie à la seule condition d'être intégrable, car on ne peut plus affirmer que $\lim \frac{\Delta^2\Phi(x)}{\varepsilon^2}$ est toujours égale à zéro.

Alors la fonction n'a pas nécessairement en chaque point une

valeur déterminée; sa valeur peut osciller entre une limite supérieure et une limite inférieure. Désignons la demi-somme des deux limites inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$, pour la valeur x, par $S(x)$, leur demi-différence par $D(x)$. On pourra évidemment donner à la fonction la forme $S(x) + jD(x)$, où j désigne un nombre réel compris entre -1 et $+1$. Si maintenant on forme, d'après la méthode donnée par Riemann, $\lim \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$, on trouve

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)D(x).$$

On a, d'autre part, à former la même limite pour

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\,d\beta,$$

et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j_1 D(x),$$

où j_1 est également compris entre -1 et $+1$. Comme on a $\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$, la plus grande valeur que puisse prendre $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ est, on le voit,

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)D(x).$$

Il n'est donc pas possible de démontrer que, pour chaque valeur de x, on a

$$\lim \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Néanmoins on peut encore établir, en se servant de la condition d'intégrabilité pour $f(x)$, que $\Phi(x)$ est une fonction linéaire de x. Partageons l'intervalle $(x, x+a)$ en intervalles partiels limités aux points $x, x+\delta_1, x+\delta_1+\delta_2, \ldots, x+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}, x+a$ et formons la somme

$$\delta_1 D(x+\rho_1\delta_1) + \delta_2 D(x+\delta_1+\rho_2\delta_2) + \ldots + \delta_n D(x+\delta_1+\ldots+\rho_n\delta_n),$$

où les quantités ρ sont des fractions positives. Cette somme, en vertu de la condition d'intégrabilité, doit s'annuler avec les δ. Il faut donc que, lorsque les δ deviendront nuls, on ait

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2}[\delta_1\Phi(x+\rho_1\delta_1)+\delta_2\Phi(x+\delta_1+\rho_2\delta_2)+\ldots \\ +\delta_n\Phi(x+\delta_1\ldots+\rho_n\delta_n)]=0,$$

ou, ce qui revient au même

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2}\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha=0.$$

Il suit de là que, d'après le théorème de M. Schwarz, on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha = c_0 + c_1 x,$$

c_0, c_1 étant des constantes. Mais on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha = \int_0^a F(x+\alpha)\,d\alpha - \int_0^a F_1(x+\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on désigne par α_1 une quantité intermédiaire entre o et a, on a

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha = a[F(x+\alpha_1)-F_1(x+\alpha_1)],$$

pour a suffisamment petit, et par conséquent

$$F(x+\alpha_1)-F_1(x+\alpha_1)=\frac{c_0}{a}+\frac{c_1}{a}x.$$

Si l'on fait tendre a vers o, le premier membre prend une valeur déterminée; il doit donc en être de même du second, et par conséquent des constantes $\frac{c}{a}$ et $\frac{c_1}{a}$. On a donc

$$F(x)-F_1(x)=c'_0+c'_1 x,$$

où c'_0, c'_1 sont des constantes, et l'on est ainsi ramené à la démonstration déjà donnée.

Si la fonction devenait infinie, il faudrait faire intervenir les conditions de Riemann.

Je pense maintenant avoir indiqué les recherches les plus essentielles sur la représentation des fonctions par les séries trigonométriques, entreprises depuis la publication du travail de Riemann, et il me reste seulement à développer l'exemple donné par M. Schwarz d'une fonction continue pour laquelle la série de Fourier n'est pas partout convergente.

V.

Partageons l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ dans les intervalles suivants devenant de plus en plus petits

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{(1)}\right], \quad \left[\frac{\pi}{(1)} \frac{\pi}{(2)}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{\pi}{(\lambda-1)}, \frac{\pi}{(\lambda)}\right], \quad \ldots,$$

où l'on a

$$(\lambda) = 1.3.5\ldots(2\lambda+1) \text{ pour } \lambda = 1, 2, 3, \ldots.$$

Considérons une fonction qui dans le $\lambda^{\text{ième}}$ intervalle serait définie par la formule $f(\beta) = c_\lambda \sin(\lambda)\beta$, où les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_\mu, \ldots$ forment une suite décroissante jusqu'à zéro. Cette fonction est évidemment continue; elle décroit lorsque β s'approche de zéro, en présentant une infinité de maxima et de minima d'amplitude décroissante et nous supposons que, pour $\beta = 0$, elle ait la valeur zéro. Pour reconnaitre maintenant si la série de Fourier, qui pour toutes les autres valeurs représente la fonction, la représente aussi pour $\beta = 0$, il faut former cette série et obtenir la limite de l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

Nous allons faire voir que cette intégrale ne converge pas. Pour cela nous attribuerons seulement à k les valeurs égales à (μ), où μ croitra indéfiniment. Partageons l'intégrale en intégrales partielles

relatives aux intervalles précédents

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta} \\
&= c_{\mu+1}\int_0^{\frac{\pi}{(\mu)}} \sin(\mu+1)\beta\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}d\beta + c_\mu\int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}}\frac{\sin^2(\mu)\beta}{\sin\beta} \\
&+ \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} c_\lambda\int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}}\sin(\lambda)\beta\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}d\beta + c_1\int_{\frac{\pi}{(1)}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(1)\beta\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}d\beta.
\end{aligned}$$

Nous allons étudier séparément ces quatre parties. La première intégrale sera divisée en intégrales partielles telles que dans chacune d'elles $\sin(\mu+1)\beta$ conserve son signe. Il résulte alors, de l'application d'un théorème connu sur les valeurs moyennes, que l'intégrale ne peut pas être plus grande que $\int_0^{\frac{\pi}{(\mu)}}\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}d\beta$; c'est la quantité ρ_0 de Dirichlet, qui est elle-même inférieure à $\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}$. Ainsi le premier terme de J est plus petit que $c_{\mu+1}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right)$, et par conséquent s'évanouit lorsque μ grandit indéfiniment.

Pour une des intégrales de la troisième partie J'_λ, on peut appliquer la formule donnée plus haut (p. 92). On a, d'après cela,

$$J'_\lambda = c_\lambda\int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}}\sin(\lambda)\beta\frac{\sin(\mu)\beta}{\sin\beta}d\beta < \frac{2\pi c_\lambda}{\frac{\pi}{(\lambda)}\mu} + \frac{\pi}{2}c_\lambda\int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}}\frac{\sigma_q(\beta)}{\beta}d\beta,$$

où $\sigma_q(\beta)$ désigne la plus grande oscillation de la fonction $\sin(\lambda)\beta$ dans le $q^{\text{ième}}$ intervalle de $\frac{q\pi}{(\mu)}$ à $[q+1]\frac{(\mu)}{\pi}$; mais, comme la différence de deux sinus est toujours plus petite que la différence des arguments, on a

$$\sigma_q(\beta) < [q+1]\frac{\pi}{(\mu)}(\lambda) - q\frac{\pi}{(\mu)}(\lambda),$$

et par conséquent

$$\sigma_q(\beta) < \pi \frac{(\lambda)}{(\mu)},$$

et par suite

$$J'_\lambda < 2c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi}{2} c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} \int_{\frac{\pi}{(\lambda)}}^{\frac{\pi}{(\lambda-1)}} \frac{d\beta}{\beta},$$

$$J'_\lambda < 2c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi^2}{2} c_\lambda \frac{(\lambda)}{(\mu)} \log[2\lambda + 1].$$

Si l'on forme la somme $\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda$, on obtient pour la troisième partie de l'intégrale J l'évaluation

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda < 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} + \frac{\pi^2}{2} c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} \log[2\lambda + 1]$$

ou

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J_\lambda - 2c_1 \frac{(\lambda)}{(\mu)} < \frac{\pi^2}{2} c_1 \left\{ \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu + 1} + \frac{\log[2\mu - 3]}{[2\mu + 1][2\mu - 1]} + \dots + \frac{\log 5}{7.9\dots[2\mu + 1]} \right\},$$

ou

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda - 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)}$$
$$< \frac{\pi^2}{2} c_1 \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu - 1} \left\{ 1 + \frac{1}{2\mu - 1} + \frac{1}{[2\mu - 1][2\mu - 3]} + \dots + \frac{1}{[2\mu - 1]\dots 9.7} \right\},$$

ou enfin

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} J'_\lambda - 2c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{\lambda=2} \frac{(\lambda)}{(\mu)} < \pi^2 c_1 \frac{\log[2\mu - 1]}{2\mu - 1}.$$

Il résulte de cette inégalité que, μ croissant indéfiniment, la troisième partie $\Sigma J'_\lambda$ tend encore vers zéro.

En employant la même marche, on peut établir le même résultat

pour la quatrième; il nous reste donc seulement à étudier la seconde

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\sin^2(\mu)}{\sin\beta} d\beta.$$

Comme tous ses éléments sont positifs, on a

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\sin^2(\mu)\beta}{\sin\beta} d\beta.$$

On peut facilement prouver aussi que

$$J'' > c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{\cos^2(\mu)\beta}{\beta} d\beta,$$

et l'on obtient par l'addition de ces deux inégalités

$$J'' > \tfrac{1}{2} c_\mu \int_{\frac{\pi}{(\mu)}}^{\frac{\pi}{(\mu-1)}} \frac{d\beta}{\beta},$$

et par conséquent

$$J'' > \tfrac{1}{2} c_\mu \log[2\mu + 1].$$

Mais les quantités c, qui ne sont assujetties qu'à devenir infiniment petites quand leur indice augmente indéfiniment, peuvent néanmoins être telles que le produit $c_\mu \log[2\mu + 1]$ devienne infiniment grand. Cela arrivera, par exemple, si l'on prend

$$c_\mu = \frac{1}{\sqrt{\log[2\mu + 1]}}.$$

Dans ce cas, la deuxième partie de l'intégrale J, et par conséquent cette intégrale elle-même, deviendra infiniment grande quand μ augmentera indéfiniment. Il est donc établi que la série de Fourier, qui partout ailleurs représente la fonction continue, ne converge plus pour $x = 0$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SOMOFF. — THEORETISCHE MECHANIK. T. I et II. 2 vol. in-8°, 417-407 pages, 1878-1879.

M. Alexandre Ziwet a entrepris de traduire, du russe en allemand, l'important Traité de Mécanique rationnelle de Somoff. Les deux premiers Volumes contenant la Cinématique, l'introduction à la Statique et à la Dynamique, et la Statique, sont parus; c'est tout ce que l'auteur a publié de son vivant, et même un peu plus : la fin de la Statique a été publiée par les soins de l'Académie des Sciences, d'après un manuscrit entièrement prêt pour l'impression. C'est à M. Somoff fils que l'on devra la Dynamique, rédigée d'après les cahiers de son père.

Somoff introduit systématiquement, au début de son Ouvrage, la notion de dérivée géométrique d'un segment de droite, notion due à M. Resal et qui résulte immédiatement de la notion de différence géométrique; la vitesse, les accélérations des divers ordres d'un point sont les dérivées géométriques successives du vecteur de ce point, regardé comme une fonction du temps, l'origine des vecteurs étant un point quelconque. La différentielle géométrique, en désignant la variable par t, sera le produit par dt de la dérivée géométrique, et l'on s'élève facilement à la notion de différentielles d'ordre supérieur. L'analogie entre les dérivées géométriques et les dérivées analytiques est complète tant que les segments de droite (u), (v), (w), ..., fonctions d'une variable t que l'on considère, n'entrent que dans des expressions de la forme

$$a(u) + b(v) + c(w) + \ldots,$$

où a, b, c, ... sont des nombres constants et où le signe $+$ est le symbole de l'addition géométrique; la dérivée géométrique de cette expression est alors

$$a(u)' + b(v)' + c(w)' + \ldots,$$

où $(u)'$, $(v)'$, $(w)'$, ... sont les dérivées géométriques des segments (u), (v), (w), ... Cette analogie se poursuit plus loin quand

on prend pour produit de deux segments de droite le *produit intérieur* (d'après Grassmann) de ces deux quantités, c'est-à-dire le produit des nombres qui mesurent les deux segments par le cosinus de leur angle; Somoff, comme M. Resal, emploie la dénomination de *produit géométrique;* le produit géométrique de deux sommes géométriques est alors une somme analytique dont les éléments sont les produits géométriques des éléments des deux sommes géométriques, et l'auteur montre que la formule relative à la dérivée d'un produit de deux facteurs s'étend aux produits géométriques. Dans cette formule, la dérivée du produit est une dérivée analytique; la somme par laquelle elle est exprimée est une somme analytique dont les éléments sont les produits géométriques d'un facteur par la dérivée géométrique de l'autre; cette formule conduit immédiatement à l'extension de la règle de Leibnitz pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit.

Une autre analogie, signalée depuis longtemps par Möbius [*Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorem,* (*Journal de Crelle,* t. 36, p. 91)], et dont Somoff tire un grand parti, concerne le sens géométrique qu'on peut attribuer à la série de Taylor appliquée à un segment de droite, fonction d'une variable, en regardant les dérivées qui figurent dans cette série comme des dérivées géométriques et les signes $+$ comme des signes d'addition géométrique. Par exemple, le déplacement d'un point m pendant le temps τ peut être regardé comme la somme géométrique (indéfinie) d'une suite de déplacements effectués dans la direction de la vitesse v et des accélérations $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, et dont les valeurs sont respectivement

$$v\tau,\quad \frac{1}{1.2}v_1\tau^2,\quad \frac{1}{1.2.3}v_2\tau^3,\quad \ldots,\quad \frac{1}{1.2\ldots n}v_{n-1}\tau^n,\quad \ldots.$$

C'est en partant de ces diverses notions que l'auteur établit les formules relatives aux vitesses, aux accélérations, à la courbure, à la torsion, et qu'il obtient, en particulier, les expressions des projections sur la tangente à la trajectoire, la normale principale et l'axe du plan osculateur du déplacement d'un point mobile; il en déduit l'expression, poussée jusqu'aux termes du cinquième ordre, de la corde en fonction de l'arc.

Si l'on considère un segment de droite qui dépende de deux va-

riables, on aura à considérer les dérivées géométriques relatives à ces deux variables, les différentielles totales géométriques, etc. Le théorème relatif à l'interversion de l'ordre des différentiations subsiste. On peut, de même, considérer des *variations* géométriques. Dans un intéressant Chapitre, l'auteur, en se plaçant à ce point de vue, établit les propriétés fondamentales des lignes géodésiques et des brachistochrones.

On désigne sous le nom de *fonction d'un point m* toute quantité qui dépend de la position de ce point m. Le lieu des points pour lesquels une telle fonction est constante est une surface de niveau. V étant une fonction du point m et ΔV la différence des valeurs de la fonction V pour les positions voisines M, M' du point M, le rapport $\frac{\Delta V}{MM'}$, quand M' se rapproche du point M de façon que la droite MM' tende vers une certaine limite, tend lui-même vers une certaine limite $\frac{dV}{ds}$ qui est dite la dérivée de la fonction V relativement au déplacement infiniment petit ds. Quand la direction de ce déplacement se confond avec la direction normale à la surface de niveau, cette dérivée n'est autre que le *paramètre différentiel du premier ordre de la fonction* V (d'après Lamé). Somoff emploie simplement le mot de *paramètre* et regarde ce paramètre comme un segment de droite dont la valeur P est égale à $\frac{dV}{dn}$ et dont la direction est celle de la normale. On a, d'ailleurs, la relation

$$\frac{dV}{ds} = P\cos(P, ds).$$

Si l'on a affaire à une fonction $V = f(q)$ d'une fonction q d'un point m, son paramètre est le produit du paramètre de la fonction q par la dérivée $f'(q)$; pour une fonction composée

$$V = f(q_1, q_2, q_3, \ldots),$$

où entrent plusieurs fonctions d'un même point, le paramètre est la somme géométrique des paramètres partiels de cette fonction par rapport aux variables $q_1, q_2, q_3, \ldots$.

L'auteur donne différentes applications de ces théorèmes et traite des systèmes de coordonnées curvilignes les plus usités.

Quand les trois surfaces de niveau q_1, q_2, q_3 qui déterminent la position d'un point m ne sont pas orthogonales, il y a lieu de considérer, outre le trièdre des trois tangentes aux courbes $q_3 q_2$, $q_1 q_3$, $q_2 q_1$, le trièdre supplémentaire formé par les trois normales. L'auteur donne les formules qui permettent de passer d'un trièdre à l'autre; il est amené à introduire, outre les paramètres différentiels h_1, h_2, h_3 relatifs aux trois surfaces de niveau, les *paramètres réciproques* a_1, a_2, a_3; a_1, par exemple, est l'inverse de la dérivée de la coordonnée q_1 relativement à un déplacement suivant la tangente à la courbe $q_3 q_2$. Ce paramètre réciproque est regardé comme un segment porté sur la même tangente. Dans le cas d'un système orthogonal, les deux paramètres, direct et *réciproque*, qui se correspondent ont des valeurs dont le produit est effectivement égal à $+1$. Le carré de la vitesse d'un point m peut se mettre sous la forme

$$\Sigma \overline{a_i a_r} q'_i q'_r,$$

où $\overline{a_i a_r}$ désigne le produit géométrique des deux paramètres réciproques et où q'_i, q'_r sont les dérivées de q_i, q_r par rapport au temps. Somoff donne les expressions des projections et des composantes de la vitesse et des accélérations des divers ordres relativement aux deux systèmes d'axes précédemment définis, et en déduit les formules relatives à la courbure. Si l'on considère un point mobile et une fonction de ce point, ses paramètres peuvent être regardés comme des segments de droite fonctions du temps. Somoff donne les expressions des projections de ces quantités et de leurs dérivées géométriques sur les normales aux trois surfaces de niveau dont l'intersection détermine le point considéré.

Tout ce qui précède concerne la Cinématique du point, qui, d'ailleurs, occupe la partie la plus importante de l'Ouvrage; l'auteur traite ensuite, au double point de vue de la Géométrie et de l'Analyse, le mouvement d'un système de forme invariable et développe les belles propriétés relatives au complexe linéaire qui correspond à chaque système de vitesses, aux deux surfaces réglées qui sont les lieux des axes instantanés du mouvement hélicoïdal dans l'espace et dans le système mobile, aux accélérations des divers ordres. L'étude du déplacement fini d'un système de forme invariable qui a un point fixe lui permet d'introduire d'une façon simple les trois

paramètres λ, μ, ν, au moyen desquels on peut, comme O. Rodrigues l'a montré, exprimer rationnellement les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires, et qui peuvent ainsi remplacer, en donnant plus de symétrie aux formules, les trois angles d'Euler. Les composantes p, q, r de la vitesse angulaire d'un système de forme invariable qui se meut autour d'un point fixe s'expriment simplement au moyen de ces quantités et de leurs dérivées par rapport au temps, comme au moyen des angles d'Euler et de leurs dérivées. Enfin le dernier Chapitre concerne les mouvements relatifs et contient la généralisation du théorème de Coriolis pour les accélérations d'ordre quelconque. La démonstration de ce théorème généralisé que donne Somoff est extrêmement simple ; c'est une suite immédiate de la signification cinématique donnée par Möbius à la série de Taylor.

L'Introduction à la Statique et à la Dynamique se rapporte à la Géométrie des masses.

Se plaçant à un point de vue indiqué par Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 188), l'auteur donne au mot *masse* une signification très générale. Étant données une portion d'espace E à une, deux ou trois dimensions et une autre quantité m ayant une valeur déterminée quand la quantité E est elle-même déterminée et s'annulant en même temps qu'elle, la quantité m est regardée comme une masse dont l'espace est E; ainsi le temps pendant lequel un mobile décrit une portion de sa trajectoire peut être regardé comme la masse de cette portion de trajectoire, etc. Si ΔE est une portion de l'espace E dont toutes les dimensions soient infiniment petites, et Δm la valeur correspondante de la masse, la limite du rapport $\frac{\Delta m}{\Delta E}$ est la densité au point entouré par ΔE; dans l'exemple précédent, la densité en un point serait l'inverse de la vitesse. En désignant la densité en un point de E par ρ, la masse m est représentée par l'intégrale

$$m = \int \rho \, dE,$$

étendue à tous les points qui constituent l'espace E. L'auteur est ainsi amené à donner diverses formules concernant les intégrales étendues à tous les points d'une ligne, d'une surface ou d'un volume.

De même que l'on considère des dérivées géométriques, on peut aussi considérer des *intégrales* géométriques. Si (u) désigne un segment de droite dont la grandeur et le sens soient définis pour chaque point de l'espace E, l'intégrale géométrique

$$\int (u)\, d\mathrm{E}$$

sera la limite de la somme géométrique

$$\Sigma (u)\, \Delta\mathrm{E},$$

étendue à toutes les positions $\Delta\mathrm{E}$ de l'espace E, et le segment de droite

$$\frac{1}{\mathrm{E}}\int (u)\, d\mathrm{E}$$

sera la *moyenne* des segments (u) pour l'espace E. Si (u) désigne le rayon vecteur qui joint le pôle O à un point de l'espace E entouré par l'élément de masse dm, l'expression

$$(r) = \frac{1}{m}\int (u)\, dm,$$

où l'intégrale géométrique est étendue à tous les points de l'espace E, définit un segment OC dont l'extrémité C ne dépend pas du pôle O et n'est autre que le centre de masse de E.

Après la théorie des centres de gravité, l'auteur développe celle des moments d'inertie.

Il s'occupe ensuite des formules relatives à la variation de la masse m contenue dans une portion d'espace E, où la densité ρ en un point M est une fonction continue du point M et d'une variable t qui sera, si l'on veut, le temps. Si l'on suppose que, lorsque t varie, les éléments de la masse m se meuvent sans se séparer, de façon à constituer à chaque instant une portion continue d'espace analogue à E, la masse m, pendant un intervalle de temps δt, subira un accroissement δm; s'il s'agit, par exemple, d'un volume, rapporté à des coordonnées quelconques q_1, q_2, q_3, dont la valeur au temps t soit donnée par l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int \omega\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

...l'espace E, la masse étant

$$\int \rho\omega\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

...sans le secours du calcul des variations,

$$\ldots + \frac{\partial(\omega\,\delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_3)}{\partial q_3}\Bigg] dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

$$\ldots \frac{\partial(\omega\,\delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega\,\delta q_3)}{\partial q_3}\Bigg] dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

... aux variations du temps. Si l'on suppose ... volume V entourant le point M décroissent ...sion

$$\ldots = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial(\omega q'_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\omega q'_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega q'_3)}{\partial q_3}\right]$$

...ique au point M; q'_1, q'_2, q'_3 désignent les déri- ...par rapport à t.

...le mouvement est tel que la vitesse de chaque ... t, soit le paramètre différentiel d'une certaine ...point, en posant

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_r} = \varphi_r$$

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\Sigma(h_r h_s)\varphi_r\varphi_s,$$

...désigne le produit géométrique des paramètres h_r et h_s ...s q_r et q_s, on aura

$$q'_r = \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_r},$$

...sion

$$\lim \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}\right)}{\partial q_3}\right]$$

...*amètre différentiel du second ordre* de la fonction de ...st, en coordonnées quelconques, ce que devient l'expres-

sion

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

relative aux coordonnées rectangulaires. L'auteur donne les formules analogues pour les surfaces.

Les fonctions φ, pour lesquelles on a $\Delta_2 \varphi = 0$, sont les fonctions *thermométriques* de Lamé, et les surfaces de niveau sont les surfaces *isothermiques*, dont Somof développe les propriétés les plus essentielles.

Il traite, en particulier, de la fonction potentielle

$$\int \frac{dm}{r},$$

qui possède le caractère des fonctions thermométriques pour les points extérieurs au volume correspondant à l'intégrale; le retour à la définition qu'il a donnée précédemment lui permet d'établir la formule

$$\Delta_2 \int \frac{dm}{r} = -4\pi\rho$$

pour les points intérieurs au volume considéré. La fin de cet important Chapitre est consacrée à l'établissement des formules de Green.

Nous arrivons à la Statique. L'auteur regarde comme causes du mouvement l'*inertie* et les *forces*, celles-ci étant considérées comme des causes *extérieures* aux points sur lesquels elles agissent. Une force qui agit sur un point ne peut en modifier instantanément la vitesse; elle est *cause* des accélérations de ce point. Quand le mouvement d'un point est composé de plusieurs mouvements, il est le résultat de causes qui, en agissant indépendamment, produiraient les mouvements composants et réciproquement. Telle est la forme que donne Somoff aux définitions et aux postulats expérimentaux de la Mécanique.

Quand un point, à l'époque t, a la vitesse v et les accélérations $v_1, v_2, \ldots$, on a vu en Cinématique que son mouvement pendant l'instant suivant τ pouvait être regardé comme composé de mouvements élémentaires rectilignes dont les directions sont celles des droites (v), (v_1), (v_2), ..., les chemins parcourus pendant

l'intervalle τ étant

$$v\tau,\quad v_1\frac{\tau^2}{2},\quad v_2\frac{\tau^3}{2.3},\quad \ldots;$$

les causes du mouvement pendant l'intervalle τ doivent donc être regardées comme l'ensemble des causes qui produiraient ces mouvements élémentaires.

Si, maintenant, on considère un point matériel partant du repos, sur lequel agissent successivement deux forces, il aura dans le premier mouvement des accélérations v_1, v_2, v_3, ... et dans le second des accélérations $u_1, u_2, u_3, \ldots$; pendant l'intervalle de temps τ, le premier mouvement pourra être regardé comme composé des mouvements élémentaires rectilignes

$$v_1\frac{\tau_2}{2},\quad v_2\frac{\tau^3}{2.3},\quad \ldots,$$

et le second comme composé des mouvements rectilignes

$$u_1\frac{\tau^2}{2},\quad u_2\frac{\tau^3}{2.3},\quad \ldots;$$

d'après le postulat invoqué précédemment, le mouvement produit par l'ensemble des deux forces pourra être regardé comme composé des mouvements rectilignes

$$(u_1 + v_1)\frac{\tau^2}{2},\quad (u_2 + v_2)\frac{\tau^3}{2.3},\quad \ldots,$$

le signe $+$ désignant l'addition géométrique. Ainsi, les accélérations du mouvement produit par les deux forces agissant simultanément seront les sommes géométriques des accélérations correspondantes produites par les deux forces agissant séparément. Une force est dite constante quand les accélérations qu'elle produit sont constantes en grandeur et en direction; mais, les accélérations du second ordre, du troisième ordre, etc., étant les dérivées géométriques de l'accélération du premier ordre, elles sont nécessairement nulles. Si deux forces constantes agissent séparément sur un même point, elles peuvent être regardées comme des grandeurs proportionnelles aux accélérations qu'elles lui communiquent, d'où la notion de masse. Enfin, si sous l'influence d'une force variable

un point de masse m a, à l'époque t, les accélérations v_1, v_2, ..., les causes de son mouvement pendant l'intervalle suivant τ sont l'inertie d'une part et de l'autre les causes qui produiraient les mouvements $\frac{1}{2}v_1\tau^2$, $\frac{1}{2.3}v_2\tau^3$, ... La force constante mv_1 produirait le premier de ces mouvements; on convient de la regarder comme la valeur, au temps t, de la force variable qui agit sur le point. Somoff propose, pour les quantités mv_2, mv_3, ..., qui en sont les dérivées géométriques successives, les noms d'*efforts* du premier, du second ordre, etc.

Le Chapitre suivant est consacré aux forces qui admettent un potentiel et à l'étude particulière de ce potentiel dans le cas de la loi de Newton : l'auteur avait déjà touché quelques points de cette étude, dans un Chapitre précédent, à propos du paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point et des fonctions thermométriques. Il traite avec quelques détails de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point; l'étude de l'attraction d'un cylindre lui fournit la notion du potentiel logarithmique dont il avait aussi traité précédemment; enfin il établit le théorème de Lejeune-Dirichlet sur les conditions qui permettent de reconnaître qu'une fonction donnée est le potentiel d'une masse donnée. La fin du Chapitre est consacrée à l'étude de l'attraction, suivant la loi de Newton, par une masse distribuée sur une surface, et, en particulier, à l'analyse des travaux de Green sur ce sujet.

Les quatre derniers Chapitres concernent la réduction des forces appliquées à un corps solide, les conditions d'équilibre et les propositions de Géométrie qui se rapportent à cette théorie.

L'auteur introduit d'abord la notion de travail et démontre le théorème suivant :

Le vecteur principal (Hauptvector), *le moment principal* (Hauptmoment) *et le travail total de toutes les forces relativement à tous les déplacements d'un système de points qui laissent invariables les distances mutuelles des points d'application des forces, sont indépendants des forces intérieures qui obéissent à la loi de l'action et de la réaction.*

Le vecteur principal, pour une origine O, est la somme géométrique des forces agissant sur le système de points, à laquelle on

attribue le point O pour origine; le moment principal est la somme géométrique des moments de toutes les forces par rapport au même point O.

Il établit ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système de forces appliquées à un système quelconque de points consiste en ce que le travail de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, soit nul pour tous les déplacements possibles et que, pour l'équilibre d'un système de points liés invariablement les uns aux autres, il faut et il suffit pour l'équilibre que le vecteur principal et le moment principal de toutes les forces soient nuls. Il donne ensuite les formules relatives aux conditions d'équilibre et au complexe linéaire qui correspond à tout système de forces.

Les équations d'équilibre sont au nombre de six; on peut, dans ces équations, mettre en évidence les grandeurs des forces et les coordonnées de leurs lignes d'action. Si le nombre n des forces est inférieur à six, on obtiendra, par l'élimination des nombres qui les mesurent, $6-n+1$ équations de condition entre les coordonnées des lignes d'action; en regardant l'une de ces lignes comme inconnue, on obtient les équations d'autant de complexes linéaires passant par les autres lignes d'action et auxquels doit appartenir la ligne d'action inconnue; en outre, en supposant toujours $n-1$ des lignes d'action données, on peut se proposer de déterminer les grandeurs des n forces pour que l'équilibre ait lieu. L'auteur traite ce problème pour les cas de $n=2, 3, 4, 5, 6$ et développe une suite de théorèmes empruntés en partie à la *Statique* de Möbius. Puis viennent l'étude des systèmes équivalents, la réduction des forces à deux ou à une force et un couple et les propriétés géométriques qui dépendent de cette réduction. Enfin le dernier Chapitre est consacré à l'étude de la façon dont varie le moment principal d'un système de forces pour une origine située dans le corps quand on déplace le corps et que, les points d'application des forces restant les mêmes points du corps, ces forces conservent la même grandeur et la même direction dans l'espace. J. T.

MÉRAY (C.). — OBSERVATIONS SUR DEUX POINTS DU CALCUL DES VARIATIONS (¹).

En premier lieu, l'auteur établit d'une façon plus simple et plus régulière qu'on ne le fait habituellement la formule qui donne la variation d'une intégrale définie. Voici maintenant le second point.

La variation de l'intégrale, que, pour fixer les idées, on suppose dépendre d'une seule fonction indéterminée y de la variable d'intégration x, étant mise sous la forme

$$A + \int_{x_0}^{x_1} dx B \delta y,$$

où A est une fonction linéaire et homogène de $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, dx_1, \ldots$ et B une fonction composée de $x, y, y', \ldots$, on dit que la nullité indéfinie de cette variation entraine les conditions séparées

$$A = 0, \quad B = 0,$$

parce que la détermination préalable, en fonction du paramètre α, des valeurs aux limites de $x, y, y', \ldots$, qui entrent dans A par elles-mêmes et par leurs variations n'en laisse pas moins y fonction indéterminée de x et de α dans l'intervalle x_0, x_1. C'est ce raisonnement que critique M. Méray. Pour avoir affaire, sous le signe $\int$, à une fonction qui ne soit, elle et ses $k_0 - 1$ ou $k_1 - 1$ premières dérivées, soumise à aucune condition relative aux limites x_0 et x_1, il substitue à y la fonction

$$y = H + (x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}\eta,$$

H étant une fonction de x et de $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_{k_0-1}, x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{k_1-1}$ qui satisfasse aux conditions extrêmes et η étant une fonction de x et de α complètement arbitraire; alors la variation prend la forme

$$A' + \int_{x_0}^{x_1} dx (x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1} B' \delta\eta,$$

et le raisonnement habituel montre en toute rigueur que l'on doit

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VI, p. 187-192.

avoir

$$B' = 0;$$

puis la substitution inverse effectuée dans cette dernière équation, regardée comme identique, entraîne

$$B = 0.$$

HOCHHEIM (Dr Adolf), Professor. — Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der herzoglich-gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift. III. — Magdeburg, Baensch. 28 pages.

Le *Bulletin* a donné l'analyse (1) des deux premières Parties de cette utile publication. Cette troisième Partie contient la fin de la Géométrie, la détermination du volume des pyramides, des cônes et des troncs de cônes, ainsi qu'une Introduction à la pratique des nivellements à l'aide d'instruments simples. Mais avec le Chapitre LIV commence une Section entièrement nouvelle; à l'Arithmétique, traitée exclusivement jusqu'ici, succède l'Algèbre, et cela avec un mode d'exposition qui nous offre encore plus d'intérêt que la nature propre du contenu. Le déguisement géométrique sous lequel les mathématiciens précédents, jusqu'à Alkharezmi, présentaient toujours les problèmes d'Algèbre est maintenant supprimé; les questions sont actuellement traitées par le pur calcul. L'auteur enseigne pour la première fois la multiplication et la division des monômes rationnels et irrationnels, puis la combinaison des sommes algébriques par les quatre règles; il trouve aussi l'occasion de placer la sommation des progressions arithmétiques. Ensuite l'auteur passe à l'*Aldjabr* proprement dite; il traite des équations du premier et du second degré, et il applique les méthodes trouvées à des problèmes concrets. Ces problèmes présentent un intérêt varié pour l'histoire des mœurs arabes. En dernier lieu, nous rencontrons aussi certaines questions géométriques, du genre de celles que l'historien con-

---

(1) 2e série, t. II, p. 236, et t. III, p. 178.

naît déjà d'après les écrits des mathématiciens hindous Bramegupta et Bhascara Acharya.

Tous les amis des recherches historiques sauront gré à l'auteur de cette édition allemande d'avoir si vaillamment poursuivi l'œuvre commencée par son compatriote Woepcke, l'illustre traducteur du Fakhri. S. G.

MÉLANGES.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES PERCUSSIONS ET LE CHOC DES CORPS;

PAR M. G. DARBOUX.

En 1874, j'ai présenté à l'Académie des Sciences les principaux résultats d'une étude sur le choc des corps (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1421, 1559, 1645, 1767); je me propose de reprendre ici cette étude, en développant plusieurs résultats qui n'avaient été qu'indiqués dans mes Communications antérieures et en ajoutant différentes propositions qui me paraissent nouvelles.

I. — DES PERCUSSIONS.

Considérons un point matériel de masse m, soumis à l'action de différentes forces. Soient x, y, z les coordonnées de ce point à l'instant t, v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse au même instant, X_i, Y_i, Z_i celles de l'une quelconque des forces qui agissent sur le point. On aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= X_1+\ldots+X_n,\\ m\frac{dv_y}{dt} &= Y_1+\ldots+Y_n,\\ m\frac{dv_z}{dt} &= Z_1+\ldots+Z_n,\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, si l'on désigne par v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} les composantes

de la vitesse du mobile à l'instant o, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \int_0^t X_1\,dt + \ldots + \int_0^t X_n\,dt, \\ mv_y - mv_{0y} = \int_0^t Y_1\,dt + \ldots + \int_0^t Y_n\,dt, \\ mv_z - mv_{0z} = \int_0^t Z_1\,dt + \ldots + \int_0^t Z_n\,dt. \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'interpréter de la manière suivante.

Appelons, avec différents auteurs, *impulsion* de la force X, Y, Z la quantité géométrique dont les composantes sont

$$\int_0^t X\,dt,\quad \int_0^t Y\,dt,\quad \int_0^t Z\,dt;$$

les équations (2) donneront lieu au théorème suivant :

L'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point matériel dans un intervalle de temps fini quelconque est égal à la somme géométrique des impulsions des forces qui agissent sur ce point pendant l'intervalle de temps considéré.

Il résulte de ce théorème que si des forces agissent sur un point matériel, et si l'on connaît *seulement* leurs impulsions dans un intervalle de temps donné, on pourra déterminer l'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point sur lequel elles agissent, et par conséquent, si l'on connaît la masse et la vitesse initiale du point, on obtiendra en grandeur et en direction la vitesse finale. Mais il importe de remarquer que *l'on n'aura aucune notion sur la position de ce mobile à l'instant final.*

Imaginons maintenant que l'intervalle de temps pendant lequel les forces agissent devienne de plus en plus petit, mais que les impulsions de quelques-unes des forces conservent une valeur finie, ce qui exige que ces forces deviennent de plus en plus grandes : le changement de vitesse se produira dans un intervalle de temps de plus en plus court, mais il sera toujours fini. D'ailleurs, si l'on suppose que les impulsions des forces relatives à tout intervalle de temps compris dans celui que nous considérons demeurent inférieures à des grandeurs fixes, les changements de vitesse du

point matériel demeureront finis et le déplacement du point matériel deviendra de plus en plus petit quand l'intervalle de temps diminuera.

En effet, réduisons toutes les forces à une seule dont les composantes à l'instant θ soient X_1, Y_1, Z_1, et considérons la projection du mouvement sur l'axe des x par exemple. On a

$$x - x_0 - v_{0x} t = \int_0^t d\theta \int_0^\theta X_1 \, d\theta.$$

Nous supposons que l'impulsion $\int_0^\theta X_1 \, d\theta$ demeure, quel que soit θ, inférieure à un nombre fixe M. On aura donc en valeur absolue

$$x - x_0 - v_{0x} t < \int_0^t M \, d\theta$$

ou

$$x - x_0 - v_{0x} t < M t,$$

et, par conséquent, $x - x_0$ diminuera quand l'intervalle de temps deviendra de plus en plus court ([1]).

([1]) Nous introduisons, on le voit, une condition qui, d'habitude, n'est pas énoncée explicitement : c'est que l'impulsion de la force dans une partie quelconque de l'intervalle de temps considéré demeure inférieure à une grandeur fixe quand l'intervalle de temps diminue. Cette condition est toujours satisfaite dans les applications, car on n'y considère que des percussions dont la direction ne varie pas sensiblement pendant toute la durée de l'intervalle pendant lequel elles agissent. Par exemple, dans le choc de deux corps, la force qui s'exerce au point de contact sur l'un des corps ne peut agir que dans un sens déterminé, de manière à écarter les deux corps. Alors l'intégrale $\int_0^\theta X_1 \, d\theta$ conserve son signe et ne cesse de croître; elle demeure donc inférieure à sa valeur finale, qui, par hypothèse, est finie.

Mais, si l'on se place à un point de vue exclusivement théorique, il est aisé de trouver des forces qui, dans un temps très court, imprimeront des changements finis ou même nuls de vitesse, tout en déplaçant le mobile d'une quantité finie. Considérons, par exemple, un point qui se meut en ligne droite et qui est soumis à l'action de la force dont l'expression à l'instant θ est

$$X_1 = \frac{4c\pi}{T^2} \sin\frac{\theta\pi}{T} \cos\frac{\theta\pi}{T},$$

c et T étant des constantes. On aura

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{4c\pi}{T^2} \sin\frac{\theta\pi}{T} \cos\frac{\theta\pi}{T},$$

On se rapproche donc de plus en plus d'un état limite dans lequel le mobile, sans changer de position, éprouverait une modification brusque de sa vitesse. C'est cet état limite que l'on étudie dans la théorie des percussions, et il résulte immédiatement de ce qui précède que, pour déterminer le changement de vitesse du mobile, il suffit de connaître les impulsions des différentes forces auxquelles il est soumis. Ce sont ces impulsions auxquelles on donne le nom de *percussions*. Il est clair que les percussions provenant de forces finies, telles que la pesanteur, peuvent être considérées comme nulles.

Je ne m'arrêterai pas à discuter une objection que l'on adresse quelquefois à la théorie des percussions. Quelques auteurs, en s'appuyant sur ce qu'il n'existe pas de force rigoureusement instantanée, préfèrent ne pas employer la notion des percussions et les théories qui déterminent leurs effets. Il n'existe pas de point géométrique ni de ligne droite dans la nature, et cependant nous

---

et par suite, si l'on appelle v_0 la vitesse initiale,

$$v_x - v_0 = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{\theta\pi}{T},$$

$$x - x_0 - v_0\theta = \frac{c\theta}{T} - \frac{c}{2\pi}\sin\frac{2\theta\pi}{T}.$$

On a donc, pour $\theta = T$,

$$v = v_0,$$

$$x = x_0 + v_0 T + c.$$

Si l'on suppose que le temps T devienne de plus en plus petit, c demeurant constant, on aura une force très grande agissant pendant un temps très court, *ne produisant aucun changement de vitesse et déplaçant le point d'une quantité quelconque c.*

Mais il est facile de reconnaître que la condition énoncée dans le texte ne se trouve plus remplie, puisque l'impulsion partielle

$$\int_0^\theta X_1 d\theta = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{\theta\pi}{T}$$

ne demeure pas finie, pour $\theta = \frac{T}{2}$ par exemple, quand T tend vers zéro. D'ailleurs, il est aisé de reconnaître que la force change de sens au milieu de son action.

C'est une force de ce genre qu'une locomotive doit déployer pour exécuter une de ces opérations qui sont si fréquentes dans les gares et amener rapidement un ou plusieurs wagons, sans vitesse, d'une position dans une autre.

trouvons utilité et intérêt à étudier ces abstractions. Il y a sans doute, quand on passe aux applications, à examiner les erreurs que l'on peut commettre en appliquant les théorèmes de la Science pure, mais cette question ne nous paraît pas devoir être mêlée au développement de la Science elle-même.

On sait comment se mesurent et se représentent les percussions. Au fond, ce sont des quantités de mouvement qu'il suffit de composer avec celles des points sur lesquels elles agissent. Je rappellerai rapidement les règles relatives à leur effet sur le corps solide et je présenterai en même temps quelques remarques nouvelles sur leur application.

Si le corps solide a un axe fixe, le produit du moment d'inertie relatif à cet axe par l'accroissement de la vitesse de rotation est égal à la somme des moments des percussions par rapport à cet axe.

Si le corps a un point fixe, désignons par p, q, r les composantes de la rotation suivant les trois axes principaux de ce point, et par A, B, C les moments d'inertie relatifs à ces trois axes; les vitesses prendront des accroissements Δp, Δq, Δr définis par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} A\Delta p = L, \\ B\Delta q = M, \\ C\Delta r = N, \end{cases}$$

où L, M, N désignent les sommes des moments des percussions par rapport aux trois axes.

Les formules précédentes peuvent être remplacées par une construction géométrique très élégante dont Poinsot a souvent fait usage. Soit O le point fixe. Supposons qu'on y transporte les quantités de mouvement de tous les points du système et que l'on compose les couples qui naissent de ces translations : le couple résultant sera le *couple des quantités de mouvement* transportées en O. Il est lié, comme on sait, d'une manière très simple à la rotation. 1° L'axe de rotation est le diamètre conjugué du plan de ce couple par rapport à l'ellipsoïde central du point O, et il est du même côté de ce plan que l'axe du couple. 2° Si G désigne le moment du couple, l la longueur du demi-diamètre intercepté dans l'ellipsoïde par l'axe de rotation, et δ la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde à l'extrémité de l'axe de rotation, la vitesse angulaire de

rotation a pour valeur

$$\omega = G l \delta.$$

On voit donc que, si l'on connaît le couple des quantités de mouvement, on aura immédiatement le mouvement du corps solide.

Or, les formules précédentes peuvent se traduire comme il suit. Transportons toutes les percussions au point fixe et composons tous les couples qui naissent de cette translation : on obtiendra un couple résultant. *Il suffira de composer ce couple avec celui des quantités de mouvement antérieurement acquises pour avoir le nouveau couple des quantités de mouvement.*

Dans le cas où le corps solide est entièrement libre, désignons par m la masse du corps, par V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse du centre de gravité, par X, Y, Z celles de la résultante générale des percussions transportées au centre de gravité. On aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} m\Delta V_x &= X,\\ m\Delta V_y &= Y,\\ m\Delta V_z &= Z,\end{aligned}\right.$$

et ces équations s'interprètent comme il suit : La nouvelle vitesse du centre de gravité sera la même que si la masse entière y était concentrée et toutes les percussions transportées parallèlement à elles-mêmes.

Quant au changement que subit la rotation autour du centre de gravité, on le déterminera en considérant ce centre comme un point fixe et en appliquant soit les formules (3), soit la construction géométrique de Poinsot qui leur est équivalente.

La forme linéaire de toutes ces équations nous montre tout de suite : 1° que l'on obtiendra la nouvelle vitesse d'un point quelconque en composant la vitesse antérieure avec celle que détermineraient les percussions si elles agissaient sur le corps au repos; 2° que l'on obtiendra le même résultat, soit en faisant agir simultanément les percussions, soit en les faisant agir successivement dans un intervalle de temps suffisamment court; 3° enfin que, si l'on multiplie les percussions par un nombre quelconque p, les vitesses qu'elles déterminent sur le corps au repos sont toutes multipliées par p. Tous ces résultats s'étendent d'ailleurs, sans difficulté, au cas où le corps solide est soumis à des liaisons d'une nature

quelconque, et les composantes de la vitesse que prend un point quelconque sont toujours des fonctions linéaires des composantes des percussions qui agissent sur le corps solide.

Nous remarquerons, en terminant, que les constructions géométriques données précédemment permettent de résoudre d'une manière simple certaines questions. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les percussions qui, appliquées à un corps solide libre, lui impriment au début une rotation. On reconnaîtra aisément que les lignes d'action de ces percussions doivent être perpendiculaires à leur polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité; elles forment donc un complexe bien connu et qui a été étudié par divers géomètres.

Considérons, en effet, une percussion P appliquée à un corps solide. Elle imprimera au centre de gravité une vitesse de translation qui lui sera parallèle. Quant à la rotation autour du centre de gravité, nous avons vu qu'elle commence autour de la droite qui est le diamètre conjugué du plan passant par la percussion P et le centre de gravité. Pour que le mouvement initial soit une rotation, il faut que la translation imprimée au centre de gravité soit normale à l'axe de rotation; c'est-à-dire que la ligne d'action de la percussion P soit une droite perpendiculaire au diamètre conjugué, par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité, du plan passant par cette droite et par le centre de gravité; ou, ce qui est la même chose, il faut que cette ligne d'action soit une droite perpendiculaire à sa polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité.

II. — Des forces vives dans la théorie des percussions.

Reprenons les équations relatives à l'effet des percussions sur un point matériel :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} m(v_x - v_{0x}) &= \sum \int_0^t X\,dt,\\ m(v_y - v_{0y}) &= \sum \int_0^t Y\,dt,\\ m(v_z - v_{0z}) &= \sum \int_0^t Z\,dt.\end{aligned}\right.$$

Multiplions-les par $v_x + v_{0x}$, $v_y + v_{0y}$, $v_z + v_{0z}$ et ajoutons-les. Nous aurons, en désignant par v_0, v les vitesses initiale et finale,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & m(v^2 - v_0^2) \\ & \quad = \sum \int_0^t [X(v_x + v_{0x})dt + Y(v_y + v_{0y})dt + Z(v_z + v_{0z})dt]. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette formule a une signification géométrique très simple. Si la force X, Y, Z agissait, pendant toute la durée de son action, sur un mobile animé de la vitesse constante dont les composantes sont

$$v_x + v_{0x},\quad v_y + v_{0y},\quad v_z + v_{0z},$$

son travail élémentaire serait

$$X(v_x + v_{0x})dt + Y(v_y + v_{0y})dt + Z(v_z + v_{0z})dt,$$

et son travail total dans l'intervalle de o à t serait précisément l'intégrale qui figure dans le second membre de la formule (6). Nous avons donc la proposition suivante :

Théorème I. — *Quand des percussions agissent sur un point matériel, la variation de force vive est égale à la somme des travaux que produiraient les forces d'où proviennent ces percussions si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

Multiplions maintenant les équations (5) par v_x, v_y, v_z respectivement et ajoutons-les. Nous obtiendrons une équation que l'on mettra aisément sous la forme suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & mv_0^2 - mv^2 = m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ & \qquad\qquad - 2\sum \int_0^t (Xv_x + Yv_y + Zv_z)dt. \end{aligned} \right.$$

Cette équation, interprétée comme la précédente, conduit à cette nouvelle proposition :

Théorème II. — *La perte de force vive est égale à la force vive due à la vitesse perdue moins le double de la somme des*

travaux que produiraient les forces si le point matériel conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante et égale à la vitesse finale.

Enfin, si l'on employait comme multiplicateurs v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, on aurait de même l'équation

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} mv^2 - mv_0^2 &= m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ &\quad + 2\sum\int_0^t (Xv_{0x} + Yv_{0y} + Zv_{0z})\,dt, \end{aligned}\right.$$

qui s'interprète comme il suit :

THÉORÈME III. — *Le gain de force vive est égal à la force vive due à la vitesse gagnée (ou perdue), augmentée du double des travaux que produiraient les forces si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante et égale à la vitesse initiale.*

Il est aisé de reconnaître que cette dernière proposition est un simple corollaire des deux précédentes, mais il peut y avoir quelque intérêt à en faire usage.

Considérons maintenant un système composé d'un nombre quelconque de points matériels. Écrivons les équations analogues à l'équation (6) pour chacun des points et ajoutons toutes ces équations. Nous aurons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 \\ &= \sum\sum\int_0^t [X\,dt(v_x + v_{0x}) + Y\,dt(v_y + v_{0y}) + Z\,dt(v_z + v_{0z})], \end{aligned}\right.$$

les sommes qui figurent dans le premier membre s'étendant à tous les points matériels, et celle qui figure dans le second à toutes les forces. Cette équation conduit au théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La variation de la force vive totale d'un système est égale à la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures si chacun des points d'application de ces percussions conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

De même, l'équation (7) nous conduira à la suivante,

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = \Sigma m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ \qquad - 2\sum\sum\int_0^t (Xv_x + Yv_y + Zv_z)\,dt, \end{cases}$$

ce qui donne le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *La perte de force vive du système est égale à la force vive due aux vitesses perdues, diminuée du double de la somme des travaux que produiraient les percussions tant intérieures qu'extérieures si chacun de leurs points d'application conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à sa vitesse finale.*

Toutes les propositions précédentes s'appliquent aux forces agissant pendant un temps quelconque. Mais, si le système matériel est un corps solide et si les forces agissent pendant un temps très court, c'est-à-dire sont de véritables percussions, il est aisé de démontrer que les termes correspondants aux percussions intérieures se détruisent deux à deux et disparaissent des équations (9) et (10). Soient, en effet, m, m' deux points du corps solide entre lesquels s'exerce une force (X, Y, Z). Appelons v_{0x}, v_x, ... les vitesses du point m, et v'_{0x}, v'_x, ... celles du point m'. Les termes qui proviennent de la force (X, Y, Z) dans les équations (9) et (10) sont composés des deux expressions

$$(11)\quad \begin{cases} (v_x - v'_x)\int X\,dt + (v_y - v'_y)\int Y\,dt + (v_z - v'_z)\int Z\,dt, \\ (v_{0x} - v'_{0x})\int X\,dt + (v_{0y} - v'_{0y})\int Y\,dt + (v_{0z} - v'_{0z})\int Z\,dt. \end{cases}$$

Les deux points m, m' étant maintenus, par hypothèse, à une distance invariable, les vitesses initiale et finale satisfont aux conditions

$$(12)\quad \begin{cases} (x - x')(v_x - v'_x) + (y - y')(v_y - v'_y) + (z - z')(v_z - v'_z) = 0, \\ (x - x')(v_{0x} - v'_{0x}) + (y - y')(v_{0y} - v'_{0y}) + (z - z')(v_{0z} - v'_{0z}) = 0, \end{cases}$$

x, y, z, x', y', z' désignant les coordonnées des deux points. D'ailleurs, la percussion étant dirigée suivant la droite qui joint les deux points, on a

$$\int X\,dt = \lambda(x - x'), \quad \int Y\,dt = \lambda(y - y'), \quad \int Z\,dt = \lambda(z - z'),$$

et, par conséquent, les deux expressions (11) sont nulles, en vertu des formules (12). Ainsi les percussions intérieures disparaissent dans les formules (9) et (10).

La démonstration précédente n'est pas absolument irréprochable, parce qu'elle suppose que les distances des différents points soient demeurées les mêmes pendant toute la durée des percussions. Il est aisé de reconnaître *a priori* que cette condition n'est pas nécessaire et qu'il suffit, pour que les théorèmes aient lieu, que les distances mutuelles des différents points redeviennent les mêmes après les percussions. En effet, dans ce cas, les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments permettent de trouver le nouveau mouvement du corps solide, et par suite la variation de force vive. Or l'application de ces théorèmes est indépendante des déformations passagères qui peuvent se produire pendant l'action des percussions. On voit donc qu'il en sera de même de la variation de la force vive, et, par suite, les expressions que nous avons trouvées en supposant les distances invariables doivent subsister dans tous les cas, pourvu que les distances reprennent leurs valeurs initiales quand les percussions ont cessé leur action. Nous allons, du reste, en nous servant seulement des équations ordinaires, obtenir une vérification des propositions précédentes.

Pour cela reprenons les équations (3) et (4), que nous écrirons

$$\begin{aligned}
m(V_x - V_{0x}) &= \Sigma X_i = X,\\
m(V_y - V_{0y}) &= \Sigma Y_i = Y,\\
m(V_z - V_{0z}) &= \Sigma Z_i = Z,\\
A(p - p_0) &= \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = L,\\
B(q - q_0) &= \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = M,\\
C(r - r_0) &= \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = N,
\end{aligned}$$

x_i, y_i, z_i désignant les coordonnées du point d'application de la percussion (X_i, Y_i, Z_i) par rapport aux trois axes principaux du centre de gravité.

En multipliant ces équations par $V_x + V_{0x}, \ldots, p + p_0, \ldots$ respectivement et en les ajoutant, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2\\
&\quad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z})\\
&\qquad + L(p + p_0) + M(q + q_0) + N(r + r_0).
\end{aligned}\right.$$

Le premier membre représente la variation de force vive. D'autre part, si l'on appelle $v_{ix}^0, \ldots, v_{ix}, \ldots$ les composantes des vitesses initiale et finale du point d'application (x_i, y_i, z_i) de la percussion (X_i, Y_i, Z_i), on a

$$\begin{aligned} v_{ix}^0 &= V_{0x} + q_0 z_i - r_0 y_i, & v_{ix} &= V_x + q z_i - r y_i, \\ v_{iy}^0 &= V_{0y} + r_0 x_i - p_0 z_i, & v_{iy} &= V_y + r x_i - p z_i, \\ v_{iz}^0 &= V_{0z} + p_0 y_i - q_0 x_i, & v_{iz} &= V_z + p y_i - q x_i, \end{aligned}$$

et l'on obtient, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} &\Sigma X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0) \\ &\quad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z}) \\ &\qquad + (p + p_0)L + (q + q_0)M + (r + r_0)N. \end{aligned}$$

En comparant à l'équation (13), on a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2, \\ &\quad = \Sigma X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0), \end{aligned} \right.$$

et cette équation ne diffère de l'équation (9) qu'en ce que les termes provenant des actions intérieures ont disparu. Nous avons donc la proposition suivante :

Théorème VI. — *Quand des percussions agissent sur un corps solide, la variation de force vive est égale à la somme des travaux qu'elles produiraient si leurs points d'application conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de leur vitesse initiale et de leur vitesse finale.*

On vérifiera de la même manière l'équation suivante,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 + mV_0^2 - Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 - mV^2 \\ &\quad = A(p - p_0)^2 + B(q - q_0)^2 + C(r - r_0)^2 + m(V - V_0)^2 \\ &\qquad - 2\Sigma(X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz}), \end{aligned} \right.$$

qui ne diffère de l'équation (10) qu'en ce que les termes provenant des percussions intérieures ont disparu et qui conduit au théorème suivant :

Théorème VII. — *La perte de force vive éprouvée par le corps*

solide est égale à la force vive due aux vitesses perdues moins le double de la somme des travaux que produiraient les percussions si les points sur lesquels elles agissent conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à leur vitesse finale.

Il est bon de remarquer que si le corps solide est soumis à des liaisons, s'il a, par exemple, des points fixes, ou des points assujettis à demeurer sur une surface fixe, ou des surfaces assujetties à passer par des points fixes, etc., les termes provenant dans les équations précédentes des percussions de liaison seront tous nuls, pourvu que l'on néglige le frottement. Par exemple, s'il y a un point fixe, la percussion que le corps reçoit de l'obstacle fixe, s'exerçant sur un point dont la vitesse est et demeure nulle, ne donnera de terme dans aucune des équations (14) ou (15).

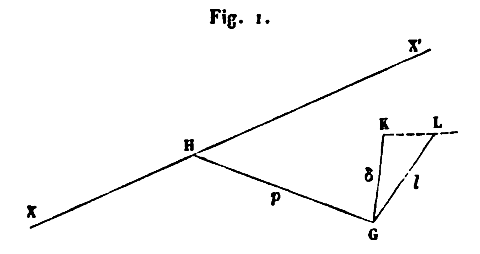
D'après cela, si une seule percussion agit sur un corps solide au repos, la force vive imprimée au corps sera, en vertu du théorème VI, égale au produit de cette percussion par la projection, sur sa direction, de la vitesse que prend son point d'application. Il faut donc que cette projection soit positive et, par conséquent, que le point d'application *cède* sous l'action de la percussion qui lui est appliquée. C'est là un résultat conforme à notre expérience de tous les jours; mais le théorème précédent, qui le met en évidence, nous conduit, en outre, à la considération d'un élément nouveau qui se rapporte aux droites d'un corps solide et que nous allons définir.

Concevons une droite D et supposons qu'une percussion égale à l'unité ait cette droite pour ligne d'action. Soit A le point de D où elle est appliquée. Elle communique à ce point A une vitesse dont la projection sur la percussion et, par conséquent, sur la droite est positive; nous désignerons cette projection par $\frac{1}{\mu}$, et il est clair qu'elle demeurerait la même si l'on faisait glisser la percussion sur la droite D, car on sait qu'alors le mouvement imprimé au corps demeure le même, et d'autre part, dans ce mouvement, les projections sur la droite des vitesses de tous les points de cette droite sont égales. Nous appellerons cette quantité μ, essentiellement positive, le *paramètre de la droite*. Quand on l'aura déterminée, on saura que *toute percussion égale à* P *et dirigée suivant la droite déterminera en son point d'application une vitesse dont la*

projection sur la percussion sera positive et égale à $\frac{P}{\mu}$. Cherchons quelle est la valeur du paramètre dans les cas principaux que l'on a à considérer.

1° Supposons d'abord le corps libre, et soit une percussion agissant suivant une droite XX′ (*fig.* 1). Désignons par M la masse du corps. La percussion P imprimera d'abord à tous les points une vitesse de translation égale à $\frac{P}{M}$; elle produira, en outre, une rotation autour du diamètre GL, conjugué au plan GXX′ dans l'ellipsoïde central du centre de gravité G. Appelons p la distance GH du centre

Fig. 1.



de gravité à la droite XX′. Le moment G du couple qui résulte de la translation de la percussion en G sera Pp, et, par conséquent, la vitesse de rotation autour de GL sera donnée par la formule

$$\omega = Ppl\delta,$$

où l désigne la longueur du demi-diamètre GL de l'ellipsoïde central autour duquel s'effectue la rotation, et δ la distance GK du centre au plan tangent à l'extrémité de ce diamètre. Nous pouvons d'ailleurs décomposer cette rotation en deux autres, l'une ω' dirigée suivant GK et égale à $\omega \times \frac{\delta}{l}$ ou $Pp\delta^2$, l'autre ω'' dirigée dans le plan XX′ et dont nous n'avons pas besoin de connaître la valeur.

D'après cela, la vitesse d'un point quelconque de XX′, par exemple du pied H de la perpendiculaire abaissée de G, se compose de trois vitesses : 1° la vitesse de translation dont la projection sur la droite XX′, prise dans le sens de la percussion, est $\frac{P}{M}$; 2° la vitesse due à la rotation ω', vitesse qui est dirigée suivant XX′ et qui a pour valeur $\omega' p$ ou $Pp^2\delta^2$; 3° la vitesse due à la rotation ω'', qui, étant normale à XX′, donne une projection nulle. On voit donc

que la projection sur la direction de la percussion de la vitesse imprimée au point H, projection qui conserve la même valeur pour un point quelconque de XX', est

$$P\left(\frac{1}{M}+p^2\delta^2\right).$$

On a donc dans ce cas, pour le paramètre de la droite XX', l'expression très simple

$$(16)_a \qquad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{M}+p^2\delta^2.$$

Le paramètre, généralement inférieur à la masse, lui devient égal quand la droite passe au centre de gravité.

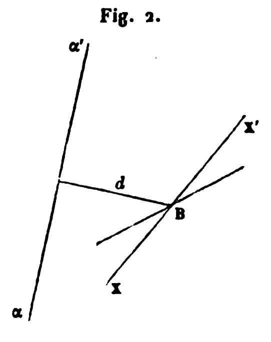
Si le corps a un point fixe, les raisonnements sont les mêmes; seulement il n'y a pas à tenir compte de la vitesse de translation, et l'on a

$$(16)_b \qquad \frac{1}{\mu}=p^2\delta^2,$$

le centre de gravité étant remplacé par le point fixe.

Enfin, si le corps a un axe fixe, soient XX' (*fig.* 2) la ligne d'ac-

Fig. 2.



tion de la percussion, θ l'angle qu'elle fait avec l'axe $\alpha\alpha'$, et d sa plus courte distance à l'axe. Désignons par ω la vitesse angulaire imprimée et par Mk^2 le moment d'inertie par rapport à $\alpha\alpha'$. On aura

$$Mk^2\omega = Pd\sin\theta.$$

La vitesse du pied B de la plus courte distance sera $\frac{Pd^2\sin\theta}{Mk^2}$, et sa projection sur XX' sera

$$\frac{Pd^2\sin^2\theta}{Mk^2}.$$

On aura donc ici

$$(16)_c \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{d^2 \sin^2 \theta}{M k^2}.$$

Nous nous bornerons à ces trois cas principaux. Pour les autres, nous nous contenterons de rappeler que le paramètre μ est essentiellement positif.

III. — Du choc des corps.

Le choc des corps a été l'objet de nombreuses recherches. Poisson, dans le Tome II de sa *Mécanique,* commence par traiter le choc des corps mous et il obtient la solution complète du problème en ajoutant aux douze équations fournies par les principes du centre de gravité et des moments une équation nouvelle qui exprime qu'à la fin du choc les vitesses normales au point de contact des deux solides sont égales. Puis il passe de là au cas des corps élastiques, en remarquant que le choc peut alors se décomposer en deux parties séparées par l'instant de la plus grande compression. Dans la première, le phénomène est le même que si les deux corps étaient dépourvus d'élasticité. Dans la seconde les corps reviennent à leur forme primitive, et il admet qu'ils reçoivent une percussion égale à celle qui s'est développée à leur contact pendant la première partie du choc. Il est aisé d'établir que la force vive totale reprend sa valeur à la fin du choc, ce qui fournit une espèce de vérification de l'hypothèse de Poisson.

En 1838, dans le *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées,* Navier a remarqué que, si l'on fait abstraction des vibrations communiquées par le choc aux molécules des deux corps, la force vive totale doit reprendre la même valeur. Cette remarque lui a permis d'obtenir la percussion totale qui se produit au contact des corps, et par conséquent de donner la solution complète de la question.

En 1874, M. Resal a adopté la marche proposée par Navier, dans une Note importante qui figure aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII).

Toutes ces différentes solutions sont analytiques; elles reposent sur la considération de treize équations du premier degré et ne

laissent pas voir la signification géométrique très simple des résultats. Je me suis proposé, en 1874, de donner une solution purement géométrique de cette question, et je vais indiquer ici les résultats que j'ai obtenus.

Soient (M), (M') deux corps solides se choquant en un point A. L'effet du choc peut se représenter par deux percussions égales et contraires, dirigées suivant la normale en A aux deux surfaces en contact, l'une $\int N\,dt$ appliquée au corps (M), l'autre $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M'). Soient w_0, w les composantes suivant la normale au point de choc de la vitesse initiale et de la vitesse finale du point de (M) qui se trouve en A, et soient w'_0, w' les mêmes quantités relatives au corps (M').

Si nous appliquons successivement le théorème VI aux deux corps (M), (M'), nous aurons

$$(17)\qquad \begin{cases} \Sigma_M(mv^2 - mv_0^2) = \quad (w + w_0)\int N\,dt, \\ \Sigma_{M'}(mv^2 - mv_0^2) = -(w' + w'_0)\int N\,dt, \end{cases}$$

Σ_M, $\Sigma_{M'}$ désignant les forces vives des corps (M), (M') respectivement. Il est à remarquer que ces équations, qui ont évidemment lieu pour des corps libres, sont encore vraies si les corps ont des points fixes ou sont assujettis à d'autres liaisons, car nous avons vu que les percussions de liaison ne peuvent introduire aucun terme dans les seconds membres des équations générales (14) et (15), et les formules (17) ne sont que l'application particulière de l'équation (14).

En ajoutant les deux équations précédentes, on aura, pour la variation totale de la force vive, la formule

$$(18)\qquad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = (w - w' + w_0 - w'_0)\int N\,dt,$$

qui va nous donner la solution complète de la question.

Supposons d'abord que les corps soient parfaitement élastiques et que la perte de force vive doive être nulle; il faudra que l'on ait

$$(19)\qquad w - w' = -(w_0 - w'_0).$$

Donc, l'effet du choc dans le cas des corps parfaitement élastiques est de *changer de signe la composante normale de la vitesse relative des deux points de choc sans changer la grandeur de cette*

composante. Tel est le résultat très simple auquel conduit immédiatement notre théorie.

Cela posé, décomposons le choc en deux parties par la condition que les intégrales $\int N\,dt$ relatives à ces deux parties soient égales. Les percussions imprimées aux corps solides dans les deux parties du choc ainsi divisé ont par hypothèse même grandeur, et elles agissent suivant la même droite. Donc, d'après les règles connues de l'effet des percussions, les vitesses gagnées par les points de l'un quelconque des solides sont les mêmes en grandeur et en direction pour ces deux parties du choc. Cette remarque permet de déterminer les composantes normales des vitesses des points des deux corps placés en A à la fin de la première partie du choc, car soit u la composante normale de la vitesse du point de choc de (M); on devra avoir

$$w_0 - u = u - w,$$

équation qui exprime que la composante normale de la vitesse varie de la même quantité dans les deux parties du choc. Donc

$$u = \frac{w + w_0}{2}.$$

Si u' désigne la quantité analogue à u pour le corps (M'), on aura de même

$$u' = \frac{w' + w'_0}{2}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (19), on aura

$$u = u'.$$

Ainsi, quand l'intégrale $\int N\,dt$ a acquis la moitié de sa valeur définitive, les vitesses normales des deux points de choc sont égales. Si le choc cessait à cet instant, on serait dans le cas des *corps mous*. Donc, *si, dans le cas des corps parfaitement élastiques, on sépare le choc en deux parties par l'instant où les vitesses normales des deux points de choc sont égales, les percussions relatives à ces deux parties du choc sont égales*. En d'autres termes, la percussion dans le cas des corps élastiques est double de celle qui se produit quand les corps sont mous. C'est le point que l'on admettait dans la théorie de Poisson.

Dans le cas des corps mous, le théorème VII trouve son application immédiate; les points en contact ayant la même vitesse normale dans les deux corps après le choc, les travaux des deux percussions, tels qu'ils doivent être évalués dans cette proposition, sont égaux et de signes contraires. On voit donc que, dans ce cas, la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues. C'est le théorème bien connu de Carnot, théorème qui n'a d'ailleurs d'autre avantage que de montrer qu'il y a perte de force vive, sans apprendre à en mesurer la grandeur.

Pour étudier le choc d'une manière plus complète et comprendre tous les cas, nous allons chercher les formules qui relient les vitesses w, w', à un instant quelconque du choc, à la percussion qui s'est produite jusqu'à cet instant, et, en faisant ensuite les hypothèses particulières, nous retrouverons tous les cas.

Désignons par μ, μ' les paramètres de la normale au point de choc par rapport aux corps (M), (M′) respectivement. La percussion $\int N\,dt$ appliquée au corps (M) donnera au point de choc la vitesse normale

$$w = w_0 + \frac{1}{\mu}\int N\,dt, \tag{20}$$

résultante de la vitesse initiale w_0 et de celle qu'imprimerait la percussion au corps partant du repos. De même la percussion $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M′) donnera au point de choc de ce corps la vitesse normale

$$w' = w'_0 - \frac{1}{\mu'}\int N\,dt. \tag{21}$$

Les équations précédentes nous conduisent aux deux suivantes :

$$\mu w + \mu' w' = \mu w_0 + \mu' w'_0 \tag{22}$$

et

$$w - w' = w_0 - w'_0 + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\int N\,dt.$$

Introduisons les vitesses relatives

$$W = w - w', \quad W_0 = w_0 - w'_0.$$

L'équation précédente s'écrira

$$(23)\qquad W - W_0 = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\int N\,dt.$$

Si nous substituons la valeur de $\int N\,dt$ dans la formule (18), nous aurons

$$(24)\qquad \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = \frac{W^2 - W_0^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Quant à la variation de force vive pour chaque corps, elle sera donnée par les formules (17), qui deviennent

$$\Sigma_M m(v^2 - v_0^2) = \quad (w + w_0)\frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}},$$

$$\Sigma_{M'} m(v^2 - v_0^2) = -(w' + w'_0)\frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}},$$

Ces formules ne diffèrent en rien de celles qui seraient relatives au choc de deux sphères de masses μ, μ'. Il est donc inutile de les discuter en détail. On obtiendra le choc des corps mous en faisant $W = 0$ et celui des corps élastiques en posant $W = -W_0$.

Cela nous conduit à dire un mot d'une hypothèse bien connue de Newton, relative aux corps imparfaitement élastiques. Newton admet que pour ces corps le choc sera terminé quand on aura

$$W = -eW_0,$$

e étant une fraction positive qui dépend de la nature des deux corps. On voit que cette hypothèse comprend comme cas extrêmes celles qui répondent au choc des corps mous ($e = 0$) et au choc des corps parfaitement élastiques ($e = 1$). Il est aisé de reconnaître quelle sera la perte de force vive. Si nous nous reportons à la formule (24), nous trouvons pour l'expression de cette perte

$$(1 - e^2)\frac{W^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

On peut donc caractériser l'hypothèse de Newton en disant qu'*elle conduit à une perte de force vive qui est une fraction déterminée,* $(1 - e^2)$, *et toujours la même, de celle qui se produit dans le choc des corps mous* (¹).

IV. — Du choc, en tenant compte du frottement.

Jusqu'ici j'ai négligé l'influence du frottement qui se produit au contact. Les expériences du général Morin paraissent établir que, même dans ce cas, le frottement suit les lois ordinaires. Toutefois, dans la théorie des machines, on n'a eu à s'occuper que de problèmes relativement simples pour lesquels il est facile de reconnaître *a priori* que la vitesse relative au point de contact des deux corps a une composante tangentielle dont la direction demeure constante pendant toute la durée du choc. Il n'y a donc alors qu'à introduire, en même temps que les percussions normales appliquées aux deux corps, des percussions tangentielles égales à la valeur commune des percussions normales multipliée par le coefficient de frottement et ayant une direction invariable pendant le choc, celle de la composante tangentielle de la vitesse relative au point de contact. Je citerai un travail de Poisson, *Sur le frottement des corps qui tournent* (*Bulletin de Férussac,* t. VI, p. 163) et les recherches de Coriolis sur le choc des sphères dans sa *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*.

Si l'on se propose de traiter le problème général, la question devient beaucoup plus compliquée. On sait que, dans le cas où il n'y a pas frottement, la vitesse relative au point de contact passe progressivement, pendant la courte durée du choc, d'une valeur à une autre tout à fait différente en grandeur et en direction; il en est de même quand il y a frottement, et si l'on veut tenir compte rigoureusement des effets de cette force, il faudra, à chaque

(¹) Dans le *Journal de Mathématiques* (3ᵉ série, t. IV, 1878), M. Joukofsky a publié un Mémoire sur la percussion des corps qui se rapproche du nôtre à la fois par la méthode et les résultats. Je crois donc devoir faire observer qu'au moins pour le cas des corps libres, qui est le seul dont s'occupe M. Joukofsky, j'avais développé la solution complète dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en 1874.

nouvel instant du choc, donner au frottement une direction nouvelle en sens inverse de la vitesse relative à cet instant. Cette direction de la vitesse relative dépend, d'ailleurs, du frottement qui s'est produit aux époques antérieures du choc; on peut donc prévoir qu'il y aura une équation différentielle donnant la loi du phénomène et dont l'intégration constituera la principale difficulté du problème; et l'on reconnait aussi que si l'on voulait, malgré le changement de la vitesse tangentielle relative au point de contact, conserver à ce frottement une direction constante, on pourrait commettre des erreurs du même ordre que les effets dont on veut tenir compte.

M. Phillips, dans un beau travail inséré au Tome XIV du *Journal de Liouville*, page 312, a le premier abordé la question à ce point de vue et intégré l'équation différentielle qui se présente dans cette théorie. Depuis, dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVI, p. 1645), j'ai obtenu les mêmes résultats par une méthode différente et à quelques égards plus simple. En étudiant de nouveau cette question pour présenter ici une étude complète de la théorie du choc, je me suis aperçu que, si les recherches que je viens de citer suppriment la principale difficulté de la question, elles ne donnent pas cependant la solution complète du problème, car elles négligent ce fait capital que la vitesse relative tangentielle peut devenir nulle pendant la durée du choc. Il y a donc intérêt à reprendre l'étude de cette question en ayant égard aux circonstances qui avaient été négligées dans les recherches antérieures.

Prenons pour axe des z la normale commune aux deux corps au point de contact, la partie positive de l'axe des z étant dirigée vers le corps (M). Les axes des x et des y seront dans le plan de contact. Le point de choc du corps (M) a, par rapport au point de choc du corps (M'), une vitesse relative dont nous désignerons par w la composante normale et par v la composante tangentielle. Si la vitesse v fait avec l'axe des x l'angle φ, les trois composantes de la vitesse relative suivant Ox, Oy, Oz seront

$$v\cos\varphi,\quad v\sin\varphi,\quad w.$$

Désignons par N la force normale qui s'exerce à l'instant t sur le corps (M). La force de frottement aura, suivant Ox, Oy, les deux

composantes

$$-f\mathrm{N}\cos\varphi,\quad -f\mathrm{N}\sin\varphi,$$

f désignant le coefficient du frottement. Par suite, les trois composantes de la percussion reçue par le corps (M) depuis le commencement du choc seront

$$-f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt,\quad -f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt,\quad \int_0^t \mathrm{N}\,dt,$$

et le corps (M′) aura reçu dans le même temps des percussions égales et contraires. Cela posé, d'après les lois de l'effet des percussions, les composantes de la vitesse relative des deux corps seront des fonctions linéaires de ces percussions, et l'on aura

$$(25)\quad \begin{cases} v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 - af\displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - bf\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c\int \mathrm{N}\,dt,\\ v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 - a'f\displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b'f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c'\int \mathrm{N}\,dt,\\ w = w_0 \qquad - a''f\displaystyle\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b''f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c''\int \mathrm{N}\,dt, \end{cases}$$

v_0, φ_0, w_0 désignant les valeurs initiales de v, φ, w. Quant à a, b, c, ..., ce sont des constantes que l'on détermine sans difficulté et qui dépendent de la forme et de la position relative des deux corps: a, a', a'' sont les composantes de la vitesse relative qui serait imprimée aux points en contact par deux percussions égales à l'unité dirigées suivant l'axe des x et appliquées l'une au corps (M), l'autre au corps (M′), la première ayant le sens de la partie positive de l'axe des x, l'autre ayant le sens contraire; b, b', b'', c, c', c'' ont des définitions analogues relativement à des percussions dirigées suivant Oy et Oz. Il n'y a donc aucune relation entre ces neuf constantes, qui, dans le cas des corps libres, dépendent de vingt paramètres. Il est vrai que les équations précédentes ne supposent nullement les corps libres et qu'elles ont lieu d'une manière absolue, quelle que soit la nature des liaisons. Mais, dans la discussion, nous pourrons les supposer quelconques; il nous suffira seulement de montrer que dans tous les cas elles satisfont à des inégalités dont nous aurons à tenir grand compte dans notre discussion. Nous allons d'abord indiquer quelles sont ces relations d'inégalité.

Si deux corps (M), (M′) sont en repos, et qu'en un de leurs points de contact on leur applique respectivement deux percussions P, — P égales et contraires, il est facile de montrer que la vitesse relative que prendra le point de contact de (M) par rapport au point de contact de (M′) aura toujours une projection positive sur la percussion P appliquée au corps (M). En effet, nous savons que la percussion P imprime à son point d'application une vitesse dont la projection sur P est $\frac{P}{\mu}$, μ étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M). De même la percussion — P imprime au point du corps (M′) où elle est appliquée une vitesse dont la projection sur — P sera $+\frac{P}{\mu'}$, μ' étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M′); et par conséquent la projection de cette vitesse sur P sera $-\frac{P}{\mu'}$. La projection de la vitesse relative sur P, étant la différence des projections des deux vitesses absolues, sera

$$P\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right),$$

et, *par conséquent, sera toujours positive.*

D'après cela, revenons aux deux corps (M), (M′) supposés au repos, et appliquons à l'origine au corps (M) une percussion quelconque dont les composantes sont X, Y, Z, en appliquant au corps (M′) la percussion égale et contraire. La vitesse relative qui sera imprimée par ces deux percussions sera définie par les formules

$$v_x = a\,X + b\,Y + c\,Z,$$
$$v_y = a'X + b'Y + c'Z,$$
$$v_z = a''X + b''Y + c''Z,$$

cette vitesse étant toujours celle du point de (M) par rapport au point de (M′). La projection de cette vitesse sur la percussion appliquée au corps (M) devant être positive, nous devrons avoir

$$Xv_x + Yv_y + Zv_z > 0,$$

et par conséquent

$$aX^2 + b'Y^2 + c''Z^2 + (c' + b'')YZ + (c + a'')XZ + (b + a')XY > 0.$$

Ainsi, les constantes a, b', c'' doivent satisfaire à toutes les inégalités qui expriment que l'expression précédente est positive, quelles que soient X, Y, Z. Par exemple, on aura

$$(26)\qquad \begin{cases} a > 0, \ b' > 0, \ c'' > 0, \\ (b + a')^2 - 4ab' < 0. \end{cases}$$

Nous aurons à faire usage de ces inégalités.

Après ces remarques préliminaires, reprenons les équations (25) et différentions-les. Si nous posons

$$(27)\qquad \begin{cases} A = c - af\cos\varphi - bf\sin\varphi, \\ A' = c' - a'f\cos\varphi - b'f\sin\varphi, \\ A'' = c'' - a''f\cos\varphi - b''f\sin\varphi, \end{cases}$$

nous aurons

$$\cos\varphi\, dv - v\sin\varphi\, d\varphi = \mathrm{AN}\,dt,$$
$$\sin\varphi\, dv + v\cos\varphi\, d\varphi = \mathrm{A'N}\,dt,$$

ce qui donne

$$\frac{dv}{v} = \frac{A'\sin\varphi + A\cos\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}\,d\varphi,$$
$$\mathrm{N}\,dt = \frac{v\,d\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}.$$

Posons, pour abréger,

$$H = A'\sin\varphi + A\cos\varphi,$$
$$\Delta = A'\cos\varphi - A\sin\varphi.$$

Nous obtiendrons

$$(28)\qquad v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{H}{\Delta}d\varphi},$$

et, v une fois connu, on déduira de l'expression de N dt

$$(29)\qquad \begin{cases} \int_0^t \mathrm{N}\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\,d\varphi}{\Delta}, & v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{Av\,d\varphi}{\Delta}, \\ \int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{v\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta}, & v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{A'v\,d\varphi}{\Delta}, \\ \int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{v\sin\varphi\,d\varphi}{\Delta}, & w = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{A''v\,d\varphi}{\Delta}. \end{cases}$$

Ces quadratures donnent la solution complète de la question ; elles feront connaître les diverses circonstances du choc tant que la vitesse v ne deviendra pas nulle, auquel cas on ne connaîtrait plus la direction du frottement.

On peut interpréter géométriquement les formules précédentes. Construisons dans le plan tangent la courbe auxiliaire lieu du point dont les coordonnées à l'instant t sont

$$x = f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt, \quad y = f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt.$$

On voit que le rayon vecteur de cette courbe représente en grandeur et en direction la percussion tangentielle. L'arc de la courbe, compté à partir de l'origine, a pour valeur

$$s = f\int_0^t \mathrm{N}\,dt,$$

et par conséquent il est égal à la percussion normale multipliée par le coefficient de frottement. Si l'on différentie d'ailleurs les formules qui donnent x et y, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi.$$

La direction de la tangente à cette courbe auxiliaire est donc la même que celle de la vitesse relative tangentielle à l'instant t. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Il existe une courbe située dans le plan de contact, passant au point de contact et donnant la loi du choc. Son rayon vecteur représente la percussion tangentielle due au frottement ; sa tangente a la direction de la vitesse relative et son arc, compté à partir de l'origine, est égal au produit du coefficient de frottement par la percussion normale reçue par chacun des corps depuis le commencement du choc.

Il résulte des formules (25) que cette courbe satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0\sin\varphi_0 - a'x - b'y + c's}{v_0\cos\varphi_0 - ax - by + cs},$$

et par conséquent les recherches précédentes peuvent être considérées comme donnant l'intégrale de cette équation ([1]).

Revenons aux formules (29) et voyons comment on déterminera la fin du choc. Dans le cas des corps mous, il n'y a pas de diffi-

---

([1]) Considérons d'une manière générale l'équation différentielle

$$(a)\qquad \frac{f(y')+\int F(y')X\,dx}{\varphi(y')+\int \Phi(y')X\,dx}=\theta(y'),$$

où y' désigne $\frac{dy}{dx}$ et X une fonction de la seule variable x. Il est aisé de reconnaître qu'elle comprend, comme cas particulier, celle qui a été considérée dans le texte. Il suffit, en effet, pour retrouver cette dernière équation, de prendre

$$X=1,\quad \theta(y')=y',$$
$$F(y')=-a'-b'y'+c'\sqrt{1+y'^2},\quad f(y')=v_0\sin\varphi_0,$$
$$\Phi(y')=-a-by'+c\sqrt{1+y'^2},\quad \varphi(y')=v_0\cos\varphi_0.$$

Nous allons montrer qu'on peut intégrer très simplement l'équation (a). Pour cela, posons

$$\varphi(y')+\int\varphi(y')X\,dx=\lambda,$$

et par conséquent

$$f(y')+\int F(y')X\,dx=\lambda\theta(y');$$

on aura, en différentiant,

$$\frac{d\varphi}{dy'}dy'+\Phi(y')X\,dx=d\lambda,$$
$$\frac{df}{dy'}dy'+F(y')X\,dx=\theta(y')d\lambda+\lambda\frac{d\theta}{dy'}dy',$$

et, si l'on élimine $X\,dx$, on trouvera

$$\frac{F(y')}{\Phi(y')}=\frac{\theta(y')\frac{d\lambda}{dy'}+\lambda\frac{d\theta}{dy'}-\frac{df}{dy'}}{\frac{d\lambda}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Cette équation linéaire fera connaître λ en fonction de y'. On déterminera ensuite x au moyen de la formule

$$X\,dx=\left(\frac{d\lambda}{dy'}-\frac{d\varphi}{dy'}\right)dy',$$

où les variables sont séparées, et enfin y par la formule

$$dy=y'\,dx.$$

L'intégration de l'équation différentielle est ainsi ramenée à une série de quadratures.

Si dans l'équation (a) on remplaçait $X\,dx$ par $d\varphi(x,y)$, on serait, par une méthode

culté : le choc se terminera quand la vitesse relative normale w sera réduite à zéro. Mais il peut y avoir des corps élastiques dans lesquels le frottement n'est pas nul, par exemple deux billes d'ivoire dépoli. Dans ce cas, rien ne nous guidant, on peut revenir à l'ancienne hypothèse et supposer que, lorsque les corps se détendent après s'être comprimés, ils reçoivent une percussion normale égale à celle qui s'est développée dans la première partie du choc. Alors il suffira de calculer la percussion normale relative au cas du choc des corps mous et de prolonger le choc jusqu'à ce que la percussion normale ait pris une valeur double de celle que l'on a ainsi calculée. Pour plus de netteté, nous traiterons toujours, dans ce qui va suivre, le cas du choc des corps mous.

D'après les hypothèses faites sur le sens de l'axe des z, la percussion $\int N\,dt$ sera toujours positive et la valeur initiale w_0 de w sera négative. Par suite, la première des formules (29) nous montre que φ, partant de la valeur φ_0, devra varier de telle manière que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit positif; donc on connaîtra le sens de la variation de φ. Désignons par α la première racine de l'équation

$$\Delta = 0$$

que φ atteindrait en variant dans le sens indiqué, et cherchons si le choc sera terminé avant que φ ait atteint la valeur α. L'équation qui définit la fin du choc est

$$w = 0 = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'' v\,d\varphi}{\Delta}. \tag{30}$$

---

analogue, ramené à l'intégration de l'équation

$$\varphi(x, y) = F(y').$$

L'équation (a) comprend comme cas particulier les suivantes :

$$\frac{ax + by + cs + F(y')}{a'x + b'y + c's + \Phi(y')} = \theta(y')$$

et

$$\frac{ax^2 + F(y') + c\int x\,dy}{a'x^2 + \Phi(y') + c'\int x\,dy} = \theta(y').$$

Cette dernière équation, correspondante au cas où l'on prend $X = x$, équivaut à une relation assez générale entre la tangente et l'aire d'un segment de la courbe cherchée.

Si cette équation admet une racine comprise entre zéro et α, il n'y aura pas de difficulté; les formules (25), (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc, et elles feront connaître les percussions tangentielles et normales, et par conséquent la vitesse finale des deux corps. Je dis que ce cas se présentera toujours toutes les fois que la quantité que nous avons désignée par H sera positive pour $\varphi = \alpha$.

En effet, nous avons vu que l'expression

$$X(aX + bY + cZ) + Y(a'X + b'Y + c'Z) + Z(a''X + b''Y + c''Z)$$

est toujours positive, quelles que soient les quantités X, Y, Z. Faisons

$$X = -f\cos\varphi, \quad Y = -f\sin\varphi, \quad Z = 1;$$

on aura, en conservant les notations adoptées,

$$A'' - f(A'\cos\varphi + A''\sin\varphi) > 0,$$

ce qui, d'après les formules (25), équivaut à l'inégalité

$$dw - f\,dv > 0,$$

et, par conséquent,

$$(31) \qquad w - w_0 - f(v - v_0) > 0.$$

Or, si φ se rapproche de la racine α, $\frac{d\varphi}{\Delta}$ devient infini positif, puisque nous avons vu que le signe de $d\varphi$ est toujours celui de Δ. Si donc H est positif dans le voisinage de la valeur α de φ, l'intégrale $\int \frac{H\,d\varphi}{\Delta}$ deviendra infinie positive, et il en sera de même de v, qui a pour valeur

$$(32) \qquad v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{H\,d\varphi}{\Delta}}.$$

Ainsi, si φ variait de zéro à α, v et par conséquent $v - v_0$ croîtraient indéfiniment, et, en vertu de l'inégalité (31), il en serait de même de w. Donc, avant que φ ait atteint la valeur α, w aura pris tel accroissement positif que l'on voudra, et, comme sa valeur initiale est négative, elle aura passé par zéro ou par toute autre valeur positive qui marquera la fin du choc.

Si, au contraire, on a $H < 0$ pour $\varphi = \alpha$, il pourra se faire sans

doute qu'il y ait encore une valeur de φ comprise entre φ_0 et α et annulant w, mais il pourra aussi arriver que φ atteigne la valeur α sans que w soit devenue nulle. En effet, dans ce cas, v *deviendra nulle pour* $\varphi = \alpha$ et l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'' v\, d\varphi}{\Delta},$$

qui tendra vers une valeur finie quand φ s'approchera de α, aura un maximum en valeur absolue. Si w_0, par exemple, est supérieure à ce maximum, l'équation (30) n'aura pas de racine entre φ_0 et α.

Voilà donc un cas tout aussi général que le précédent et qui avait été négligé, celui où la vitesse relative tangentielle devient nulle avant la fin du choc. Nous allons l'étudier d'une manière détaillée.

Et d'abord l'étude qui a été faite de questions analogues (roulement des sphères, des cylindres) nous avertit qu'il peut se produire deux espèces tout à fait différentes de mouvements :

Ou bien la vitesse relative tangentielle continuera à demeurer nulle, et alors la force de frottement ne sera assujettie qu'à l'unique condition d'être inférieure à la force normale multipliée par le coefficient de frottement; en d'autres termes, la force appliquée à l'un des corps devra faire avec la normale commune un angle moindre que l'angle de frottement. Ce sont là les lois du frottement quand il y a *repos relatif* au contact.

Ou bien la vitesse relative tangentielle reprendra des valeurs finies, et il reste à déterminer le mouvement qui pourra se produire dans ces conditions.

Examinons d'abord le premier cas. Soient N la composante normale de la force à un instant quelconque, θ, θ_1 ses composantes tangentielles. Puisque la vitesse tangentielle v doit demeurer nulle, il faut que l'on ait

$$a\theta + b\theta_1 + c\mathrm{N} = 0,$$
$$a'\theta + b'\theta_1 + c'\mathrm{N} = 0,$$

ce qui donne

$$\theta = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}\mathrm{N}, \quad \theta_1 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\mathrm{N}.$$

Exprimons que la composante tangentielle est plus petite que fN;

nous aurons l'inégalité

$$f^2 N^2 - \theta^2 - \theta_1^2 > 0,$$

et, par conséquent, en posant

(33) $$K = f^2(ab' - ba')^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2,$$

il faudra que l'on ait

$$K > 0.$$

Si cette inégalité n'est pas satisfaite, le mouvement précédent sera impossible.

Examinons maintenant ce qui arrivera si l'on suppose que la vitesse tangentielle relative, après être devenue nulle, reprenne des valeurs finies. Alors l'équation différentielle

$$(A' \cos\varphi - A \sin\varphi)\,dv = v(A' \sin\varphi + A \cos\varphi)\,d\varphi$$

nous montre que la seule solution possible sera

$$A' \cos\varphi - A \sin\varphi = 0, \quad d\varphi = 0.$$

Ainsi, dans le mouvement qui se produira, la direction et le sens de la vitesse relative demeureront constants, et φ ne pourra être qu'une des racines de l'équation précédente.

Or cette équation admet quatre racines qui peuvent être toutes réelles. Nous sommes donc amenés à discuter jusqu'à cinq mouvements différents qui peuvent se produire : ceux, au nombre de quatre, qui correspondent à ces différentes racines, et celui pour lequel la vitesse tangentielle demeure nulle. Si deux de ces mouvements étaient possibles simultanément, on rencontrerait un fait très intéressant, mais qu'aucun des exemples traités et connus ne nous permet de prévoir. Nous allons en effet montrer, par une discussion détaillée, qu'il n'y a jamais indétermination, qu'il n'y a jamais à choisir entre deux ou plusieurs mouvements également possibles.

Nous développerons d'abord quelques remarques préliminaires.

1° Dans le cas où la vitesse tangentielle reprend une valeur finie, on a, nous l'avons vu, $\varphi = \text{const.}$, et les formules (25) nous donnent sans difficulté

$$v = H \int N\,dt,$$

Or, v et $\int N\,dt$ sont positifs ; il faut donc que H le soit aussi. Ainsi,

pour que le mouvement correspondant à une racine α de l'équation $\Delta = 0$ soit possible, il faut que cette racine α rende la quantité H positive. Il suit de là que si la vitesse tangentielle est devenue nulle pour une certaine valeur α de φ, comme cette valeur α est une racine de Δ rendant H négative, la vitesse ne peut reprendre une valeur finie, φ étant égal à α.

2° Puisque le signe de H pour chaque racine de Δ a une grande importance, cherchons à le déterminer. A cet effet, nous remarquerons l'identité fondamentale dans cette discussion

$$H + \Delta' = -af\sin^2\varphi - b'f\cos^2\varphi + (b + a')f\sin\varphi\cos\varphi.$$

En vertu de l'une des inégalités (26), le second membre est toujours négatif. Donc H *est négative pour toute racine de* Δ *qui rend la dérivée* Δ' *positive ou nulle*. Telle est la proposition qui rendra possible la discussion suivante.

3° Formons l'équation qui donne les quatre valeurs de H; on a

$$A'\cos\varphi - A\sin\varphi = 0, \quad A'\sin\varphi + A\cos\varphi = H,$$

et, par conséquent,

$$H = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{A'}{\sin\varphi},$$

ou, en développant,

$$c - (af + H)\cos\varphi - bf\sin\varphi = 0,$$
$$c' - a'f\cos\varphi - (b'f + H)\sin\varphi = 0,$$

ce qui donne, en éliminant φ,

$$\left(ca' - ac' - c'\frac{H}{f}\right)^2 + \left(cb' - bc' + \frac{cH}{f}\right)^2 = \left[(ab' - ba') + \frac{H}{f}(a + b') + \frac{H^2}{f^2}\right]^2 f^2.$$

L'équation développée est

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{H^4}{f^2} + 2(a + b')\frac{H^3}{f} \\ &\quad + [f^2(a + b')^2 + 2f^2(ab' - ba') - c^2 - c'^2]\frac{H^2}{f^2} \\ &\quad + 2[(a + b')(ab' - ba')f^2 - c(cb' - bc') + c'(ca' - ac')]\frac{H}{f} \\ &\qquad + f^2(ab' - ba')^2 - (ca' - ac')^2 - (cb' - bc')^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme de cette équation est la quantité que nous avons désignée par K.

Ces remarques faites, nous pouvons commencer la discussion.

1° Supposons d'abord que l'équation $\Delta = 0$ n'ait pas de racine réelle. Alors les quatre valeurs de Δ sont imaginaires et la quantité K est positive, puisqu'elle est le dernier terme de l'équation précédente, dont les quatre racines sont imaginaires. Si au début du choc la vitesse tangentielle est nulle, elle demeurera nécessairement nulle, K étant positif et aucun des quatre autres mouvements n'étant réel. Si au contraire elle n'est pas nulle, elle ne le deviendra jamais, et les formules (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc.

2° Si l'équation $\Delta = 0$ a deux racines réelles, pour une de ces racines la dérivée Δ' sera positive, et, par conséquent, la valeur correspondante de H sera négative. Si les deux valeurs réelles de H sont négatives, le dernier terme de l'équation (34) en H sera positif, et, par suite, si la vitesse v devient nulle à un instant du choc, elle ne pourra que le demeurer. Au contraire, si une seule valeur de H est négative, K sera aussi négatif, et, si la vitesse v devient nulle avant la fin du choc, elle ne pourra pas le rester; mais il se produira le mouvement dans lequel φ prend une valeur égale à la racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

3° Enfin, si l'équation $\Delta = 0$ a ses quatre racines réelles, il y en aura deux rendant Δ' positive, et, par conséquent, *deux au moins pour lesquelles on aura* $H < 0$.

Si $K < 0$, il y a un nombre impair de valeurs de H négatives; il y en a donc alors trois. Ainsi, il existe trois valeurs de φ pour lesquelles la vitesse v peut devenir nulle; mais, K étant négatif, cette vitesse ne pourra rester nulle, et il se produira le mouvement dans lequel φ prendra une valeur égale à l'unique racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

Si $K > 0$, nous allons montrer que l'équation (34) n'a que des permanences, et par conséquent que les quatre valeurs de H sont négatives. Mais, pour simplifier le calcul, nous admettrons que l'on ait choisi les axes de telle manière que c' soit nulle. Cela revient à faire passer le plan des xz par la direction de la vitesse relative qui serait imprimée par les deux percussions égales et contraires dirigées suivant Oz.

On a, dans le cas qui nous occupe,

$$f^2(ab'-ba')^2-c^2(a'^2+b'^2)>0.$$

Rappelons les inégalités

$$(a'+b)^2-4ab'<0,\quad a>0,\quad b'>0,$$

qui donnent

$$(a'-b)^2<4(ab'-ba'),$$

et par conséquent

$$ab'-ba'>0.$$

Si nous nous reportons à l'équation (34), nous voyons immédiatement que le coefficient de H^3 est positif. Il reste à démontrer qu'il en est de même des coefficients de H et de H^2. Nous emploierons pour cela les deux inégalités

$$f^2>\frac{c^2(a'^2+b'^2)}{(ab'-ba')^2},$$

$$a>\frac{(a'+b)^2}{4b'}.$$

Le coefficient de $2\frac{H}{f}$ est

$$L=(a+b')(ab'-ba')f^2-c^2b'.$$

Le coefficient de f^2 étant positif, remplaçons f^2 par sa limite inférieure. Nous aurons

$$\frac{L(ab'-ba')}{c^2}>(a+b')(a'^2+b'^2)-b'(ab'-ba'),$$

ou

$$\frac{L(ab'-ba')}{c^2}>aa'^2+b'(a'^2+b'^2)+bb'a'.$$

Remplaçons encore a par sa limite inférieure, et nous aurons

$$\frac{4b'L(ab'-ba')}{c^2}>(a'^2+ba'+2b'^2)^2,$$

ce qui démontre que L est positif.

Passons au coefficient de $\frac{H^2}{f^2}$. On a, en le désignant par L_1,

$$L_1 = f^2[(a+b')^2 + 2(ab'-ba')] - c^2$$

et, en remplaçant f^2 par sa limite inférieure,

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2$$
$$+ 4ab'(a'^2+b'^2) + (a'^2+b'^2)(b'^2-b^2-2ba').$$

Si l'on remplace dans le second terme a par sa limite inférieure, on trouve

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2 + (a'^2+b'^2)^2,$$

et, par conséquent, L_1 est encore positif.

Ainsi, toutes les fois que l'équation $\Delta = 0$ aura ses quatre racines réelles et que K sera positif, les quatre valeurs de H seront négatives. Alors, pour quatre valeurs de φ, la vitesse v pourra devenir nulle; mais, quand elle le sera devenue, elle restera nulle jusqu'à la fin du choc.

En résumé, *il n'y a jamais d'indétermination dans le mouvement.*

Dans le cas où la vitesse v demeurera nulle, il faudra substituer aux équations (29) les suivantes,

$$(35)\qquad \begin{cases} 0 = a\theta + b\theta_1 + c\mathrm{N}, \\ 0 = a'\theta + b'\theta_1 + c'\mathrm{N}, \\ w = w'_0 + a''\theta + b''\theta_1 + c''\mathrm{N}, \end{cases}$$

qui serviront jusqu'à la fin du choc; w'_0 désigne la valeur qu'a w au moment où la vitesse v devient nulle.

J'indiquerai, en terminant, un exemple assez simple qui met en évidence la plupart des cas de la discussion précédente; c'est celui d'un corps solide de révolution qui vient rencontrer obliquement un plan fixe.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FESTSKRIFTER, udgivne af det mathematisk-naturvidenskabelige Fakultet ved Kjöbenhavns Universitet i Anledning af Universitetets Firehundredeaarsfest, Juni 1879. — Kjöbenhavn, Gyldendalske Boghandels Forlag, 1879. In-8° (¹).

Nous n'analysons ici que les trois Mémoires mathématiques et astronomiques.

STEEN (ADOLPHE). — DEN ELASTISKE KURVE OG DENS ANVENDELSE I BÖJNINGSTHEORIEN (²).

C'est un seul point de la théorie de la flexion qui a provoqué cette recherche. Il n'est point clair si un prisme mince qui est fléchi par une pression peut prendre en réalité, dans les cas où l'axe n'est soutenu qu'en un ou deux points, toutes les positions à plusieurs points sur l'axe (ou à sinuosités) qu'indique la théorie. Avant de renvoyer cette question aux praticiens, il faut s'assurer que la théorie n'a contribué en rien au défaut de clarté. L'auteur fait à cet égard deux observations.

Premièrement, les cours techniques se bornent ordinairement à des résultats qu'on peut exprimer par des fonctions élémentaires. Pour cette raison, on introduit, dans l'intégration de l'équation différentielle de la courbe élastique, une approximation, plus tôt qu'il ne serait nécessaire si l'on voulait faire usage des premiers éléments de la théorie des intégrales elliptiques.

Ensuite, on se borne à une détermination incomplète des quantités constantes introduites par le calcul, et cette détermination est de la plus grande importance pour trouver le nombre possible de sinuosités.

Pour suppléer à ces lacunes, l'auteur commence par déterminer la pression longitudinale minimum qui donne naissance à une seule

(¹) *Mémoires publiés par la Faculté des Sciences à l'Université de Copenhague à la célébration du quatrième centenaire de la fondation de l'Université, en juin* 1879. Copenhague, librairie de Gyldendal, 1879.

(²) *La courbe élastique et son application à la théorie de la flexion.*

sinuosité d'un prisme perpendiculaire, et il montre qu'une pression capable de produire plusieurs sinuosités devrait être proportionnelle au carré de leur nombre. Or, une comparaison de la pression minimum qui fléchit le prisme au plus grand chargement que le matériel peut supporter donne au rapport de la hauteur du prisme et du rayon de gyration du moment d'inertie de la section transversale une valeur qui montre l'impossibilité de plusieurs sinuosités; en effet, le prisme devrait être si long, qu'il serait rompu au lieu d'être fléchi. Le rapport que nous venons d'indiquer doit être proportionnel au nombre des sinuosités.

Une application pratique ajoutée par l'auteur sert à montrer aux praticiens combien peu de difficulté présente l'usage de Tables d'intégrales elliptiques pour la solution de problèmes de ce genre.

THIELE (T.-N.). — Castor; calcul du mouvement relatif, et critique des observations de cette étoile double. 46 pages (fr.).

L'avantage que l'on poursuit et que l'on obtient en faisant des mesures micrométriques repose sur ce fait, que les erreurs inévitables des mesures diminuent avec la distance entre les objets mesurés. Cette méthode, appliquée aux étoiles doubles, où les distances sont singulièrement petites, devrait donc, semble-t-il, donner des résultats d'une exactitude très grande, et rien, en effet, ne serait plus désirable pour l'étude des mouvements de ces intéressants systèmes de corps célestes. Mais cette attente est frustrée, car les erreurs dans les mesures de ces astres ne suivent pas la loi (exponentielle) des erreurs, et les écarts en sont tels, que c'est seulement dans d'étroites limites que l'on peut admettre que la moyenne des observations donne une approximation plus grande que les diverses mesures, de sorte que la méthode des moindres carrés cesse d'être applicable à la détermination des orbites des étoiles doubles.

L'étude de ces erreurs systématiques semble être tout aussi difficile qu'elle est indispensable, et le phénomène présente différentes phases qui doivent nécessairement être prises en considération avant qu'on puisse profiter pleinement de l'exactitude des mesures micrométriques.

D'un côté, c'est un fait depuis longtemps constaté, que des observateurs différents déduisent des résultats différents de leurs mesures du même astre, et quelques-uns d'entre eux, notamment M. O. Struve, ont reconnu qu'en réalité leurs propres mesures sont entachées des erreurs systématiques, et ont cherché, par des mesures d'étoiles doubles artificielles, à déterminer les corrections qu'il était nécessaire de faire subir aux observations ou à leur moyenne pour les rapprocher de la vérité objective.

D'un autre côté, l'auteur cherche à prouver, par l'exemple d'une étoile double qui a été observée très-souvent malgré son mouvement lent, que très souvent le même observateur mesure différemment à des époques différentes, sans qu'il soit possible d'assigner quelque cause extérieure à ce phénomène. Suivant son opinion, il sera nécessaire, dans les observations futures, de soumettre les erreurs systématiques à des épreuves fréquentes, et, quant aux anciennes, il est d'avis qu'il faut avant tout chercher à fixer les époques où les observateurs ont changé leur manière d'observer, afin de déterminer les périodes intermédiaires, en général sans doute courtes, pendant lesquelles les observations de chaque observateur peuvent être traitées par la méthode des moindres carrés et ramenées, par exemple, à des positions normales, en tant que le mouvement n'a pas été trop considérable. En se guidant sur ces principes, l'auteur fait la critique de toutes les observations de Castor à lui connues, pour donner une réponse provisoire aux questions suivantes : les erreurs systématiques ont-elles varié pour chaque observateur, et, dans ce cas, quand et de combien?

Pour ce qui regarde le mouvement même de Castor, il n'a pas été possible d'arriver à un résultat définitif. La lenteur de ce mouvement, qui a permis d'utiliser cette étoile double pour la critique des erreurs systématiques, est cause qu'il manque encore au moins une donnée pour la détermination des sept éléments de l'orbite. La durée de la révolution peut encore être choisie arbitrairement entre trois cent cinquante ans et un nombre infini d'années. L'auteur a adopté sept cent vingt ans; mais il va sans dire qu'il considère la détermination de l'orbite fondée sur cette hypothèse comme étant seulement analogue à une formule d'interpolation qui représenterait les résultats des observations.

ZEUTHEN (H.-G.). — OM FLADER AF FJERDE ORDEN MED DOBBELTKEGLESNIT. 51 p. (1).

Les surfaces du quatrième ordre à une conique double ont été étudiées par MM. Kummer, Clebsch, Geiser, Cremona, R. Sturm, et comme on peut déduire, par une transformation homographique, les propriétés des surfaces générales de celles des surfaces anallagmatiques, elles l'ont été aussi par MM. Moutard, Laguerre, Darboux et par plusieurs autres savants. L'auteur y est revenu en appliquant à l'étude des surfaces de nouveaux moyens, qui font ressortir très simplement les propriétés générales (c'est-à-dire celles où il n'est pas question de réalité) étudiées jusqu'à présent, et qui servent en même temps à résoudre les questions de réalité et à déterminer les formes des surfaces, ce qu'on n'avait fait que pour les surfaces anallagmatiques.

Dans la première Partie, il applique à l'étude des propriétés générales de la surface la circonstance que le contour apparent de la surface projetée d'un point de la conique double est une courbe générale du quatrième ordre. Les propriétés des vingt-huit tangentes doubles du contour montrent les faits connus, que la surface contient seize droites et que l'enveloppe des plans dont les courbes d'intersection sont composées de deux coniques se décompose en cinq cônes (les cônes kummériens). Les projections de ces coniques forment dix des soixante-trois systèmes de coniques tangentes quatre fois au contour. Une courbe de la surface aura en général pour projection une courbe tangente au contour sur tous les points où elle le rencontre.

Certaines courbes de la surface se présentent plus commodément lorsqu'on la projette du sommet d'un cône de Kummer. Alors le contour apparent sera composé de la trace du cône, prise deux fois, et d'une courbe du quatrième ordre à deux points doubles, tangente quatre fois à la trace. Cette représentation conduit, dans la deuxième Section, à la construction suivante de la surface (2).

(1) *Sur les surfaces du quatrième ordre à une conique double.*

(2) Si, dans cette construction, $\mathcal{E}_1$ est une sphère au centre P, elle se réduira à celle qu'indique M. Darboux pour une surface anallagmatique, à la page 122 de son Ouvrage : *Sur une classe remarquable*, etc.

Soient T un point fixe, σ_2 et δ_2 deux surfaces du second ordre, et désignons par SS′ et DD′ les points d'intersection de ces surfaces avec une droite variable par T; déterminons ensuite deux couples de points de cette droite, (M_1, M_2) et (M'_1, M'_2), qui sont tous deux harmoniquement conjugués par rapport à DD′, tandis que l'un, (M_1, M_2), est harmoniquement conjugué par rapport à TS, et l'autre, $(M'_1 M'_2)$, harmoniquement conjugué par rapport à TS′. Alors le lieu des points M est une surface du quatrième ordre ayant pour conique double la ligne de contact de la surface δ_2 avec son cône circonscrit au sommet T, ayant le cône circonscrit à σ_2 au sommet T pour cône kummérien, et tangente le long de la courbe d'intersection de σ_2 et δ_2 à un cône au sommet T. Les sommets des quatre autres cônes kummériens sont les sommets des cônes du second ordre par la même courbe d'intersection. On obtient ainsi une représentation de la surface par une surface double du second ordre σ_2.

Dans les troisième et quatrième Sections, l'auteur s'occupe des questions de réalité et de forme, en y appliquant respectivement la projection d'un centre placé sur la conique double et la représentation par une surface double σ_2 que nous venons de nommer. Il fait usage alors de résultats trouvés antérieurement par lui-même et M. Crone sur la réalité des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre et des systèmes de coniques qui y sont quatre fois tangentes. Il trouve que les surfaces appartiennent à six formes distinctes. Dans leur énumération, que nous allons reproduire ici, l'auteur dit (avec M. Klein) qu'une nappe d'ordre pair θ a le type de point lorsqu'elle ne contient aucune branche de courbe d'ordre impair (exemple : l'ellipsoïde) et qu'elle a le type de droite lorsqu'elle en contient une infinité (exemple : l'hyperboloïde gauche), et il indique (avec MM. Schläfli et Klein) la connexion d'une nappe par le double du nombre de courbes fermées de la nappe qui ne la décomposent pas. Ne s'occupant que de propriétés projectives, il n'a pas égard à la décomposition d'une nappe par le plan à l'infini. Un cône (ou une conique) est appelé *réel*, lorsque son équation est réelle.

A. Surfaces à seize droites réelles, à cinq cônes kummériens réels et à dix systèmes réels de coniques planes, dont chacun contient quatre couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe

du type de droite et de la connexion 6, qui se trouve au dehors de tous les cônes kummériens.

B. Surfaces à huit droites réelles, à trois cônes kummériens réels et à six systèmes réels de coniques, dont chacun contient deux couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 4, qui se trouve au dehors de tous les cônes kummériens.

C. Surfaces à quatre droites réelles, à un seul cône kummérien réel et à deux systèmes réels de coniques, dont l'un contient deux couples de droites réelles et deux couples de droites imaginaires conjuguées. Huit des droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 2, qui se trouve au dehors du cône kummérien.

D. Surfaces sans aucune droite réelle, à cinq cônes kummériens réels et à six systèmes réels de coniques. Les droites n'ont aucun point réel. Les surfaces peuvent ou avoir une seule nappe du type de point et de la connexion 2, qui se trouve au dehors de trois des cônes kummériens, ou n'avoir aucune nappe réelle.

E. Surfaces sans aucune droite réelle, à cinq cônes kummériens réels et à deux systèmes réels de coniques, dont chacun contient quatre couples de droites imaginaires conjuguées. Les surfaces ont deux nappes du type de point et de la connexion 0, qui se trouvent au dehors d'un seul cône kummérien.

F. Surfaces sans aucune droite réelle, à trois cônes kummériens réels et à deux systèmes réels de coniques, dont chacun contient deux couples de droites imaginaires conjuguées. Les huit autres droites n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de point et de la connexion 0, qui se trouve au dehors d'un seul cône kummérien. H. Z.

BURNHAM (S.-W.). — DOUBLE STARS OBSERVATIONS MADE IN 1877-78 WITH THE 18 $\frac{1}{2}$ INCH REFRACTOR OF THE DEARBORN OBSERVATORY (Chicago). 1 vol. in-4°. London, 1880.

M. Burnham, qui s'occupe depuis plusieurs années, et avec un succès incontesté, de l'observation et de la recherche des étoiles

doubles, publie aujourd'hui une suite importante à ses précédentes recherches. Les observations consignées dans le Mémoire actuel n'ont point d'ailleurs été faites avec le 6 pouces de son observatoire particulier; par suite d'une circonstance heureuse, il a eu pour cette série de mesures la libre disposition du grand équatorial de $18\frac{1}{2}$ pouces ($0^m,470$) d'ouverture installé à l'Observatoire de Dearborn par les soins de la Société astronomique de Chicago.

Cet équatorial, construit, en 1864, aux frais de la Société astronomique de Chicago et de M. Y. Scammon, était jusqu'ici presque inutilisé, malgré son pouvoir optique remarquable qui lui permet de dédoubler des étoiles distantes de $0'',25$ seulement. Grâce à la singulière puissance de cet admirable instrument, M. Burnham a donc pu mesurer en 1877-78 des étoiles doubles dont la distance n'avait encore été qu'estimée, et il a ainsi recueilli des matériaux d'une valeur inestimable pour l'histoire des systèmes stellaires multiples.

Le Mémoire de M. Burnham comprend deux Parties.

La première est un Catalogue d'étoiles doubles récemment découvertes par lui-même ou par M. Alvan G. Clark; il fait suite aux Catalogues déjà publiés par l'auteur dans les *Monthly Notices* (t. XXXIII, XXXIV et XXXV), les *Astronomische Nachrichten* (n°s 2062 et 2103), l'*American Journal of Science* (juillet 1877) et enfin les *Monthly Notices* (t. XXXVIII).

Les étoiles y sont numérotées de 483 à 734; parmi elles 75 systèmes ont une distance comprise entre $0''$ et $1''$ (plusieurs sont à une distance inférieure à $0'',3$) et 59 sont distantes de $1''$ à $2''$.

La seconde Partie du Mémoire de M. Burnham renferme les mesures micrométriques de 500 systèmes doubles déjà connus et autrefois observés par Herschel, W. Struve, O. Struve, etc., mais jusqu'ici rarement observés, en sorte qu'il y a de grandes incertitudes sur la nature réelle de leurs mouvements. G. R.

HARNACK (Ax.). — Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen (¹). — Bemerkungen zur Geometrie auf der Linienflächen vierter Ordnung (²).

Dans le plan une courbe générale du troisième ordre, dans l'espace la courbe commune aux surfaces du second ordre qui appartiennent à un même faisceau, constituent les figures algébriques les plus simples qui puissent servir à la représentation uniforme des valeurs d'une intégrale elliptique.

Dans l'étude qu'il fait du second mode de représentation, M. Harnack prend pour point de départ l'expression différentielle

$$D = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)},$$

où $a_x^2 = 0, \alpha_x^2 = 0$ sont les équations de deux surfaces du faisceau, en sorte que pour les points de la courbe on a

$$a_x a_{dx} = 0, \quad \alpha_x \alpha_{dx} = 0,$$

où $u_x = 0$, $v_x = 0$ sont les équations de deux plans.

En supposant que ces deux plans se coupent sur une sécante à la courbe, ou plus particulièrement sur une tangente, et en introduisant le paramètre du faisceau de plans qu'ils déterminent, on exprime la différentielle elliptique au moyen d'une seule variable indépendante. L'invariant absolu du faisceau de surfaces est aussi l'invariant de la différentielle.

Si l'on suppose maintenant que le faisceau de plans soit quelconque, il est nécessaire d'obtenir les quatre valeurs de la différentielle qui résultent de la rotation infiniment petite d'un plan autour d'une droite quelconque située sur lui. La résolution de ce problème, qui exige l'élimination entre trois formes quaternaires quadratiques et une forme linéaire, s'obtient, à proprement parler, sans calculs, en profitant de ce que l'on connait le système complet des

(¹) *Math. Ann.*, t. XII, p. 47-86.
(²) *Ibid.*, t. XIII, p. 49-52.

formes d'un faisceau de coniques et en s'aidant d'une méthode symbolique dans laquelle on représente une forme irréductible au moyen du produit de faisceaux linéaires distincts. Le résultat est une équation biquadratique dans laquelle le second terme manque et qui fournit une preuve du théorème d'Abel.

Pour étudier la distribution des valeurs de l'intégrale, en supposant que la limite inférieure corresponde à l'un des seize points où un plan rencontre la courbe en quatre points confondus, il convient de distinguer quatre cas :

1° La courbe a deux traits avec deux branches paires. Il y a une période réelle ($p = \omega$) et une période purement imaginaire ($p' = \omega'$); sur l'une des branches se distribuent toutes les valeurs comprises entre zéro et p. Sur l'autre, les mêmes valeurs augmentées de $\frac{p'}{2}\cdot$ A des points imaginaires conjugués correspondent des arguments imaginaires conjugués.

2° La courbe a deux traits avec deux branches impaires. Il y a encore une période réelle ($p = \omega$) et une période purement imaginaire ($p' = \omega'$). Aux points des deux branches correspondent des valeurs complexes du paramètre, dans lesquelles les parties imaginaires sont constantes; ces valeurs peuvent être obtenues en ajoutant pour une des branches $\frac{1}{8}p'$, pour l'autre $\frac{5}{8}p'$ à toutes les valeurs réelles possibles; les points imaginaires conjugués sont de la forme $\alpha + \frac{1}{8}p' + \beta i$, $\alpha + \frac{1}{8}p' - \beta i$.

3° La courbe a un seul trait avec une branche paire. Il y a une période réelle ($p = \omega$) et une période complexe de la forme $p' = \frac{\omega + \omega'}{2}\cdot$ Aux points de la branche réelle correspondent des arguments réels; aux points imaginaires conjugués correspondent des arguments imaginaires conjugués.

4° La courbe commune à toutes les surfaces du faisceau réel est complètement imaginaire. Il y a encore une période réelle et une période purement imaginaire. Les points imaginaires conjugués sont de la forme $\alpha + \beta i$ et $\alpha + \frac{p}{2} - \beta i$.

Ces résultats établis, on peut démêler entièrement toutes les propriétés relatives à la réalité ou à la non-réalité. En particulier,

on obtient tous les théorèmes de M. Cremona sur la réalité du tétraèdre polaire relativement à ses faces et à ses arêtes, de même que les théorèmes sur les cent seize plans qui passent par quatre des seize points fondamentaux. La représentation du paramètre conduit en outre à une construction nouvelle de la courbe gauche, quand on donne deux systèmes correspondants de trois points, analogue à la construction de la courbe plane du troisième ordre quand on donne trois couples de points conjugués.

L'ensemble des sécantes de la courbe forme une infinité de surfaces réglées dont chacune s'obtient en établissant une relation entre les deux arguments qui correspondent à chaque sécante. La loi la plus simple consiste à prendre pour ces deux arguments u et $\pm u + C$, C étant une constante arbitraire comprise dans le parallélogramme des périodes : en prenant u et $-u + C$, on obtient un système de génératrices rectilignes d'une surface du second ordre; l'autre système de génératrices s'obtient en changeant le signe de la constante. Ce théorème a déjà été donné par M. Kölling (*Der Flächenbüschel zweiter Ordnung*, Dissert.; Berlin, 1878).

En prenant pour les deux arguments u et $+u \pm C$, on obtient des surfaces réglées dont les génératrices rencontrent le tétraèdre polaire en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant. Cette surface peut donc être regardée comme l'intersection d'un complexe tétraédral de droites et du système de sécantes à la courbe gauche; elle a été étudiée par M. de la Gournerie (*Recherches sur les surfaces réglées*, Paris, 1867) (1) : c'est une surface quadricuspidale de huitième ordre et de huitième classe. Toutes les propriétés projectives, la position des quatre courbes doubles planes dans les faces du tétraèdre, la discussion de la réalité et de la non-réalité, se déduisent aisément de la représentation du paramètre. A ce système de surfaces appartiennent la surface développable et trois autres surfaces réglées du quatrième ordre, que l'on obtient en prenant l'intersection du système de sécantes de la courbe gauche et de la congruence de droites déterminée par deux arêtes opposées du tétraèdre polaire. Au moyen des valeurs du paramètre sur la courbe, on arrive directement à une représentation des génératrices de la surface qui con-

(1) Il y a lieu de rappeler aussi les belles recherches de M. Laguerre sur le même sujet insérées dans le *Journal de Liouville*, 2e série.

duit à une forme canonique pour l'étude, fondée sur la théorie des fonctions doublement périodiques, de la géométrie de ces surfaces d'espèce $p=1$. Dans son deuxième Mémoire, l'auteur traite brièvement de cette question et, finalement, porte ses recherches sur la figure la plus simple à une dimension, d'espèce $p=1$.

MÉLANGES.

A PROPOS D'UNE LETTRE DE FERMAT SUR LE FAMEUX PROBLÈME D'ADRIEN ROMAIN, RÉSOLU PAR F. VIÈTE;

PAR M. FRÉDÉRIC RITTER,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Dans la Communication si intéressante de divers documents inédits faite par M. C. Henry dans le *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche* publié par M. le prince B. Boncompagni (octobre 1879, p. 735-737), se trouve une Lettre de Fermat à Huygens, traitant du fameux problème d'Adrien Romain, résolu par François Viète. Importante à divers titres, cette Lettre contient cependant une allégation inexacte en ce qui concerne la généralité que le géomètre belge aurait voulu donner à la solution de la question proposée.

Le texte de la Lettre tel qu'il a été publié est assez incorrect; on y relève des fautes d'orthographe et de ponctuation, et, ce qui est plus grave, des fautes dans la notation algébrique, qui rendent sa lecture difficile.

Comme un grand nombre de personnes qui cultivent les Mathématiques sont peu habiles à comprendre les textes latins, nous croyons devoir donner ici la traduction de cette Lettre.

« *Pierre Fermat, du Parlement de Toulouse, à très excellent et très illustre Christian Huygens.*

» Il m'est arrivé l'année dernière d'examiner, avec plus d'attention que je ne l'avais encore fait, la fameuse réponse de François Viète au problème d'Adrien Romain. Étant tombé sur le passage du

sixième Chapitre où ce mathématicien, d'un esprit si pénétrant, se demande si Adrien Romain a jamais cherché à connaitre la loi de formation et les propriétés de son équation, je me suis demandé à mon tour si Viète avait trouvé et donné une solution suffisamment générale de cette fameuse équation. L'énoncé d'Adrien Romain, rectifié par Viète, est le suivant :

» *Étant donnée en nombres algébriques l'équation*

$$\begin{aligned} &45(1) - 3795(3) + 95634(5) - 1138500(7) + 7811375(9)\\ &\quad - 34512075(11) + 105306075(13) - 232676280(15)\\ &\quad + 384942375(17) - 488494125(19) + 483341800(21)\\ &\quad - 378658800(23) + 236030652(25) - 117679100(27)\\ &\quad + 46955700(29) - 14945040(31) + 3764565(33)\\ &\quad - 740459(35) + 11150(37) - 12300(39) + 945(41)\\ &\quad - 45(43) + 1(45) \end{aligned}$$

égal à un nombre donné, trouver la valeur de la racine.

» La traitant par sa méthode, Viète a sans doute ramené, d'une manière aussi élégante que très savante, la solution de cette question aux Sections angulaires, et il a construit avec un rare bonheur la Table que l'on trouve à la page 318 de l'édition d'Elzevir et que l'on peut étendre aussi loin qu'il plaira par la méthode qu'il a employée et qui permet de reconnaitre à quelles Sections angulaires se rapportent les équations du même type. Si, dans la série correspondant aux nombres impairs, on prend l'équation 1 C — 3 N égal à un nombre donné moindre que 2, la question est ramenée à la trisection d'un angle ([1]). De même, la résolution de l'équation 1 QC — 3 C + 5 N égal à un nombre donné moindre que 2 est ramenée à la division d'un angle en cinq parties égales ; enfin celle de l'équation 1 QQC — 7 QC + 14 C — 7 N égal à un nombre donné moindre que 2, est ramenée à la division d'un angle en sept parties égales. Et si vous prolongez indéfiniment la Table de Viète suivant la méthode indiquée par lui, l'équation proposée par Adrien Romain correspondra à celle qui occupe le rang marqué

([1]) Fermat emploie ici la notation de Viète qui désigne l'inconnue par N, son carré par Q, son cube par C, sa quatrième puissance par QQ, et ainsi de suite.

par le nombre 45. La solution de la question serait ainsi ramenée à la division d'un angle en quarante-cinq parties égales. Toutefois, il y a lieu de remarquer que, pour toutes ces équations on ne peut faire usage des Sections angulaires et de la méthode de Viète, nous l'avons déjà dit, qu'au seul cas où le nombre donné qui doit être égalé aux nombres algébriques ne dépasse pas 2. Lorsque ce nombre est plus grand que 2, le mystère des Sections angulaires garde le silence, et l'on reconnait facilement que l'on ne peut plus en faire usage.

» Cependant Adrien avait posé d'une manière générale la question: *Etant donné le dernier terme, trouver le premier*. Ce n'est donc plus à Viète ni aux Sections angulaires, mais à d'autres, que l'on doit demander assistance. Dans le premier cas, nous l'avons déjà dit, lorsque 1 C — 3 N est égal à un nombre moindre que 2, la question est ramenée à la trisection de l'angle. Mais si 1 C — 3 N est égal, par exemple, à 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2, les analystes ne peuvent trouver la solution de l'équation proposée que par la méthode de Cardan; et pour tous les autres cas en nombre indéfini, trouver, si c'est possible, une solution au moyen de l'extraction des racines, c'est ce que jusqu'à ce jour aucun analyste n'a encore tenté de faire. Mais, très illustre Huygens, que tout ce qu'il est permis de découvrir dans cette partie de l'Algèbre soit placé sous vos auspices, vous pour lequel tous les savants ont, et avec raison, une profonde vénération, vous qu'ils considèrent comme l'homme le plus éminent en matières scientifiques.

» Soit donc proposé de faire 1 QC — 5 C + 5 N égal au nombre 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2. La méthode de Viète pour ce cas reste complètement muette. Cependant, et je l'affirme hardiment, on peut répondre d'une manière générale à la question d'Adrien pour toutes les équations contenues dans la Table, lorsque le nombre donné est plus grand que 2, et l'on peut toujours obtenir très commodément les solutions des équations proposées. J'ai en effet remarqué et je puis démontrer que, pour tous les cas dont je viens de parler, les équations peuvent être résolues comme les équations cubiques, que l'on ramène, par les méthodes de Cardan ou de Viète, à l'extraction de la racine cubique d'une racine carrée, savoir : les équations quadrato-cubiques à l'extraction de la racine quadrato-cubique d'une racine carrée; les équa-

tions quadrato-quadrato-cubiques à l'extraction de la racine quadrato-quadrato-cubique d'une racine carrée, et ainsi de suite, d'après la même loi. Soit, par exemple, 1 C — 3 N égal à 4; personne n'ignore que, par les méthodes dont il vient d'être parlé, la racine cherchée est égale à la racine cubique du binôme $2+\sqrt{3}$ + la racine cubique de l'apotome $2-\sqrt{3}$. Mais que l'on propose, comme dans l'exemple de Viète et d'Adrien Romain, de faire

$$1\,QC - 5\,C + 3\,N$$

égal à 4 ou à tout autre nombre plus grand que 2 : pour ce cas comme pour tous les autres compris dans la Table, quelque loin qu'on la prolonge, en représentant toujours la racine cherchée par $\frac{1\,Q+1}{N}$, cet artifice fera évanouir tous les termes homogènes de degré inférieur qui s'opposent à la résolution de l'équation par l'extraction d'une racine. Ainsi, dans le cas dont je m'occupe, la racine cherchée est égale à la racine quadrato-cubique du binôme $2+\sqrt{3}$ + la racine quadrato-cubique de l'apotôme $2-\sqrt{3}$. Si c'est l'équation 1 QQC — 7 QC + 14 C — 7 N correspondant au nombre 7 dans la Table de Viète, car c'est toujours l'exposant de la puissance la plus élevée que l'on doit considérer, qu'il faut faire égale au nombre 4, on représentera, comme dans le cas précédent, la racine cherchée par $\frac{1\,Q+1}{N}$, et, par cet artifice, on fera également disparaitre tous les termes homogènes qui s'opposent à la résolution par une simple extraction de racine, et la racine cherchée sera égale à la racine quadrato-quadrato-cubique du binôme $2+\sqrt{3}$ + la racine quadrato-quadrato-cubique de l'apotôme $2-\sqrt{3}$. Et ainsi de suite. Un savant aussi éminent que vous le reconnaîtra non seulement par expérience, mais le démontrera quand il lui plaira de le faire. C'est en effet une propriété des équations qui constituent la Table de Viète que, dans tous les cas où l'homogène de comparaison [1] est plus grand que 2, la solution est obtenue par une simple extraction de racines. Il se présente donc trois cas : ou le nombre

[1] *Homogeneum comparationis*, le terme connu. *Homogenea*, les termes homogènes, ceux qui renferment une puissance de l'inconnue.

donné qui doit être égal à l'expression analytique de la Table est 2, ou il est plus petit que 2, ou plus grand que 2. Dans le premier cas, le nombre cherché est le nombre 2 lui-même ; dans le deuxième, la question est ramenée par la méthode de Viète aux sections angulaires ; dans le troisième, on résout facilement la question par ma méthode, c'est-à-dire par une extraction de racines. Si donc l'expression analytique d'Adrien rapportée plus haut, $45(1) - 3795(3) + \ldots$, est égale à 4, la racine cherchée sera la racine quarante-cinquième du binôme $2 + \sqrt{3}$ + la racine quarante-cinquième de l'apotome $2 - \sqrt{3}$. Je ne crois pas devoir m'arrêter plus longtemps sur une question aussi claire et aussi bien établie par des exemples ; je dirai seulement que l'extraction de la racine quarante-cinquième ou la recherche de quarante-quatre moyennes proportionnelles entre deux quantités données peut être obtenue facilement par l'extraction successive de deux racines cubiques et d'une racine quadrato-cubique, ce qui est suffisamment indiqué par les deux facteurs 5 et 9 du nombre 45 ; 5 se rapporte en effet à une racine quadrato-cubique et 9 à deux racines cubiques successives, car le nombre 3 qui est l'exposant du cube, multiplié par lui-même, produit le nombre 9. On satisfait donc à la question telle que je l'ai posée en cherchant successivement deux moyennes proportionnelles entre deux nombres, puis en en cherchant quatre autres, ce qui revient au même que d'en chercher quarante-quatre entre deux nombres (¹). C'est du reste ainsi que Viète a trouvé le moyen de diviser un angle en quarante-cinq parties égales, qui donne la solution de la question ou de l'équation d'Adrien en la ramenant à celle de deux équations cubiques successives et d'une équation quadrato-cubique correspondant à deux trisections d'angles et à une quintusection. Je ne dirai rien ici des solutions multiples

---

(¹) En effet, on a

$$\div\!\div\, N : x : x^2 : x^3, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{N},$$

$$\div\!\div\, \sqrt[3]{N} : y : y^2 : y^3, \quad \text{d'où} \quad y = \sqrt[3]{\sqrt[3]{N}},$$

$$\div\!\div\, \sqrt[3]{\sqrt[3]{N}} : z : z^2 : z^3 : z^4 : z^5, \quad \text{d'où} \quad z = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{N}}}.$$

On obtient le même résultat avec la progression

$$\div\!\div\, N : u : u^2 : \ldots : u^{43} : u^{44} : u^{45}, \quad \text{d'où} \quad u = \sqrt[45]{N}.$$

de la question ou de l'équation proposée ; je n'en ai donné que la solution qui se présente la première ; quant aux autres, leur recherche est beaucoup plus laborieuse, j'en parlerai peut-être ailleurs si j'en ai le loisir. Adieu donc, très illustre, et conservez-moi votre amitié. »

Adresse : « Pour monsieur Huygens. »

La première partie de cette Lettre renferme une assertion qui est détruite par l'énoncé même du problème tel qu'il est donné par Adrien Romain ; c'est lorsque Fermat se pose la question « *An ipsemet Vieta æquationis illius famosæ satis generalem tradiderit et invenerit solutionem* », et plus loin lorsqu'il écrit « *Verum observandum est, in his omnibus æquationibus contingere, ut iis solum ipsarum casibus inserviant Sectiones angulares et methodus Vietæ in quibus numeris algebricis Tabulæ terminus binarium non excedit...* », et enfin « *Proposuerat tamen generaliter Adrianus, dato termino posteriore inveniendum esse priorem* ».

Si nous nous reportons à l'énoncé du problème d'Adrien Romain rapporté *textuellement* par Viète, « *ne immutato quidem commate* », comme il le dit lui-même dans sa réponse : *Ad problema* | *quod omnibus Mathematicis totius orbis* | *construendum proposuit* | *Adrianus Romanus* | *Franscisci* | *Vietæ* | *Responsum.* | Parisiis | apud Jametium Mettayer | Typographum Regium | 1595 », nous voyons qu'à la suite de cet énoncé le géomètre belge a eu soin de donner trois exemples avec leur solution, exemples qui devaient mettre les mathématiciens mis au défi sur la voie de la solution demandée :

« EXEMPLUM PRIMUM DATUM.

» *Sit terminus posterior* R bin 2 + R bin 2 + R bin 2 + R 2, *quæritur terminus prior.*

» SOLUTIO. — *Dico terminum priorem esse*

R bin 2 — R bin 2 + R bin 2 + R bin 2 + R bin 2 + R 3.

» EXEMPLUM SECUNDUM DATUM.

« *Sit terminus posterior*

R bin 2 + R bin 2 — R bin 2 — R bin 2 — R bin 2 — R 2,

quæritur terminus prior.

» SOLUTIO. — *Terminus prior est*

R bin 2 — R bin 2 + R bin 2 + R bin 2 + R bin 2 + R 3.

» EXEMPLUM TERTIUM DATUM.

» *Sit terminus posterior* R bin 2 + R 2, *quæritur terminus prior.*

» SOLUTIO. — *Terminus prior est*

R bin 2 — R quadrin 2 + R $\frac{3}{16}$ + R $\frac{15}{16}$ + R bin $\frac{1}{8}$ — R $\frac{5}{64}$.

» *Si in numeris absolutis solinomiis id proponere libuerit, sit posterior terminus*

$$R3\ \frac{4142.1356.2373.0950.4880.1688.7242.0969.8078.5696.7187.5375}{1.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000},$$

quæritur terminus prior.

» SOLUTIO. — *Terminus prior erit*

$$R\ \frac{27.4093\ 0490.8522.5243.1015.8831.2112.6838.8180}{1.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000.0000}.$$

» EXEMPLUM QUÆSITUM.

« *Sit posterior terminus*

R trinomia $1\frac{3}{4}$ — R $\frac{5}{16}$ — R bin $1\frac{7}{8}$ — R $\frac{45}{64}$,

quæritur terminus prior. Hoc exemplum omnibus mathematicis totius orbis ad construendum sit propositum. »

L'énoncé d'Adrien Romain, avec les exemples qui l'accompagnent, ne peut laisser aucun doute sur les intentions de son auteur. Il s'agit d'un exemple particulier; il en demande la solution et même il semble indiquer que cette solution *dépend* d'une construction géométrique (*ad construendum sit propositum*) et non de la résolution de l'équation proposée. Il eût été en effet puéril, dans l'état où se trouvait à cette époque la science du calcul, de demander à des mathématiciens de résoudre une équation du quarante-cinquième degré. La question proposée n'était donc qu'une espèce d'énigme qu'il fallait deviner; et, comme nous l'avons déjà dit et comme nous allons le démontrer, Adrien Romain, au moyen des trois exemples donnés, mettait tout simplement les chercheurs sur la voie.

A cette époque, les mathématiciens, non encore en possession des ressources de l'Algèbre moderne que Viète allait mettre à leur disposition, étaient obligés d'étudier et d'approfondir cet admirable dixième Livre d'Euclide, ce chef-d'œuvre de sagacité dans lequel le géomètre grec a posé les règles pour la transformation des radicaux carrés et bicarrés. Sa théorie des *binômes* et des *apotômes* formait alors une partie très importante de l'Algèbre ancienne; elle était exposée, développée et commentée dans de nombreux Traités, et nous la trouvons en Occident dès le XIIIe siècle, dans le Livre de l'*Abacus*, de Léonard de Pise. Au XVIe siècle, d'ailleurs, les recherches sur la quadrature du cercle et sur la détermination du rapport de la circonférence au diamètre étaient à l'ordre du jour, et nous avons établi récemment, au Congrès de l'Association scientifique tenu à Montpellier en 1879, la priorité de François Viète dans la détermination d'une valeur de ce rapport plus approchée que celle d'Archimède. Les géomètres connaissaient, comme les algébristes modernes connaissent certaines formules, un grand nombre d'expressions irrationnelles, notamment celles qui donnaient les côtés des polygones réguliers obtenus par la bissection successive des arcs des polygones de 4 et de 6 côtés et leurs cordes supplémentaires, expressions remarquables sous leur forme de radicaux successifs, ne renfermant que le nombre 2 pour les premiers et les nombres 2 et 3 pour les seconds.

Dans les données et les solutions des exemples d'Adrien Romain, il était facile pour eux de reconnaître :

Dans la donnée du premier $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, l'expression de la corde supplémentaire du polygone de trente-deux côtés, soustendant un angle de 168°45′; dans la solution

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}},$$

l'expression du côté du polygone de quatre-vingt-douze côtés obtenu par quatre bissections successives de l'arc de l'hexagone, correspondant à un arc de 3°45′;

Dans la donnée du second $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}}$, la corde du complément de l'arc du polygone de soixante-quatre côtés, égal à quinze fois 5°37′30″ ou à 84°22′30″, et, dans la solution $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$ le côté du polygone de cent quatre-vingt-douze côtés obtenu par cinq bissections de l'arc de l'hexagone, correspondant à un arc de 1°52′30″;

Dans la donnée du troisième $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, la corde supplémentaire du côté de l'octogone, sous-tendant un arc de 135°, et, dans la solution $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}}+\sqrt{\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{5}{64}}}}}$, une expression dérivée du côté du pentédécagone inscrit, c'est-à-dire le côté du polygone de cent vingt côtés obtenu par trois bissections successives de l'arc du pentédécagone et correspondant à un arc de 3°.

Dans chacune de ces solutions, l'arc correspondant au côté donné est égal à quarante-cinq fois l'arc correspondant au côté cherché.

Enfin, dans la donnée du problème proposé,

$$\sqrt{1\tfrac{3}{4}-\sqrt{\tfrac{15}{16}}-\sqrt{1\tfrac{7}{8}-\sqrt{\tfrac{45}{64}}}},$$

une des formes de l'expression du côté du pentédécagone inscrit, correspondant à un arc de 24°.

Les géomètres provoqués par Adrien Romain devaient donc se demander si la solution ne serait pas la corde de l'arc quarante-

cinquième partie de l'arc du pentédécagone, c'est-à-dire de l'arc de $32'$. Cette corde ne peut pas, comme dans les solutions précédentes, être exprimée sous forme de radicaux, mais elle est égale à $2 \sin \frac{1}{2} 32'$, et, par conséquent, sa valeur est calculable au moyen des Tables trigonométriques; et c'est certainement pour indiquer ce mode de solution qu'Adrien Romain a ajouté dans son troisième exemple, à la donnée et à la solution sous forme de radicaux, leur valeur en nombres (*in numeris absolutis solinomiis*).

Telle est, d'après nous, la marche qui, dans l'esprit du géomètre belge, devait être suivie pour répondre à la question qu'il proposait aux mathématiciens du monde entier.

François Viète résolut le problème d'une autre manière et à première vue, sans être arrêté par une faute d'impression. « *Problema Adriani ut legi ut solvi, nec me malus abstulit error* », dit-il en tête de sa réponse. Il avait, en effet, découvert la formule générale de la corde d'un arc sous-multiple d'un arc donné en fonction de la corde de cet arc; en jetant les yeux sur l'équation proposée, il reconnut de suite le cas de la division d'un arc en quarante-cinq parties égales et dans la corde donnée le côté du pentédécagone inscrit : il put donc immédiatement faire savoir à Adrien Romain que la solution de son problème était donnée par la valeur de $2 \sin 16'$. Mais il avait également découvert qu'à une corde donnée correspondaient non seulement l'arc sous-tendu par cette corde, mais encore tous les arcs formés de cet arc fondamental, augmenté d'un nombre quelconque de circonférences, et que, par conséquent, les cordes différentes de la quarante-cinquième partie de chacun de ces arcs étaient autant de solutions de la question. On sait que ces cordes sont au nombre de quarante-quatre, dont vingt-deux positives et vingt-deux négatives. Mais Viète n'envoya à Adrien Romain, le lendemain, que les vingt-deux autres solutions positives, car à cette époque on rejetait sans l'examiner toute solution négative.

Les circonstances particulières qui se produisirent à propos de la solution de ce problème par F. Viète firent grand bruit, et elles nous ont été conservées par Tallemant des Réaux dans ses *Historiettes*. Nous avons rapporté ailleurs cet intéressant récit; nous nous contenterons de le résumer ici en quelques lignes.

Henri IV faisait à Fontainebleau, où son Conseil d'État l'avait

suivi, à l'ambassadeur des États de Hollande, les honneurs de son royaume, en lui nommant ses hommes les plus remarquables. L'ambassadeur ayant fait observer qu'il n'y avait pas de mathématiciens en France, puisque Adrien Romain, dans son défi aux géomètres du monde entier, n'en nommait aucun ([1]), le roi lui répondit qu'il en avait un et très excellent. Il fait appeler Viète. On lui présente le problème d'Adrien Romain. Après l'avoir lu, il en crayonne immédiatement une solution qu'il remet à l'ambassadeur, et le lendemain il lui en envoie vingt-deux autres. Adrien Romain, justement émerveillé, quitte brusquement Louvain et ses affaires pour se rendre à Paris et faire connaissance avec le très excellent mathématicien du roi. Viète était parti pour Fontenay-le-Comte : Adrien Romain l'y suit et passe un mois avec lui. N'est-il pas évident que, si F. Viète n'avait pas résolu, et au delà, le problème tel que le géomètre belge l'avait compris, celui-ci n'aurait pas tout quitté pour accourir en toute hâte se mettre en relation avec lui?

Pour nous il est donc incontestable que l'assertion de Fermat au sujet de la généralité du problème en question n'est aucunement fondée. Il y a plus : la solution si remarquable du grand géomètre de Toulouse, il l'avoue lui-même, ne peut s'appliquer à aucun des exemples donnés par Adrien Romain à la suite de l'énoncé de son problème, car, dans tous, le terme connu est une corde d'un cercle dont le rayon est l'unité, par conséquent plus petite que 2. Or, dans ce cas, la solution de Fermat conduit à une expression imaginaire irréductible, quoique toutes les racines de l'équation soient réelles. En effet, sa méthode, basée sur une propriété de l'équation des Sections angulaires qui permet d'appliquer pour la recherche de l'une de ses racines un procédé de résolution analogue à celui des équations réciproques, consiste à poser dans cette équation

$$x = \frac{y^2+1}{y} \quad \text{ou} \quad y + \frac{1}{y}.$$

En désignant par p le terme connu, l'équation transformée

([1]) Il serait intéressant de connaître la liste des mathématiciens du monde entier donnée en tête du défi d'Adrien Romain, si, par un hasard heureux, quelque exemplaire de ce défi se trouvait aux mains d'un bibliophile ou dans quelque bibliothèque.

devient

$$y^n + \frac{1}{y^n} = p;$$

elle a pour racine

$$y = \sqrt[n]{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}},$$

d'où

$$x = \sqrt[n]{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}} + \sqrt[n]{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - 1}}.$$

Or, lorsque $p < 2$, la valeur de x se présente sous la forme imaginaire irréductible, et cependant elle est réelle.

Un mot seulement sur les dernières lignes de la Lettre de Fermat; nous pensons que si ce grand géomètre avait tenté de chercher au delà du quatrième degré les autres solutions de l'équation des Sections angulaires, il n'y serait pas arrivé; car, après avoir abaissé le degré de l'équation au moyen de la racine donnée par sa méthode, on retombe sur une équation ordinaire d'un degré supérieur, compliquée de radicaux, et que l'on ne peut résoudre que par approximation.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ;

PAR M. KRONECKER.

I.

Soient r et s deux nombres entiers positifs ou négatifs, l, m, n trois nombres impairs; soient enfin $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, les signes étant choisis de façon que γl, δm, εn soient positifs. Si l'on pose, en généralisant une expression donnée par Eisenstein,

$$(\mathfrak{A}) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}} \quad \left[k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1)\right],$$

on peut remarquer tout d'abord que ce produit conserve la même

valeur lorsqu'on l'étend à tous les systèmes de $\frac{1}{2}(\varepsilon n - 1)$ nombres k, qui forment, pour ainsi dire, un demi-système de résidus relativement au module n, c'est-à-dire dont tous les restes, pris de manière à être, en valeur absolue, moindres que $\frac{\varepsilon n}{2}$, sont différents. Le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$, défini par l'équation ($\mathcal{A}$), jouit des propriétés suivantes.

1. Sa valeur est zéro ou ± 1 : elle est zéro si r et n ont un commun diviseur, car alors un des facteurs du numérateur s'annule évidemment ; elle est ± 1 quand les deux nombres r et n sont premiers entre eux, car chaque facteur du numérateur coïncide, abstraction faite du signe, avec un facteur du dénominateur.

2. La définition conduit immédiatement aux relations

$$(A)\quad \begin{cases} \left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{r}{-n}\right), \quad \left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{r'}{n}\right) \quad \text{si} \quad r\equiv r' (\text{mod.}\, n), \\ \left(\frac{1}{n}\right)=1, \quad \left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}. \end{cases}$$

Or, comme on a

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\prod_k 2\cos\frac{2k\pi}{n}, \quad \left[k=1,\ 2,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1)\right],$$

le nombre des facteurs négatifs $\cos\frac{2k\pi}{n}$ étant $\frac{1}{4}(\varepsilon n \pm 1)$ et ayant la même parité que $\frac{1}{8}(n^2-1)$, il s'ensuit

$$\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

3. La remarque faite au début sur les systèmes des nombres k montre que l'on peut écrire

$$\left(\frac{s}{n}\right)=\prod_k \frac{\sin\frac{2rsk\pi}{n}}{\sin\frac{2rk\pi}{n}} \quad \left[k=1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(\varepsilon n-1)\right],$$

et par suite que l'on a

$$(A') \qquad \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{s}{n}\right)=\left(\frac{rs}{n}\right).$$

4. En prenant $r=m$ et en mettant à la place des nombres k les nombres $\frac{1}{2}(n+1)k$, il vient

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\prod_k \frac{\sin\frac{mk\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}},$$

où les k forment un demi-système de résidus par rapport au module n; puis, en utilisant les relations

$$\delta\frac{\sin m v}{\sin v}=\prod_h 2\sin\left(\frac{h\pi}{m}+v\right)2\sin\left(\frac{h\pi}{m}-v\right),$$

$$\delta^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{\delta}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{\delta m}{n}\right),$$

on arrive à l'équation

$$(\mathfrak{B}) \qquad \left(\frac{\delta m}{n}\right)=\prod 2\sin\left(\frac{h\pi}{m}+\frac{k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{h\pi}{m}-\frac{k\pi}{n}\right),$$

où le produit s'étend aux $\frac{1}{2}(\delta m-1)$ nombres h et aux $\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)$ nombres k qui forment les uns un demi-système de résidus par rapport au module m, les autres un demi-système de résidus par rapport au module n.

L'équation ($\mathfrak{B}$) subsiste, il convient de le remarquer, lors même que m est un nombre pair; toutefois, il faut prendre alors pour k seulement des nombres pairs, remplacer h dans un seul des deux facteurs du second membre par $\frac{1}{2}m$, et enfin, partout ailleurs, faire parcourir à h dans les deux facteurs $\frac{1}{2}\delta m-1$ nombres qui, en valeur absolue, soient incongrus entre eux et avec $\frac{1}{2}m$ par rapport au module m.

De l'équation ($\mathfrak{B}$) résulte immédiatement l'équation de réciprocité

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)\left(\frac{\varepsilon n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(\delta m-1)(\varepsilon n-1)},$$

ou

(B) $$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)+\frac{1}{4}(\delta-1)(\varepsilon-1)}.$$

5. En posant $l=r+mn$ ou $l=r$, selon que r est pair ou impair, l sera impair et le produit

$$\left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{mn}{l}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{l}{mn}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$$

sera une puissance de -1 dont l'exposant sera

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(mn-1)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta\varepsilon-1);$$

de même, le produit $\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{m}{l}\right)\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{n}{l}\right)$ sera une puissance de -1 dont l'exposant sera

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m+n-2)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta+\varepsilon-2).$$

La différence des deux exposants

$$\tfrac{1}{4}(l-1)(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{4}(\gamma-1)(\delta-1)(\varepsilon-1)$$

étant paire, on a

$$\left(\frac{l}{mn}\right)=\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right),$$

et par conséquent

(C) $$\left(\frac{r}{mn}\right)=\left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{n}\right).$$

6. Les nombres k formant un demi-système de résidus par rapport au module n, à chaque nombre k correspond un nombre k' pour lequel on a

$$rk\equiv\pm k' \pmod{n},$$

et par suite

$$rk\equiv k'\frac{\sin\frac{2rk\pi}{n}}{\sin\frac{2k'\pi}{n}} \pmod{n};$$

De là résulte

$$r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)}\prod_k k \equiv \left(\frac{r}{n}\right)\prod_k k \pmod{n}.$$

Si n est un nombre premier, le produit Πk n'est pas divisible par n, et dans ce cas on a, par conséquent,

$$\text{(D)}\qquad \left(\frac{r}{n}\right) \equiv r^{\frac{1}{2}(\varepsilon n-1)} \pmod{n}.$$

Cette dernière congruence montre que, si n est un nombre premier, le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ défini par l'équation $(\mathcal{A})$ coïncide avec le symbole de *Legendre*, et ensuite il résulte de l'équation (C) que, si n est un nombre quelconque, le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ est identique avec celui qu'a introduit *Jacobi* en généralisant le symbole de Legendre.

II.

m et n étant supposés premiers entre eux, l'interprétation arithmétique de l'équation $(\mathcal{A})$ donne la généralisation du lemme de *Gauss*, qui a été communiquée par M. *Schering*. Si en effet les nombres k', k'', ... forment un demi-système de résidus relativement au module n, et que l'on ait toujours pour ce module

$$rk' \equiv \rho' k'', \quad rk'' \equiv \rho'' k''', \quad \ldots \quad (\rho' = \pm 1, \quad \rho'' = \pm 1, \quad \ldots),$$

l'équation $(\mathcal{A})$ donne pour le symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ la définition arithmétique

$$(\mathcal{A}')\qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \prod \rho,$$

entièrement équivalente à celle qui apparaît d'abord sous une forme transcendante.

L'interprétation arithmétique de l'équation $(\mathcal{B})$, si l'on prend

$$h = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(\delta m - 1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(\varepsilon n - 1),$$

permet de définir le signe de $\left(\frac{\delta m}{n}\right)$ par le signe du produit

$$\prod_{h,k}\left(\frac{h^2}{m^2}-\frac{k^2}{n^2}\right),$$

ou, si l'on veut, par les conditions

$$\left(\frac{\delta m}{n}\right)=\pm 1,\quad \left(\frac{\delta m}{n}\right)\prod_{h,k}\left(\frac{h}{\delta m}-\frac{k}{\varepsilon n}\right)>0.$$

Si l'on suppose, comme on le fera désormais pour plus de simplicité, m et n positifs, le signe de $\left(\frac{m}{n}\right)$ est le signe de

$$(\mathcal{B}')\qquad \prod\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right),$$

où le produit s'étend aux valeurs

$$h=1,\ 2,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(m-1),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(n-1).$$

Le produit $(\mathcal{B}')$, ainsi que celui qui figure dans l'équation $(\mathcal{B})$, s'annule si m et n ne sont pas premiers entre eux ; de même, la définition du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ donnée par l'équation $(\mathcal{A}')$ peut être énoncée de telle manière que la coïncidence avec celle qui résulte de l'équation $(\mathcal{A})$ soit encore conservée quand r et n ne sont pas premiers entre eux. La définition arithmétique du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$ donnée par l'équation $(\mathcal{A}')$ conduit aussi immédiatement que la définition $(\mathcal{A})$ aux propriétés qu'expriment les équations (A) et (A') ; d'un autre côté, la définition arithmétique $(\mathcal{B}')$ met, tout aussi bien que la définition $(\mathcal{B})$, l'équation de réciprocité (B) en évidence : en sorte que, pour lier aux définitions arithmétiques $(\mathcal{A}')$ et $(\mathcal{B}')$ toute l'analyse déduite dans le § I des définitions correspondantes $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$, et pour constituer de cette manière la théorie complète du symbole $\left(\frac{r}{n}\right)$, il ne manque plus qu'un procédé purement arithmétique pour passer de l'une à l'autre ; on y parvient aisément comme il suit.

Dans la définition $(\mathcal{A}')$, prenons pour les nombres k', k'', ... les nombres impairs positifs moindres que $n-1$; chaque produit km

sera congru suivant le module n à la valeur positive ou négative de l'un des nombres k suivant que la partie entière $E\left(\frac{km}{n}\right)$ de $\left(\frac{km}{n}\right)$ sera paire ou impaire. Par suite, le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ représente une puissance de -1 dont l'exposant est

$$E\left(\frac{m}{n}\right)+E\left(\frac{3m}{n}\right)+E\left(\frac{5m}{n}\right)+\cdots+E\left[\frac{(n-2)m}{n}\right],$$

et cette somme, en vertu de la relation

$$E\left(\frac{am}{n}\right)+E\left[\frac{(n-a)m}{n}\right]=m-1 \quad (0<a<n),$$

peut être remplacée par

$$\sum_k E\left(\frac{km}{n}\right) \quad [k=1,\, 2,\, \ldots,\, \tfrac{1}{2}(n-1)].$$

Or c'est évidemment cette même puissance de -1 qui détermine le signe du produit ($\mathfrak{B}'$), puisque $E\left(\frac{km}{n}\right)$ est le nombre de valeurs de h pour lesquelles $\frac{h}{m}-\frac{k}{n}$ est négatif.

Ce passage de la définition ($\mathfrak{A}'$) à la définition ($\mathfrak{B}'$) remplace, au point de vue arithmétique, le passage de la définition ($\mathfrak{A}$) à la définition ($\mathfrak{B}$) obtenu par la méthode d'Eisenstein au moyen de la formule qui donne $\sin m v$; de même, il remplace chacune des différentes déductions qui, partant du lemme de Gauss, conduisent à la loi de réciprocité. Mais le nœud de toutes les démonstrations de la loi de réciprocité qui rentrent dans cette catégorie apparaîtra plus nettement encore en laissant, comme nous le ferons désormais, le lemme de Gauss de côté et en s'arrêtant à la définition ($\mathfrak{B}'$).

III.

Le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ relatif aux nombres positifs impairs m, n étant défini par le signe de

$$\prod\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \quad \begin{bmatrix} h=1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{1}{2}(n-1) \end{bmatrix},$$

l'équation de réciprocité

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

résulte immédiatement de cette définition, ainsi que la relation

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\Sigma_k \mathrm{E}\left(\frac{km}{n}\right)}\ \left[k=1,2\ldots,\tfrac{1}{2}(n-1)\right].$$

De là résulte aussi que, pour les nombres positifs impairs l et m, congrus entre eux suivant le module n et par suite suivant le module $2n$, on a

$$(\beta)\qquad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right);$$

mais, dans le cas où $l\equiv -m$ (mod. n), on aura

$$(\beta')\qquad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Si maintenant on a $km\equiv \pm k'$(mod. n), en désignant les nombres k' ou $n-k'$ suivant les deux cas par r, on aura

$$\mathrm{E}\left(\frac{k'm}{n}\right)=l\mathrm{E}\left(\frac{km}{n}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{lr}{n}\right)$$

et

$$\mathrm{E}\left(\frac{lr}{n}\right)+\mathrm{E}\left[\frac{l(n-r)}{n}\right]=l-1;$$

ainsi

$$\mathrm{E}\left(\frac{klm}{n}\right)\equiv \mathrm{E}\left(\frac{km}{n}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{k'l}{n}\right)\quad (\text{mod } 2),$$

et par suite

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{lm}{n}\right)=\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right).$$

En appliquant à chacun des trois symboles l'équation de réciprocité (α) et en permutant l avec n, on parvient, comme dans le § I, 5, à la relation

$$(\gamma')\qquad \left(\frac{l}{mn}\right)=\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right),$$

qui montre que le symbole défini précédemment sera identique avec celui de Legendre-Jacobi si, pour le nombre premier n, le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est $+1$ ou -1, suivant le caractère quadratique de m par rapport au module n. Or l'équation (γ), pour $m = l$, jointe à l'équation (β), montre d'abord que, pour tout résidu quadratique l de n, on a en effet $\left(\frac{l}{n}\right) = 1$; si maintenant pour un seul nombre m le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est négatif, m sera nécessairement non-résidu, et le symbole sera -1 pour tous les non-résidus, ainsi que cela résulte des équations (β) et (γ), qui montrent qu'alors on aura

$$\left(\frac{lm}{n}\right) = -1$$

si l est résidu quadratique : or lm peut représenter tous les non-résidus. Il ne reste plus qu'à prouver que pour tout nombre n il existe un nombre m qui satisfait à l'équation $\left(\frac{m}{n}\right) = -1$. Soit d'abord $n \equiv -1 \pmod{4}$; il suit de l'équation (β') que pour $m = 2n - 1$ le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ est négatif; si, en second lieu, $n \equiv 5 \pmod{8}$ et si l'on prend $m = \frac{1}{2}(n+1)$, on aura, à cause de (β'),

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{2m-n}{m}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1,$$

et par suite, à cause de (α),

$$\left(\frac{m}{n}\right) = -1.$$

En troisième lieu, si le nombre n est de la forme $8\nu + 1$, supposons que pour tous les nombres inférieurs à n' existent des nombres m satisfaisant à la condition imposée : les développements précédents prouvent l'identité du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ avec celui de Legendre-Jacobi pour *tous* les nombres m et n inférieurs à n'. Or le théorème de Gauss (*Disqu. arithm.*, sect. IV, art. 129) montre qu'il y a toujours au moins *un* nombre premier m inférieur à $2\sqrt{n'}$ par rapport auquel

n' est non-résidu quadratique : dès lors, les deux nombres positifs m et $n' - 2m$ étant inférieurs à n', $\left(\frac{n'-2m}{m}\right)$ est identique au symbole de Legendre-Jacobi, et par conséquent négatif, et l'équation (β) donne

$$\left(\frac{n'-2m}{m}\right) = \left(\frac{n'}{m}\right) = -1;$$

et enfin, en vertu de l'équation de réciprocité, on aura

$$\left(\frac{m}{n'}\right) = -1.$$

L'existence de ce nombre m, pour le nombre n', complète la démonstration, par voie d'induction, de l'identité du symbole défini par le signe du produit

$$\prod\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \quad \begin{bmatrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-1) \end{bmatrix}$$

avec le symbole de Legendre-Jacobi.

Les développements qui précèdent constituent donc une démonstration de la loi de réciprocité qui appartient essentiellement à la même catégorie que la troisième et la cinquième démonstration de Gauss. Elle a cela de commun avec la première démonstration de Gauss qu'elle ne sort point du domaine de la proposition à démontrer ; elle lui emprunte en outre son principal point d'appui, à savoir le théorème de l'article 129 des *Disquisitiones arithmeticæ*, et aussi, du moins en partie, sa marche inductive. Naturellement la troisième et la cinquième preuve de Gauss, et toutes celles qui rentrent dans cette catégorie, peuvent être établies de la même façon que les développements précédents et débarrassées du lemme de l'article 108 des *Disquisitiones arithmeticæ*. Si l'on voulait se rattacher à la cinquième démonstration de Gauss, il faudrait faire abstraction du § I, utiliser seulement le contenu du § II, où l'équation de réciprocité (α) est établie en regardant le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ relatif à deux nombres premiers entre eux m, n comme défini par le signe du produit des résidus par rapport au module n, pris en valeur absolue

moindre que $\frac{n}{2}$, des nombres

$$m,\ 2m,\ 3m,\ldots,\tfrac{1}{2}(n-1)m.$$

De cette définition du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ résultent immédiatement les équations (β), (β'), (γ), et l'on a tout ce qu'il faut pour établir comme plus haut l'identité du symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ avec celui de Legendre-Jacobi, sans avoir besoin, comme dans l'article 1 de la cinquième preuve de Gauss, d'invoquer le lemme de l'article 106 des *Disquisitiones*. Or, à la place de ce lemme, on utilise la plus importante des propositions sur lesquelles s'appuie la première preuve de Gauss. Que ce soit justement cette proposition à l'aide de laquelle on puisse éviter les congruences de degré supérieur qui figurent dans le lemme, cela me semble éclairer une fois de plus le caractère profond de cette déduction si singulière et si cachée qui a conduit pour la première fois à la démonstration rigoureuse de la loi de réciprocité et qui, tendant directement au but en surmontant tous les obstacles, se présente comme une épreuve de force du génie de Gauss.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HABICH (E.-J.). — ÉTUDES CINÉMATIQUES. Paris, Gauthier-Villars, 1879. In-8°, 95 pages.

Sous ce titre M. Habich vient de publier trois Mémoires, dont le premier est relatif au principe des aires, le second à la courbe de poursuite et le troisième aux accélérations d'un ordre quelconque dans le mouvement d'une figure plane dans son plan. Le sujet du premier Mémoire est d'étudier les droites qui, en accompagnant un point dans son mouvement, décrivent des aires proportionnelles aux temps entre la trajectoire et leurs enveloppes respectives, et de démontrer que l'accélération ne peut coïncider avec une de ces droites que dans le cas où elle passe par un centre fixe. On pourrait arriver, comme l'indique M. Habich, à ces résultats en partant du théorème fondamental très simple que *le point de contact avec son enveloppe d'une droite perpendiculaire au rayon de courbure de la trajectoire et tracée par le point dont la distance à la trajectoire est inversement proportionnelle à la vitesse se trouve sur la direction correspondante de l'accélération.*

Dans son étude, que M. Habich étend aux trajectoires quelconques, il emploie des coordonnées particulières, auxquelles il donne le nom de *tangentielles polaires*, et qui sont une généralisation des coordonnées polaires ordinaires, généralisation qui consiste à supposer que le rayon vecteur, au lieu de passer constamment par un centre fixe, reste tangent à une courbe donnée.

Le second Mémoire, relatif à la *courbe de poursuite*, a pour objet de donner une solution générale de cette question, à quoi se prêtent exceptionnellement les coordonnées de M. Habich.

La question est de *déterminer les relations qui doivent exister entre les trajectoires parcourues par deux mobiles dont les vitesses et les angles de relèvement sont liés, à chaque instant du mouvement, par des relations connues.*

Par l'angle de relèvement, terme de marine, on comprend l'angle formé par la droite qui unit les deux mobiles avec la direction de leurs vitesses.

M. Habich fait voir que la question revient, dans le système tan-

gentiel polaire, à la transformation définie par les deux relations

$$F_1\left(\frac{n}{n_1}, \mu, \mu_1\right)=0,$$

$$F_2\left(\frac{n}{n_1}, \mu, \mu_1\right)=0,$$

où n et n_1 sont les longueurs des normales, et μ et μ_1 les angles de relèvement ou leurs compléments.

Le cas de la courbe de poursuite ordinairement considéré est comprs dans la forme particulière

$$F_1\left(\frac{n}{n_1}, \mu\right)=0, \quad \mu_1=\frac{\pi}{2}.$$

M. Habich donne plusieurs applications et étudie, en outre, la *courbe du chien* d'une manière plus générale et différente de ce qu'on fait; il donne le moyen de trouver son équation entre le rayon de courbure et l'angle de déviation.

Parmi les diverses questions traitées dans cette étude, nous remarquerons particulièrement le théorème qui a pour objet de déterminer le point de contact avec son enveloppe d'une droite qui coupe deux courbes données sous des angles μ et μ_1, liés par une relation quelconque

$$f(\mu, \mu_1)=0.$$

En posant

$$\frac{df}{d\mu_1}:\frac{df}{d\mu}=a,$$

nous énoncerons, d'après M. Habich, le théorème suivant :

Pour avoir le point de contact d'une droite mobile MM_1 *qui rencontre deux courbes* (T) *et* (T_1) (*leurs normales*) *sous des angles liés par une relation quelconque, on abaissera du centre de courbure* K_1 *de la courbe* (T_1) *une perpendiculaire* K_1P *sur la droite* MM_1 *et on la prolongera de manière à rencontrer en* H *la droite tracée par le point* M_1 *parallèlement à la normale en* M *à la courbe* (T). *Portant maintenant à partir du pied* P *de la perpendiculaire, dans le sens* PH *ou en sens opposé, suivant que* $a \gtrless 0$, *une longueur* $PI = a.PH$, *on déterminera un point* I *tel*

que la droite qui le réunit avec le centre de courbure K de la ligne (T) rencontre la droite mobile MM_1 au point de contact cherché.

L'auteur donne de ce théorème une démonstration géométrique très simple et l'applique à plusieurs cas particuliers.

Le troisième et dernier Mémoire a pour objet l'étude des accélérations des divers ordres dans le mouvement d'une figure plane dans son plan.

Comme introduction, M. Habich étudie les conditions de l'équilibre et du mouvement d'un point M soumis à l'action des forces proportionnelles aux distances aux centres fixes et inclinées sur ces droites d'un angle constant. Il démontre que la question de l'équilibre se ramène à considérer le point M comme soumis uniquement à deux forces proportionnelles aux distances à deux centres particuliers Ω_r et Ω_p, et dirigées la première suivant $M\Omega_r$ et la seconde perpendiculairement à $M\Omega_p$, et que par suite le centre de l'équilibre Ω se trouve sur la circonférence tracée sur $\Omega_r\Omega_p$ comme diamètre, etc. Dans l'étude du mouvement, qui se réduit à celui qui serait produit sous l'action d'une force proportionnelle à ΩM et inclinée d'un angle constant sur cette droite, sont compris comme cas particuliers tous ceux qui se produisent sous l'action des attractions et répulsions proportionnelles aux distances aux centres.

A la fin de l'étude, M. Habich ajoute des observations sur le cas général du mouvement d'un point soumis à une force quelconque, mais qui forme un angle constant avec le rayon vecteur partant du pôle. Il étudie avec beaucoup de détails la spirale logarithmique, qui est une solution particulière (intégrale particulière), dans le cas où la force est proportionnelle à une puissance quelconque de sa distance au centre.

Passant à la question du mouvement d'une figure plane dans son plan, qui revient au roulement d'une certaine courbe (C'_1) du plan mobile sur une courbe (C) du plan fixe, M. Habich commence par le cas simple du mouvement que M. Resal appelle *géométrique* et qui est caractérisé par la vitesse angulaire constante. Dans ce cas, les positions des centres instantanés des accélérations ne dépendent que des relations géométriques, des rayons de courbure successifs, des lignes (C_1) et (C'_1) correspondant au point de contact, et, par

conséquent, ces centres persistent dans leurs positions, quelle que soit la relation de l'angle de rotation avec le temps, si les courbes (C_1) et (C'_1) et leurs positions relatives restent les mêmes.

Passant maintenant au cas général où la vitesse angulaire est variable avec le temps, M. Habich démontre que l'accélération d'un ordre quelconque d'un point M de la figure mobile dépend de la position des centres instantanés du mouvement géométrique et de la relation qui lie l'angle de rotation avec le temps, et il résume cette dépendance comme il suit :

L'accélération de l'ordre n d'un point M *de la figure mobile est la résultante de n composantes relatives aux centres instantanés géométriques jusqu'à l'ordre n inclusivement, ces composantes étant proportionnelles aux distances du point* M *à ces centres, et leur direction perpendiculaire ou parallèle à ces droites suivant que le centre est d'ordre impair ou pair.*

Par ce théorème, la question des accélérations se trouve ramenée à celle des forces, étudiée dans l'Introduction.

Comme application, M. Habich considère les accélérations ordinaires (du second ordre) et donne comme exemple spécial le mouvement conchoïdal.

Nous citerons ici le cas particulier du mouvement d'une droite qui représenterait le rayon vecteur d'une courbe et qui satisferait dans son mouvement au principe des aires. M. Habich arrive dans ce cas à une nouvelle expression de l'accélération centrale,

$$j = 4C^4 \frac{l^2}{r^5},$$

où C est la vitesse aréolaire constante, r le rayon vecteur et l la longueur de la tangente menée du point mobile M à un cercle particulier. Ce dernier a pour diamètre la longueur de la normale polaire de la courbe lieu de l'extrémité N de la sous-normale de la trajectoire, prise sur la direction de la normale, mais symétriquement par rapport au point N.

En terminant ce résumé de la publication de M. Habich, nous exprimons le regret que ces intéressantes et originales études n'aient pas été revues sur les épreuves par leur auteur et ainsi n'aient pu

échapper à certaines erreurs de détail qui ne se rencontrent pas dans les originaux espagnols (¹).

MASCHKE. — UEBER EIN DREIFACH ORTHOGONALES FLÄCHENSYSTEM GEBILDET AUS FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG. Inaugural-Dissertation. Goettingen, 1880.

Dans le Tome 82 du *Journal de Borchardt,* M. A. Wangerin s'est occupé du système, connu depuis longtemps, formé de cyclides homofocales. Il en a découvert une propriété nouvelle et fort importante en prouvant que l'on peut obtenir une infinité de solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

de la forme $N f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$, où ρ, ρ_1, ρ_2 sont les paramètres des trois familles de surfaces, où N désigne une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et où $f(\rho), f_1(\rho_1), f_2(\rho_2)$ sont trois fonctions devant satisfaire à des équations linéaires du second ordre qui contiennent une même constante arbitraire. M. Darboux, après avoir vérifié ce résultat par une méthode qui lui est propre, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* s'est proposé de rechercher tous les systèmes orthogonaux jouissant d'une propriété analogue, et il a vu que ces systèmes devaient avoir comme première propriété que la distance de deux points infiniment voisins fût donnée par une expression de la forme

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(S_1 S_2 d\rho^2 + S S_2 d\rho_1^2 + S S_1 d\rho_2^2),$$

où S_i désigne une fonction ne dépendant pas de la variable ρ_i. En d'autres termes, le système triple orthogonal devait être composé *exclusivement* de surfaces susceptibles d'être divisées en carrés infi-

(¹) Nous apprenons par M. Gauthier-Villars que l'auteur a envoyé un erratum qui sera joint, et qu'il se propose de continuer la publication de ses études cinématiques.

niment petits par leurs lignes de courbure. Or, dans un beau Mémoire inséré au *Journal de Liouville* en 1844 (t. IX, p. 124), M. Bertrand avait reconnu que cette propriété géométrique appartient nécessairement à tous les systèmes isothermes, ce qui avait conduit, en 1866, M. Darboux à rechercher tous les systèmes orthogonaux formés de surfaces pouvant être découpées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Le beau théorème de M. A. Wangerin donnant encore plus d'intérêt à la question que s'était proposée M. Darboux, ce géomètre a repris en 1878 sa première solution restée incomplète, et nous avons indiqué (¹) les résultats qu'il a obtenus.

Dans sa Dissertation inaugurale, M. Maschke s'est proposé l'étude géométrique de l'un des systèmes trouvés par M. Darboux, celui pour lequel la distance de deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{(\rho_1-\rho_2)^2 d\rho^2}{m\rho^2+n\rho+p} + \frac{(\rho_2-\rho)^2 d\rho_1^2}{m_1\rho_1^2+n_1\rho_1+p_1} + \frac{(\rho-\rho_1)^2 d\rho_2^2}{m_2\rho_2^2+n_2\rho_2+p_2}\right],$$

les constantes m, n, p, ... satisfaisant aux conditions

$$m + m_1 + m_2 = 0,$$
$$n + n_1 + n_2 = 0,$$
$$p + p_1 + p_2 = 0.$$

La marche suivie par l'auteur est synthétique; il remarque qu l'on connaît déjà un système triple orthogonal formé de surfaces lignes de courbure plane, et que dans ce système, dont on doit l connaissance à M. Darboux, les trois quantités H, H_1, H_2 de Lam ont pour expressions

$$H = -\frac{R'}{\sqrt{\rho}} + \frac{R + R_1 + R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho}},$$
$$H_1 = -\frac{R'_1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{R + R_1 + R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho_1}},$$
$$H_2 = -\frac{R'_2}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{R + R_1 + R_2}{(\rho+\rho_1+\rho_2)\sqrt{\rho_2}},$$

(¹) *Bulletin*, III_2, 224 et suiv.

où R_i désigne une fonction de ρ_i, tandis que les coordonnées rectangulaires sont données par les formules

$$x = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho} + \int \frac{R' d\rho}{\sqrt{\rho}},$$

$$y = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho_1} + \int \frac{R'_1 d\rho_1}{\sqrt{\rho_1}},$$

$$z = -\frac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} 2\sqrt{\rho_2} + \int \frac{R'_2 d\rho_2}{\sqrt{\rho_2}},$$

et il se propose de chercher si l'on ne peut pas disposer des fonctions R, R_1, R_2 de telle manière que ce système formé de surfaces à lignes de courbure planes devienne identique à celui qu'il s'agit d'étudier. Cette recherche est couronnée de succès, et l'auteur obtient ainsi tous les éléments nécessaires pour étudier le système triple orthogonal en question; cette méthode est tout à fait différente de celle qui a été suivie par M. Darboux dans son Mémoire.

Après avoir obtenu toutes les formules nécessaires, M. Maschke étudie les propriétés géométriques; il montre que le système orthogonal est identique à celui qui a été étudié par M. W. Roberts (*Journal de Crelle*, t. 62) et dont l'existence résulte du théorème suivant :

Si l'on mène d'un point déterminé de l'un des axes d'un système de surfaces homofocales du second degré des plans tangents à ces surfaces, le lieu des points de contact est une cyclide de Dupin du troisième degré. Si le point décrit l'axe, on obtient une famille de cyclides. Les trois familles correspondantes aux trois axes se coupent à angle droit.

Ce théorème remarquable a déjà été l'objet des études de différents géomètres, et il a été établi géométriquement par M. A. Picard dans les *Nouvelles Annales*.

L'auteur fait ensuite connaître quelques propriétés géométriques, et il recherche, en terminant, si le système jouit d'une propriété analogue à celle qui a été signalée par M. A. Wangerin pour le système des cyclides générales. Il arrive à cette conclusion qu'il y a

seulement huit fonctions de la forme

$$N f(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$$

satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du potentiel.

MÉLANGES.

DEUX NOUVELLES LETTRES MATHÉMATIQUES INÉDITES DU P. JAQUEMET, DE L'ORATOIRE, DE LA MAISON DE VIENNE (DAUPHINÉ);

Publiées par ARISTIDE MARRE.

I.

Lors quune equation na pas alternativement + et — dans tous ses termes ou ce qui est la mesme chose lors quelle na pas + dans tous ses termes impairs et — dans tous ses termes pairs, on demande une méthode generale pour pouvoir luy donner cette forme. Pour cela 1° je remarque quune equation ayant cette suite alternative des signes + et — dans tous ses termes, si on augmente chacune de ses racines d'une grandeur positive quelconque, lequation transformée qui en proviendra, aura encore la mesme suite alternative des signes + et — dans tous ses termes comme il est évident par loperation mesme etc. Cela posé 2° soit lequation

$$\begin{aligned} \mathrm{F} \quad & x^{\iota} + n x^{\iota-1} - \varepsilon n^2 x^{\iota-2} + \varepsilon^2 n^3 x^{\iota-3} \\ & - \varepsilon^3 n^4 x^{\iota-4} + \varepsilon^4 n^5 x^{\iota-5} - \varepsilon^5 n^6 x^{\iota-6} \ldots, \end{aligned}$$

laquelle a la disposition la plus opposée à celle qu'on demande, puisqu'excepté le premier terme, elle a + partout ou elle devroit avoir —, et — ou elle devroit avoir + ; 3° je remarque que lequation F est le produit de $x + \varepsilon n$ par lequation

$$\begin{aligned} \mathrm{C} \quad & x^{\iota-1} - \frac{\varepsilon - 1}{1} \varepsilon^0 n x^{\iota-2} \\ & + \frac{\varepsilon - 2}{1} - \varepsilon^1 n^2 x^{\iota-3} - \frac{\varepsilon - 3}{1} \varepsilon^2 n^3 x^{\iota-4} + \frac{\varepsilon - 4}{1} \varepsilon^3 n^4 x^{\iota-5} \ldots \end{aligned}$$

dans laquelle la disposition des signes est telle qu'on la demande, et par consequent que les racines de lequation F sont lune la grandeur negative — εn et les autres les mesmes que celles de l'equation C. Cela estant 4° si on augmente chaque racine de lequation F de la grandeur positive $+ \varepsilon n$ on aura lequation transformée B dont les racines seront l'une $-\varepsilon n + \varepsilon n = 0$ et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeur positive $+ \varepsilon n$, 5° or je dis que cette equation B aura la suite alternative des signes que lon demande excepté au dernier de ses termes qui sera zero, car par 1° et 3° sup. si on augmente chacune des racines de lequation C de la grandeur positive $+\varepsilon n$, on aura une equation G dont tous les termes auront alternativement + et —, mais multipliant lequation G par son inconnue + ou — zero ou simplement par son inconnue, ce qui ne change rien à la suite des signes, on aura une equation dont tous les termes auront alternativement + et — excepté le dernier terme qui sera zero, et cette equation sera lequation B par 4° sup. puisque ses racines sont lune zero et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeur positive $+ \varepsilon n$ donc etc. 6° On peut voir dans Schooten sur le troisième livre de la geometrie de M. Descartes lettre H [1] la manière de se servir de l'equation F

---

[1] Si l'on compare la lettre du P. Jaquemet au passage de Schooten auquel il renvoie son correspondant, on est conduit à la proposition suivante :

Considérons une équation algébrique

$$(F) \qquad x^n + \ldots - A_p x^{n-p} + \ldots - A_q x^{n-q} + \ldots = 0,$$

dont nous n'écrivons que les termes négatifs. Pour trouver une limite supérieure des racines positives de cette équation, comparons-la à la suivante,

$$(A) \qquad x^n - \alpha x^{n-1} - n\alpha^2 x^{n-2} - n^2\alpha^3 x^{n-3} - \ldots = 0,$$

qui n'a qu'une racine positive dont la valeur est $n\alpha$. Tout nombre supérieur à $n\alpha$ rendra le premier membre de (A) positif, et il rendra aussi le premier membre de (F) positif si l'on a

$$A_p \leqq n^{p-1}\alpha^p, \quad A_q \leqq n^{q-1}\alpha^q, \quad \ldots.$$

Si donc on considère les quantités

$$n\sqrt[p]{\frac{A_p}{n^{p-1}}} = \sqrt[p]{nA_p}, \quad \sqrt[q]{nA_q}, \quad \ldots.$$

comme dune regle ou dune formule pour connoitre quelle doit être la valeur de n dans la grandeur positive $+\varepsilon n$ dont il faut augmenter chaque racine dune equation afin quelle ayt la suite des signes + et — dans tous ses termes. 7° On pourroit prendre lequation

$$\Phi \quad x^{\varepsilon} + n x^{\varepsilon-1} - \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon+2}{2} n^2 x^{\varepsilon-2}$$
$$+ \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{2\varepsilon+3}{3} n^3 x^{\varepsilon-3}$$
$$- \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{\varepsilon-3}{3} + \frac{3\varepsilon-4}{4} n^4 x^{\varepsilon-4}$$
$$+ \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{\varepsilon-3}{3} \times \frac{\varepsilon-4}{4} \times \frac{4\varepsilon-5}{5} n^5 x^{\varepsilon-5} \ldots,$$

laquelle est le produit de $x+\varepsilon n$ par lequation H $\overline{x-\varepsilon n}^{\,\varepsilon-1}$ et seu servir comme dune regle ou dune formule comme de lequation F. 8° Si on compare ensemble ces deux formules on verra que dans l'une et dans lautre les premiers et deuxièmes termes sont les mesmes, que depuis le troisième degré lequation Φ a le troisieme terme plus grand mais les termes suivans plus petits que lequation F, dou lon peut connoitre que lon ne doit se servir de la formule Φ que lorsque la plus grande valeur de n est donnée par le troisieme terme soit par exemple P $x^3 + 2x^2 - 170x + 360 = 0$. Par la formule F on aura 1° $n = 2$, 2° $3n^2 = 170$ et n entre 7 et 8, 3° $9n^3 = 360$ et n entre 3 et 4, ce qui donne 8 pour la plus grande

---

la plus grande de ces quantités sera une limite supérieure des racines positives de l'équation (F).

Cette règle est semblable à celles que l'on attribue à Maclaurin. Dans les deux cas, le nombre que l'on détermine dépend exclusivement de la valeur et de la place des coefficients négatifs, et il est supérieur au plus petit nombre qui rendrait positif le premier membre de l'équation auxiliaire

$$x^n - A_p x^{n-p} - A_q x^{n-q} - \ldots = 0,$$

et par conséquent aussi le premier membre de l'équation proposée.

Le P. Jaquemet, au lieu de chercher une limite supérieure des racines positives, détermine une limite inférieure des racines négatives ; mais on sait que l'un de ces problèmes est équivalent à l'autre. G. D.

valeur de n. Par la formule Φ on aura 1° $n = 2$, 2° $5n^2 = 170$ et n entre 5 et 6, 3° $3n^3 = 360$ et n entre 4 et 5, ce qui donne 6 pour la plus grande valeur de n. Ainsi la grandeur $+\,\varepsilon n$ seroit 24 par la formule F et elle n'est que 18 par la formule Φ ce qui est un peu plus simple, mais comme il n'y a que le troisième terme seul qui soit avantageux à la formule Φ on peut dire que généralement parlant la formule F est la plus simple. 9° Ayant P $x^3 + 2x^2 - 170x + 360 = 0$ si a x on substitue $\overline{170 + 1} - y$ on aura une transformée dont les racines positives seront les negatives de P, et les negatives les positives de P augmentées chacune de $+ 171$ et dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$; et si on avoit

$$\text{P} \quad x^3 - 2x^2 - 170x - 360 = 0$$

il faudroit par cette méthode substituer a x $\overline{360 + 1} - y$ ou au moins $\overline{170 + 2 + 1} - y$, au lieu que dans lun et lautre cas il ne faut substituer a x que $y - 3 \times 8$ ou mesme $y - 3 \times 6$ ce qui est bien plus simple. 10° M. Descartes dans le cas particulier de la formule F pour le sixième degré demande une autre condition qui est que le coefficient du troisième terme soit plus grand que le quarré de la moitié de celuy du second, ceste condition se trouve tousjours remplie dans la transformée de lequation B et par conséquent dans celle de lequation P pourvu 1° que la valeur de ε soit au moins 3, et 2° que le coefficient du second terme de P nayt point le signe $-$ car pour lors elle peut netre point remplie. Soit par exemple P $x^3 - 18x^2 - 12x - 360 = 0$. La seule valeur de n et par conséquent la plus grande est $n = 2$ que donne $3n^2 = 12$. On a donc $\varepsilon n = 3 \times 2 = 6$, et dans la transformée de P le coefficient du troisième terme est $312 < \frac{1}{4}\overline{36}^2$ quarré de la moitié de celuy du second. Mais ayant une equation dont tous les termes ont alternativement $+$ et $-$, comme A $x^\varepsilon - nx^{\varepsilon-1} + px^{\varepsilon-2} - \ldots$ si $\frac{1}{4}n^2 > p$ pour avoir une transformée ou $p > \frac{1}{4}n^2$ il n'y a qua augmenter les racines de A chacune de la grandeur positive $+\frac{n}{\varepsilon}$ cela suffira tousjours depuis le troisième degré inclus car on aura pn^2 pour quarré de la moitié du coefficient du second terme, et $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2\varepsilon}n^2 + p$ pour coefficient du troisième terme ce qui est plus grand que n^2.

Je vous souhaitte les bonnes festes et la bonne année, souvenez-vous de la cheminée ([1]).

II.

Je viens de recevoir votre lettre mon tres cher ami, je vous suis obligé de ce que vous me mandez du Mans jescriray au p. — suivant ce que vous me mandez, jescriray aussi à Lion pour scavoir quand la loterie se tirera, je vous remercie de la cheminée etc. je lentend a peu pres mais japprehende que les massons de ce pais ne lentendent pas assez pour lexecuter, si on en fait imprimer la description, vous aurez la bonté de me l'envoyer. Vous me remerciez de mes lumieres mais elles sont si tenebreuses dans votre lettre que je ne les reconnois point, elles supposent dites vous le calcul différentiel quon ne peut point rendre facile a concevoir sans figures et sans geometrie, je crois vous avoir desja mandé que ce quelles supposent de ce calcul na besoin ni de figure ni de geometrie pour etre facilement entendu il me sera aisé de vous le faire voir quand vous le souhaiterez, il s'agit de trouver les limites des racines des equations mesmes ou les racines sont incommensurables, et dont les differences peuvent etre si petites que lon voudra, il faut donc, quelque methode dont vous vous serviez, que vous alliez jusquaux differences indefiniment petites, or cela me suffit. Mais vous ne voyez point dites vous que les racines de B soient celles de A augmentées ou diminuées de la differentielle de chaque racine de A, je ne le vois

---

([1]) Cette lettre a pour suscription :

Au Reverend Pere

Le Reverend pere Reyneau
pretre de loratoire rue du
louvre

à Paris.

Le P. Reyneau, né à Brissac (Anjou), en 1656, mort en 1728, auteur de l'*Analyse démontrée*, 2 vol. in-4°, et des *Éléments de Mathématiques*, 2 vol. in-4°, professait les Mathématiques à Angers. Il se trouvait alors à Paris, à la maison de l'Oratoire de la rue du Louvre, qu'habitaient les PP. Malebranche et Bizance. Voir, dans le *Bullettino di Bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* du prince Balthazar Boncompagni, t. XII, p. 886-894, une autre Lettre autographe du P. Jaquemet au P. Bizance, datée de Vienne, 26 janvier 1690, et la Notice consacrée à ces deux mathématiciens de l'Oratoire par Aristide Marre. A. M.

point non plus, mais je vois ce me semble quelles sont les racines de A augmentées ou diminuées d'un multiple de la differentielle de chaque racine de A, cela me paroit fort different. Vous ajoutez que vous ne trouvez point que la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B soit moyenne entre la plus petite des positives et la plus grande des negatives de B, vous trouvez au contraire que si elle est positive elle doit surpasser toutes les positives, et si elle est negative elle doit surpasser toutes les negatives. Ces paroles « la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B » font apparemment votre difficulté, mais ces paroles sont elles de moy ? je suis au moins tres assuré que ce nest point ce que jay voulu dire, mais le voicy : soit

$$\text{A} \quad x^4 - 44x^3 + 432x^2 + 2288x \pm q = 0,$$
$$\text{B} \quad x^3 - 33x^2 + 216x + 572 = 0.$$

Les racines de B sont — 2, + 13, + 22 or cela estant je dis 1° que deux racines de A sont necessairement positives l'une plus grande ou au moins egale a + 22, lautre plus grande ou au moins egale a + 13, 2° quune racine de A est necessairement negative et quelle est ou plus petite ou au moins egale a — 2, 3° qu'il reste encore ou qu'il y a encore une racine de A qui doit etre moyenne entre — 2 et + 13 ou egale ou à — 2 ou à + 1,3, et que cette derniere racine a ne considerer que lequation B peut etre ou positive ou negative, mais quelle est positive ou negative selon que q aura le signe ou — ou + respectivement, et quelle sera zero si q est zero, voila surement ce que javois dit mais ce nest point ce que vous me faite dire. Javois dit, sil men souvient bien, « la racine reelle quil y a de plus dans A que dans B », mais cela veut dire seulement que dans A il y a une racine réelle de plus que dans B ce qui me paroit incontestable. Il me seroit aisé dajouter « le a plus forte raison » sur ce quil y a des imaginaires dans une equation dont le deuxième terme manque et dont le troisième a + mais cela est inutile, vous en avez une autre raison et je vous remercie de me lavoir communiquée, je passe à la formule de M. Descartes laquelle ne vous paroit point generale. Vous voyez bien dites vous quelle aura son effet dans toutes les equations representées par celle qui sert de formule mais les coefficients de cette formule étant des puissances exactes dune mesme grandeur ont des limites, et ainsi la formule ne represente

pas toutes les equations possibles dans chaque degré. Voilà votre difficulté, mais cette difficulté sera levée si vous voulez bien remarquer 1° que $\overline{y-6n}^6 = x^5$ (voyez M. Descartes pag. 79) a dans tous ses termes la suite alternative des signes telle quon la demande, 2° que $+n \times \overline{y-6n}^4, -6n^2 \times \overline{y-6n}^2$, etc. ont chacun dans tous leurs termes des signes opposez a ceux qu'on demande, 3° que dans chacun des termes de la transformée le signe de $\overline{y-6n}^6$, qui est celuy quon demande subsiste et reste apres la soustraction des coefficients qui ont un signe opposé, 4° dou il sensuit qua plus forte raison ces signes de $\overline{y-6n}^6$ subsisteroient dans la transformée si dans la formule un ou plusieurs ou mesme tous les coefficients etoient plus petits quon ne les suppose, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs ou tous les coefficients de la formule etoient zéro, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs de ces coefficients avoient un signe opposé à celuy quon leur suppose dans la formule, car alors leurs signes seroient favorables au lieu d'etre contraires, mais 5° cest ce qui arrive dans la maniere dont on se sert de cette formule pag. 274. 1° On y neglige les termes de la proposée qui ont des signes differens de ceux de la formule, et cela parce que ces signes sont favorables au lieu detre contraires. 2° On y prend la plus grande des valeurs de n données par la comparaison des autres termes et pour lors $\overline{y-6n}^6$ suffiroit pour donner la suite alternative des signes à la proposée quand mesmes tous ses termes auroient les mesmes signes et les mesmes grandeurs proportionelles que ceux de la formule, donc a plus forte raison etc. On peut appliquer la mesme preuve à l'autre formule etc. Je vous escrivis dimanche passé une lettre dans laquelle je vous mande une difficulté sur ces paroles de votre livre pag. 69 lig. 12 « comme on le suppose. » Je scais bien quon suppose que dans la proposée les imaginaires ne paroissent point, mais je ne vois point quil soit clair que dans toute equation ou il y aura au moins quatre imaginaires on puisse tousjours trouver une equation de second degré, formée par quelques deux imaginaires, dans le second terme de laquelle les imaginaires disparoitront, on le pourra dans plusieurs cas mais il faut faire voir que cela se peut tousjours, et cest ce qui me paroit difficile a prouver, au lieu que ce quon veut prouver par la, se prouve bien

plus facilement sans cela, Je suis etc. Mes respects sil vous plait au R. P. Malebranche (¹).

CONSIDÉRATIONS SUR QUELQUES FORMULES INTÉGRALES DONT LES VALEURS PEUVENT ÊTRE EXPRIMÉES EN CERTAINS CAS PAR LA QUADRATURE DU CERCLE.

MÉMOIRE DE LÉONARD EULER,
PUBLIÉ CONFORMÉMENT AU MANUSCRIT AUTOGRAPHE;

PAR M. CHARLES HENRY.

Le manuscrit que nous publions est conservé à la Bibliothèque nationale de Paris sous le n° 14730 du fonds français; il compte seize feuillets écrits au recto et au verso et reliés entre six et quatre feuillets de garde.

Une note écrite sur le troisième feuillet de garde du commencement nous apprend qu'il a appartenu à Lagrange, qui le donna à Lacroix. Celui-ci en fit hommage à la Bibliothèque.

Ce Mémoire n'est pas mentionné dans le Catalogue des Œuvres inédites

(¹) Cette lettre était fermée d'un cachet de cire rouge, portant l'empreinte de la couronne d'épines, etc. (cachet de l'ordre de l'Oratoire).

Elle a pour suscription :

Au Reverend Pere

Le Reverend Pere
Reyneau prestre de
loratoire ruë du Louvre
etc.

a Paris.

et l'on y a ajouté un peu plus tard, entre la première et la deuxième ligne, ces deux mots, *de Vienne*, qui indiquent le lieu de provenance de la lettre; et en effet cette lettre et la précédente sont deux précieux autographes du P. Jaquemet, que le bibliothécaire actuel de l'ordre de l'Oratoire, le R. P. Ingold, a eu l'aimable obligeance de me communiquer. A. M.

d'Euler rédigé par Fuss ([1]); mais Libri fait sans doute allusion à cet écrit dans le passage suivant : « Il existe à Paris différents Mémoires inédits d'Euler; un de ces Mémoires se trouve à la Bibliothèque royale ([2]). » Les autres Mémoires sont probablement ceux qui sont conservés à la Bibliothèque de l'Institut parmi les manuscrits de Lagrange ([3]).

En empruntant à ce travail la formule suivante,

$$\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=\frac{1.2\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}},$$

Lacroix ajoute : « Ce beau théorème se trouve, mais sans démonstration, dans un Mémoire inédit d'Euler que M. Prony m'a communiqué ([4]). » Toutefois, ce n'est pas là le seul emprunt de Lacroix; on s'en convaincra si l'on prend la peine de comparer les pages qui suivent avec les nos **1169** et suivants, **1190**, **1196** et suivants du troisième volume du *Traité de Calcul différentiel et intégral*.

([1]) *Correspondance mathématique et physique de quelques géomètres du* XVIIIe *siècle*, t. I, p. CXIX. Il est signalé pour la première fois dans l'introduction des *Commentationes arithmeticæ collectæ*, p. XI.

([2]) *Journal des Savants*, année 1844, p. 389, note 1.

([3]) Le tome II des manuscrits in-folio de Lagrange renferme (fo 108) un extrait de la théorie d'Euler sur la précession des équinoxes (t. XIII des *Novi Commentarii* de Saint-Pétersbourg).

Le tome IV des manuscrits in-4° renferme les écrits suivants :

Folio 110. Sur l'arrangement des verres dans les lunettes pour faire disparaître les couleurs d'Iris.

Folio 50. Considérations sur la sommation de certaines séries.

Folio 170. Construction d'un télescope sans verres.

Folio 62. Détermination de ma méthode générale de déterminer le mouvement d'une corde quel qu'ait été son état initial.

Folio 132. Méthode pour rendre les lunettes à plusieurs verres aussi parfaites qu'il est possible.

Folio 68. Des microscopes.

Folio 148. Moyens de perfectionner les lunettes à 4 verres en y ajoutant encore quelques verres.

Folio 115. Recherches sur le lieu de l'œil qu'exige le champ apparent.

Folio 92. Recherches sur les moyens de perfectionner les lunettes astronomiques.

Folio 163. Recherches sur les moyens de délivrer les télescopes et les microscopes de la confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.

Folio 47. Lettre à Bernoulli, 1773. (Extrait par Lagrange.)

Folio 4-34, folio 40-46. Lettres à Lagrange.

([4]) *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. III, p. 480. Paris, 1819.



Ce Mémoire a été publié en 1862 par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg [1]; cependant nous n'hésitons pas à le réimprimer d'après l'autographe, vu l'intérêt tout particulier de la matière et l'absence complète de la publication dans les bibliothèques publiques de Paris.

C. H.

MANUSCRIT [2].

1. Toute formule differentielle rationelle peut etre integrée par le moyen des logarithmes et de la quadrature du cercle. Or ces integrales sont pour la plus part renfermées dans des formules d'autant plus compliquées, plus la variable contient de dimensions : cependant quand on donne à la variable après l'integration une certaine valeur determinée, il peut arriver que les integrales, quelques compliquées qu'elles soient, se reduisent à des formules assés simples, qui semblent meriter une attention tout particulière. Il y a aussi des formules integrales, qui en general surpassent toutes les quadratures connues, et qui cependant en certains cas sont reductibles à la quadrature du cercle. Je me propose ici de considerer quelques unes de ces formules, et d'examiner les consequences, qu'on en peut tirer pour l'avancement de l'Analyse.

2. Je commencerai par considerer cette formule integrale $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, en cherchant son integrale dans le cas, où l'on pose après l'integration $x = \infty$ ayant pris l'integrale en sorte, qu'elle evanouïsse en posant $x = 0$. Dans ce cas on trouvera que la partie de l'integrale, qui depend des logarithmes evanouït, et que l'autre, qui depend de la quadrature du cercle se reduit à une expression fort simple. Car posant π pour la demi-circonférence d'un cercle, dont le rayon est $= 1$, de sorte que π marque en meme tems la mesure de deux angles droits, on trouve en posant après l'integra-

---

[1] *Opera postuma Leonhardi Euleri mathematica et physica*, t. I, p. 408-438.

[2] Euler écrit presque toujours *si* au lieu de *sin*, *tag* avec un signe abréviatif sur l'*a* au lieu de *tang*.

tion $x = \infty$:

$$\int \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2}; \quad \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}; \quad \int \frac{xx\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \quad \int \frac{xx\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{6};$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \quad \int \frac{x^4\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$$

3. Les cas particuliers semblent dejà suffisans pour pouvoir en tirer par la voye d'induction une conclusion plus generale : car dans les cas du denominateur $1+x^3$ le radical $\sqrt{3}$ fait voir que le sinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$ y entre; et dans ceux du denominateur $1+x^4$ le radical $\sqrt{2}$ y est sans doute, puisque si $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$: ce meme soupçon se confirme par les cas, où le denominateur est $1+x^6$. De là nous pourrons conclure qu'il y aura

$$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \,\text{si}\, \frac{\pi}{n}}$$

et encore plus generalement

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \,\text{si}\, \frac{m\pi}{n}}$$

pourvu que le nombre m ne surpasse pas n. Car dans les cas où $m > n$ on sait d'ailleurs que ces formules demandent un developpement particulier, puisque leur integrale renferme alors une partie algebrique.

4. Cette conclusion se trouve tout à fait confirmée, quand on se donne la peine de developper l'integrale des formules $\int \frac{dx}{1+x^4}$ $\int \frac{x\,dx}{1-x^4}$, $\int \frac{xx\,dx}{1+x^4}$ etc. de sorte qu'il ne sauroit rester aucu

doute là dessus. On remarque encore un parfait accord dans les cas, où $m = n$, car puisque alors si $\frac{m\pi}{n} = \text{si}\,\pi = 0$, l'integrale dans le cas $x = \infty$ devient effectivement infini : ce qui est evident; car $\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\,\mathrm{l}(1+x^n)$, et posant $x = \infty$, la valeur de l'integrale devient infinie. Le meme accord s'observe lorsque $n = 2m$, et partant si $\frac{m\pi}{n} = \text{si}\,\frac{\pi}{2} = 1$. Car il est clair que $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2m}} = \frac{\pi}{2m}$ en posant $x = \infty$. On n'a qu'à mettre $x^m = y$, pour avoir $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2m}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{1+yy} = \frac{1}{m}\,\text{A tág}\,y$: maintenant posant $x = \infty$ et partant aussi $y = \infty$, à cause de $\text{A tág}\,\infty = \frac{\pi}{2}$, l'integrale sera $= \frac{\pi}{2m}$. Ce sera donc une verité suffisament constatée, que

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\,\text{si}\,\frac{m\pi}{n}}$$

en posant apres l'integration $x = \infty$ pourvu que m ne soit pas plus grand que n.

5. Cependant cette verité se peut aussi deduire de l'integration indefinie de la formule

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

dont l'integrale se trouve exprimée en sorte

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\,\mathrm{l}\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + xx\right) + \frac{2}{n}\,\text{si}\,\frac{m\pi}{n}\,\text{A tág}\,\frac{x\,\text{si}\,\frac{\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\,\mathrm{l}\left(1 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + xx\right) + \frac{2}{n}\,\text{si}\,\frac{3m\pi}{n}\,\text{A tág}\,\frac{x\,\text{si}\,\frac{3\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\,\mathrm{l}\left(1 - 2x\cos\frac{5\pi}{n} + xx\right) + \frac{2}{n}\,\text{si}\,\frac{5m\pi}{n}\,\text{A tág}\,\frac{x\,\text{si}\,\frac{5\pi}{n}}{1 - x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{7m\pi}{n}\,\mathrm{l}\left(1-2x\cos\frac{7\pi}{n}+xx\right)+\frac{2}{n}\,\mathrm{si}\,\frac{7m\pi}{n}\,\mathrm{A\,tág}\,\frac{x\,\mathrm{si}\,\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos\frac{7\pi}{n}}$$

etc.

et il faut continuer ces formules jusqu'à ce que l'angle $\frac{i\pi}{n}$, où i marque un nombre impair quelconque, commence à surpasser π. Or quand n est un nombre impair et que dans le dernier membre on a $i=n$, et partant $\cos\frac{i\pi}{n}=-1$, il ne faut prendre que la moitié du dernier membre ou mettre $\mathrm{l}(1+x)$ au lieu de $\mathrm{l}(1+2x+xx)$.

6. Tirons de là les integrales pour les cas particuliers, et d'abord si $n=1$ et $m=1$ nous aurons

$$\int\frac{dx}{1+x}=\mathrm{l}(1+x).$$

II. Soit $n=2$ et nous aurons

$$\text{si } m=1,\quad \int\frac{dx}{1+xx}=\frac{2}{2}\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{A\,tág}\,\frac{x\,\mathrm{si}\,\pi}{1-x\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{si } m=2,\quad \int\frac{x\,dx}{1+xx}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+xx).$$

III. Soit $n=3$ et nous aurons,

si $m=1$,

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,\mathrm{l}\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)$$

$$+\frac{2}{3}\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}\,\mathrm{A\,tág}\,\frac{x\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\,\mathrm{l}(1+);$$

si $m=2$,

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{l}\left(1-2x\cos\frac{\pi}{3}+xx\right)$$

$$+\frac{2}{3}\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{A\,tág}\,\frac{x\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\cos\frac{6\pi}{3}\,\mathrm{l}(1+x);$$

si $m = 3$,

$$\int \frac{xxdx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}\, l\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{3} + xx\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\,\mathrm{si}\,\frac{3\pi}{3}\,\mathrm{A\,tág}\,\frac{x\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}}{1 - x\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\cos\frac{9\pi}{3}\, l(1+x)$$

ou bien à cause de $\cos\frac{3\pi}{3} = -1$; $\cos\frac{9\pi}{3} = -1$; $\mathrm{si}\frac{3\pi}{3} = 0$, et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{xxdx}{1+x^3} = \frac{1}{3} l(1 - x + xx) + \frac{1}{3} l(1+x) = \frac{1}{3} l(1+x^3).$$

7. Dans tous ces cas particuliers, il est aisé de voir que posant $x = \infty$ les integrales deviennent parfaitement d'accord avec la formule generale donnée cy dessus. Mais pour demontrer son accord en general, il faut faire voir que toutes les parties logarithmiques se detruisent necessairement et que les autres, qui renferment des arcs de cercles, se reduisent à $\frac{\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}$. Pour cet effet, il faut ici distinguer deux cas selon que n est un nombre pair ou impair; soit donc premierement $n = 2k$, et posant $x = \infty$, puisque tous les logarithmes deviennent egaux, il faut montrer que la somme de cette progression est egale à zero :

$$\cos\frac{m\pi}{2k} + \cos\frac{3m\pi}{2k} + \cos\frac{5m\pi}{2k} \ldots + \cos\frac{(2k-5)m\pi}{2k}$$

$$+ \cos\frac{(2k-3)m\pi}{2k} + \cos\frac{(2k-1)m\pi}{2k},$$

m etant un nombre entier. Posons pour abreger $\frac{m\pi}{2k} = \varphi$, et il s'agit de demontrer

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos(2k-1)\varphi = 0.$$

8. Posons pour chercher la somme de cette progression

$$S = \cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos(2k-1)\varphi$$



et multipliant par $\sin\varphi$ à cause de

$$\operatorname{si}\varphi\cos\alpha\varphi = -\frac{1}{2}\operatorname{si}(\alpha-1)\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{si}(\alpha+1)\varphi;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} S\operatorname{si}\varphi = &\frac{1}{2}\operatorname{si}2\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{si}4\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{si}6\varphi\ldots + \frac{1}{2}\operatorname{si}(2k-2)\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{si}2k\varphi \\ &- \frac{1}{2}\operatorname{si}2\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{si}4\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{si}6\varphi\ldots - \frac{1}{2}\operatorname{si}(2k-2)\varphi \end{aligned}$$

et puisque tous les termes à l'exception du dernier se detruisent

$$S\sin\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{si}2k\varphi \quad \text{donc } S = \frac{\operatorname{si}2k\varphi}{2\operatorname{si}\varphi}.$$

Or ayant $\varphi = \frac{m\pi}{2k}$, il devient $2k\varphi = m\pi$, et puisque m est un nombre entier, $\operatorname{si}2k\varphi = \operatorname{si}m\pi = 0$, de sorte que la somme de la progression proposée est effectivement $= 0$. Si le nombre n est impair $= 2k+1$, posant $\frac{m\pi}{2k+1} = \varphi$, il faut demontrer que :

$$\cos\varphi + \cos3\varphi\ldots + \cos(2k-1)\varphi + \frac{1}{2}\cos m\pi = 0.$$

Or par la sommation precedente cette somme est $\frac{\operatorname{si}2k\varphi}{2\operatorname{si}\varphi} + \frac{1}{2}\cos m\pi$ $= \frac{\operatorname{si}2k\varphi}{2\operatorname{si}\varphi} + \frac{1}{2}\cos(2k+1)\varphi$; et à cause de

$$\operatorname{si}2k\varphi = \operatorname{si}(2k+1)\varphi\cos\varphi - \cos(2k+1)\varphi\operatorname{si}\varphi$$

cette somme sera $= \frac{\operatorname{si}(2k+1)\varphi\cos\varphi}{2\operatorname{si}\varphi}$. Mais puisque $(2k+1)\varphi = m\pi$, il est evident que cette somme est egale à zero.

9. Ayant donc demontré que posant $x = \infty$ les parties logarithmiques de notre integrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ se detruisent, il faut chercher la valeur totale des parties qui renferment les arcs de cercle. Or chacun de ces arcs étant compris dans cette forme $A\operatorname{tág}\frac{x\operatorname{si}\varphi}{1-x\cos\varphi}$, on voit que posant $x = 0$ ces arcs evanouïssent

comme la condition de l'integration exige; ensuite en augmentant x jusqu'à devenir $x=\frac{1}{\cos\varphi}$, cet angle devient droit et si l'on augmente x au delà, il faut qu'il devienne obtus. Donc posant $x=\infty$, on aura $\mathrm{A\,tág}\frac{x\,\mathrm{si}\,\varphi}{1-x\cos\varphi}=\mathrm{A\,tág}\frac{-\mathrm{si}\,\varphi}{\cos\varphi}=\pi-\varphi$, et partant toutes les parties qui renferment des arcs de cercle, prises ensemble, seront

$$\frac{2}{n}\pi\left(\mathrm{si}\frac{m\pi}{n}+\mathrm{si}\frac{3m\pi}{n}+\mathrm{si}\frac{5m\pi}{n}+\mathrm{si}\frac{7m\pi}{n}\text{ etc.}\right)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}\left(\mathrm{si}\frac{m\pi}{n}+3\,\mathrm{si}\frac{m\pi}{n}+5\,\mathrm{si}\frac{m\pi}{n}+7\,\mathrm{si}\frac{m\pi}{n}\text{ etc.}\right);$$

il s'agit donc de trouver la somme de ces deux progressions.

10. Soit premierement n un nombre pair ou $n=2k$, et posant $\frac{m\pi}{2k}=\varphi$, la premiere progression sera

$$\mathrm{si}\,\varphi+\mathrm{si}\,3\varphi+\mathrm{si}\,5\varphi\ldots+\mathrm{si}(2k-1)\varphi=\mathrm{S},$$

qui, etant multipliée par $\mathrm{si}\,\varphi$ donne

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\varphi-\frac{1}{2}\cos4\varphi-\frac{1}{2}\cos6\varphi\ldots-\frac{1}{2}\cos2k\varphi$$
$$=\mathrm{S\,si}\,\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi+\frac{1}{2}\cos6\varphi\ldots,$$

d'où l'on tire $\mathrm{S}=\frac{1-\cos2k\varphi}{2\,\mathrm{si}\,\varphi}=\frac{1-\cos m\pi}{2\,\mathrm{si}\frac{m\pi}{2k}}$.

Or ayant trouvé cy dessus :

$$\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi+\ldots+\cos(2k-1)\varphi=\frac{\mathrm{si}\,2k\varphi}{2\,\mathrm{si}\,\varphi}$$

la differentiation donne

$$\mathrm{si}\,\varphi+3\,\mathrm{si}\,3\varphi+5\,\mathrm{si}\,5\varphi\ldots+(2k-1)\,\mathrm{si}(2k-1)\varphi$$
$$=\frac{2k\cos2k\varphi}{2\,\mathrm{si}\,\varphi}+\frac{\mathrm{si}\,2k\varphi}{2\,\mathrm{si}\,\varphi^2}.$$

Posons maintenant $\varphi = \frac{m\pi}{n}$, et à cause de $2k = n$, nos deux progressions seront

$$\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} - \frac{2\pi}{nn}\left[-\frac{n \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{n}} + \frac{\sin m\pi}{2 \sin \left(\frac{m\pi}{n}\right)^2}\right]$$

dont la reduction donne

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}\left(1 - \frac{\sin m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

à cause de $\sin m\pi = 0$.

La meme valeur se trouve quand n est un nombre impair.

11. Voilà donc incontestablement demontré que l'integrale de notre formule differentielle $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, en posant $x = \infty$, est $= \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$, tout comme nous avons deja conclu par induction. La meme valeur aura donc aussi lieu de quelque maniere qu'on transforme la formule differentielle; posons donc $x = \frac{z}{\sqrt[n]{(1-z^n)}}$, où l'on remarque que, posant $z = 0$, il devient aussi $x = 0$, mais x croît à l'infini en posant $z = 1$ et nous aurons $dx = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^{n+1}}}$, $1 + x^n = \frac{1}{1-z^n}$. Donc $\frac{dx}{1+x^n} = \frac{dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)}}$ et $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}$.

Par consequent posant après l'integration $z = 1$, ayant pris l'integrale en sorte qu'elle evanouïsse au cas $z = 0$, on aura, pourvu que m ne surpasse pas n,

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

12. De là nous tirons pour des cas particuliers les suivantes

valeurs integrales quand on met après l'integration $z = 1$:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{si} \frac{\pi}{2}}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{\pi}{3 \operatorname{si} \frac{\pi}{3}}; \quad \int \frac{zdz}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} = \frac{\pi}{3 \operatorname{si} \frac{2\pi}{3}};$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4 \operatorname{si} \frac{\pi}{4}}; \quad \int \frac{zzdz}{\sqrt[4]{(1-z^3)^3}} = \frac{\pi}{4 \operatorname{si} \frac{3\pi}{4}};$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)}} = \frac{\pi}{5 \operatorname{si} \frac{\pi}{5}}; \quad \int \frac{zdz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^2}} = \frac{\pi}{5 \operatorname{si} \frac{2\pi}{5}};$$

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^3}} = \frac{\pi}{5 \operatorname{si} \frac{3\pi}{5}}; \quad \int \frac{z^3dz}{\sqrt[5]{(1-z^5)^4}} = \frac{\pi}{5 \operatorname{si} \frac{4\pi}{5}};$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)}} = \frac{\pi}{6 \operatorname{si} \frac{\pi}{6}}; \quad \int \frac{z^4dz}{\sqrt[6]{(1-z^6)^5}} = \frac{\pi}{6 \operatorname{si} \frac{5\pi}{6}}.$$

Ces integrales sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manquent encore des methodes, pour les trouver assés promtement car la sommation des progressions, dont je me suis servi, paroit un peu trop étrangère à ce sujet.

13. Puisque donc $\frac{\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}}$ est egale à cette integrale $\int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[n]{(1-z^n)^m}}$, posant $z = 1$, cherchons la valeur de cette integrale par une serie, qui à cause de $(1-z^n)^{-\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} z^n + \frac{m(m+n)}{n.2n} z^{2n} +$ etc. fournira pour $\frac{\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}}$ cette serie :

$$\frac{\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{m}{n(m+n)} + \frac{m(m+n)}{n.2n(m+2n)} + \frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n(m+3n)} \text{ etc.}$$

Ensuite la meme formule integrale pouvant être exprimée par le

produit d'une infinité de facteurs, nous aurons aussi

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{nn}{m(2n-m)} \cdot \frac{4nn}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)} \cdot \text{etc.}$$

l'une et l'autre expression etant continuée à l'infini.

De là prenant $m=1$ et $n=2$ à cause de $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, nous tirons d'abord l'expression de Wallis pour la quadrature du cercle

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{10.10}{9.11} \text{ etc.}$$

Or mettant $m=1$ et $n=6$ à cause de $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{6.6}{1.11} \cdot \frac{12.12}{7.17} \cdot \frac{18.18}{13.23} \cdot \frac{24.24}{19.29} \text{ etc.}$$

ou bien

$$\pi = \frac{16}{5} \cdot \frac{6.12}{7.11} \cdot \frac{12.18}{13.17} \cdot \frac{18.24}{19.23} \cdot \frac{24.30}{25.29} \text{ etc.}$$

14. Ces produits etant les memes que ceux que j'ai trouvés dans mon Introduction ([1]), nous voyons déjà une autre route, qui nous pourroit conduire à la decouverte de ces integrales. Or j'avois trouvé

$$\sin \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n} \left(1 - \frac{mm}{nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{4nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{9nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) \text{ etc.}$$

et

$$\cos \frac{m\pi}{n} = \left(1 - \frac{4mm}{nn}\right) \left(1 - \frac{4mm}{9nn}\right) \left(1 - \frac{4mm}{25nn}\right) \left(1 - \frac{4mm}{49nn}\right) \text{ etc.}$$

dont la premiere donne :

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{nn}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)} \cdot \frac{9nn}{(3n-m)(3n+m)} \text{ etc.}$$

([1]) *Introductio in Analysin Infinitorum*. Lausannæ, 1758, 2 vol. in-4°.

où si nous mettons $n-m$ au lieu de m, puisque

$$\text{si}\,\frac{(n-m)\pi}{n}=\text{si}\,\frac{m\pi}{n},$$

nous aurons :

$$\frac{\pi}{n\,\text{si}\,\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{4nn}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{9nn}{(m+2n)(4n-m)}\ \text{etc.}$$

qui est la meme, que celle que nous venons de trouver. Nous serions donc parvenu aux memes integrations, si nous avions d'abord cherché une formule integrale, dont la valeur dans un certain cas seroit égale à ce produit infini de facteurs. Or j'avois autrefois donné une methode d'exprimer la valeur de quelques formules integrales en certains cas par de tels produits; et il ne s'agit à cette heure, que de renverser cette methode et de passer de tels produits à des formules integrales.

15. Or j'avois demontré que posant après l'integration $x=1$ il y aura :

$$\int x^{\alpha-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}$$
$$=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)}\cdot\frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)}\ \text{etc.}$$

Ensuite j'avois aussi exprimé le rapport de deux formules integrales, par un tel produit; et posant après l'integration $x=1$, on aura

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{6-1}dx\,(1-x^{\mu})^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}$$
$$=\frac{6(\alpha+\nu)}{\alpha(6+\nu)}\cdot\frac{(6+\mu)(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(6+\nu+\mu)}\cdot\frac{(6+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(6+\nu+2\mu)}\ \text{etc.}$$

et encore plus generalement

$$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{6-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}}$$

$$=\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{6(\alpha+\nu)(\lambda+\mu)}{\alpha(6+\lambda)(\nu+\mu)}\cdot\frac{(6+\mu)(\alpha+\nu+\mu)(\lambda+2\mu)}{(\alpha+\mu)(6+\lambda+\mu)(\nu+2\mu)}$$

$$\times\frac{(6+2\mu)(\alpha+\nu+2\mu)(\lambda+3\mu)}{(\alpha+2\mu)(6+\lambda+2\mu)(\nu+3\mu)}\text{etc.}$$

Donc un tel produit étant proposé, on pourra reciproquement trouver une formule integrale, ou le rapport de deux, dont la valeur au cas $x=1$ lui soit égale.

16. Soit donc proposé ce produit à l'infini

$$\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{2n.2n}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{3n.3n}{(m+2n)(4n-m)}\cdot\text{etc.}$$

dont nous savons la valeur $=\dfrac{(n-m)\pi}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}}$, que nous comparerons avec celui-cy :

$$\frac{\mu(\alpha+\nu)}{\alpha(\mu+\nu)}\cdot\frac{2\mu(\alpha+\nu+\mu)}{(\alpha+\mu)(2\mu+\nu)}\cdot\frac{3\mu(\alpha+\nu+2\mu)}{(\alpha+2\mu)(3\mu+\nu)}\text{etc.}$$

dont la valeur est $=\nu\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}$ au cas $x=1$, et puisque l'accroissement des facteurs est là $=n$, et ici $=\mu$, nous aurons d'abord $\mu=n$: donc $\alpha+\nu=n$; et pour le denominateur ou $\alpha=m$ et $\mu+\nu=2n-m$; ou $\mu+\nu=m$ et $\alpha=2n-m$. Au premier cas nous avons $\alpha=m$; $\mu=n$; $\nu=n-m$, et à l'autre $\alpha=2n-m$; $\mu=n$; $\nu=m-n$, de sorte que nous ayons ou

$$\frac{(n-m)\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=(n-m)\frac{\int x^{m-1}dx}{(1-x^{n})^{\frac{m}{n}}}$$

ou

$$\frac{(n-m)\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}} = (m-n)\frac{\int x^{2n-m-1}\,dx}{(1-x^{a})^{\frac{2n-m}{n}}}$$

dont celle-cy ne sauroit avoir lieu tant que $\frac{2n-m}{n} > 1$ ou $n > m$, puisqu'alors l'integrale renferme encoré une partie infinie.

17. Voilà donc une autre route pour montrer que la valeur de cette integrale $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}$ au cas $x = 1$ est $= \frac{\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}$.

D'abord par la réduction des integrales à des produits infinis, on aura à cause de $\alpha = m$; $\mu = n$, $\nu - \mu = -m$, ou $\nu = n - m$.

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{n-m}\cdot\frac{nn}{m(2n-m)}\cdot\frac{2n.2n}{(m+n)(3n-m)}\cdot\frac{3n.3n}{(m+2n)(4n-m)}\cdot\text{etc.}$$

Ensuite par la resolution generale en facteurs, que j'ai enseignée dans l'Introduction à l'Analyse on voit que ce meme produit exprime la valeur de $\frac{\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}$. Si nous mettons $n - m$ au lieu de m, nous aurons :

$$\int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\cdot\text{etc.}$$

et par conséquent, à cause de $\mathrm{si}\,\frac{(n-m)\pi}{n} = \mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}$,

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}.$$

Posons $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = z$, ou $x^n = \frac{z^n}{1+z^n}$, de sorte que $x = 1$, si $z = \infty$

et nous aurons en posant après l'integration $z = \infty$:

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{n-m-1}dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}}.$$

18. Mais voyons aussi comment ce meme produit infini

$$\frac{nn}{nn-mm} \cdot \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot \frac{9nn}{9nn-mm} \text{ etc.} = \frac{m\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}}$$

puisse être exprimé par le rapport de deux formules integrales. Pour cet effet il faut poser $\mu = n$, et $\frac{6(\alpha+\nu)}{\alpha(6+\nu)} = \frac{nn}{nn-mm}$. Donc $6 = n$; $\alpha + \nu = n$; $\alpha = n - m$ et $6 + \nu = n + m$; d'où l'on tire $\alpha = n - m$; $6 = n$; $\nu = m$ et $\mu = n$; et partant :

$$\frac{m\pi}{n \operatorname{si} \frac{m\pi}{n}} = \frac{\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}.$$

Mais le dénominateur etant ici integrable, son integrale donne $\frac{1}{m}$ pour le cas $x = 1$; de sorte que cette integration se reduit à la precedente. La formule plus generale ne mene pas à d'autres integrations; cependant il y a d'autres moyens de rendre ces integrations plus generales.

19. Multiplions deux formules integrales en general, et dans le cas $x = 1$, la valeur de ce produit

$$\nu u \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\frac{\nu-n}{n}} \cdot \int x^{a-1}dx(1-x^n)^{\frac{u-n}{n}}$$

sera

$$\frac{nn(\alpha+\nu)(a+u)}{\alpha \cdot a(\nu+n)(u+n)} \cdot \frac{4nn(\alpha+\nu+n)(a+u+n)}{(\alpha+n)(a+n)(\nu+2n)(u+2n)} \cdot \text{etc.}$$

lequel soit posé egal à celui-cy

$$\frac{nn}{(n-m)(n+m)}\cdot\frac{4nn}{(2n-m)(2n+m)} \text{ etc.} = \frac{m\pi}{n \operatorname{si}\frac{m\pi}{n}},$$

Soit pour cet effet : $\alpha = n - m$; $a = n + m$; et posons outre cela : $\alpha + \nu = \nu + n - m = u + n$; $\alpha + u = u + n + m = \nu + n$, d'où nous tirons $\nu - u = m$. Soit donc $\nu = k + \frac{1}{2}m$ et $u = k - \frac{1}{2}m$; et nous aurons en prenant pour k un nombre quelconque :

$$\left(kk - \frac{1}{4}mm\right)\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}}$$
$$\times\int x^{n+m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}} = \frac{m\pi}{n \operatorname{si}\frac{m\pi}{n}}.$$

20. Voilà donc un produit de deux formules integrales, qui, dans le cas où l'on met $x = 1$ après l'integration, devient

$$= \frac{m\pi}{n \operatorname{si}\frac{m\pi}{n}};$$

et partant on pourra prendre k en sorte que l'une de ces deux formules devienne integrable et alors l'integration de l'autre se reduira à l'expression $\frac{m\pi}{n \operatorname{si}\frac{m\pi}{n}}$.

Ainsi posant $2k = m + 2n$, à cause de $\int x^{n+m-1}dx = \frac{1}{n+m}$ et $kk - \frac{1}{4}mm = n(n+m)$, on aura :

$$n\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{n \operatorname{si}\frac{m\pi}{n}}.$$

Or si l'on prend

$$2k = m + 4n,$$

puisque

$$\int x^{n+m-1}dx(1-x^n)=\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n+m}=\frac{n}{(n+m)(2n+m)},$$

et

$$kk-\frac{1}{4}mm=2n(m+2n),$$

on aura :

$$\frac{2nn}{n+m}\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m+n}{n}}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Donc posant aussi $n-m$ à la place de m on aura :

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{n}{m}\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m}{n}}=\frac{n}{n-m}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}$$

et

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{2nn}{m(n+m)}\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{n+m}{n}}$$

$$=\frac{2nn}{(n-m)(2n-m)}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2n-m}{2n}}.$$

21. Or puisque

$$\int x^{n+m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}}$$

$$=\frac{2m}{2k+m}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}},$$

si nous substituons cette valeur, nous aurons :

$$\left(k-\frac{1}{2}m\right)\int x^{n-m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k+m-2n}{2n}}$$

$$\times\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{2k-m-2n}{2n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

et cette valeur demeure la meme, quoiqu'on ecrive $n - m$ au lieu de m. Soit $m = 1$ et $n = 2$, et on aura :

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \int dx (1 - x^2)^{\frac{2k-3}{4}} \cdot \int dx (1 - x^2)^{\frac{2k-5}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

où il est remarquable que cette egalité a lieu, quelque nombre qu'on mette pour k : soit par exemple $k = 1$; ou $k = 2$ et on aura :

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^2)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^2)^3}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{3}{2} \int dx \sqrt[4]{(1 - x^2)} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^2)}} = \frac{\pi}{2},$$

et posant $k = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

$$\int dx (1 - x^2)^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \cdot \int dx (1 - x^2)^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cette egalité est remarquable à cause des exposans irrationels.

22. On peut encore transformer en plusieurs manieres les formules, que nous venons de trouver ; car posons $1 - x^n = y^{2n}$, de sorte que $x = \sqrt[n]{(1 - y^{2n})}$ et $dx = -2y^{2n-1} dy (1 - y^{2n})^{\frac{1-n}{n}}$, les termes de l'integrale, qui étoient auparavant $x = 0$ et $x = 1$ sont à present renversés savoir $y = 1$ et $y = 0$, ce qui revient au meme. De là nous concluons :

$$(4k - 2m) \int y^{2k+m-1} dy (1 - y^{2n})^{-\frac{m}{n}} \times \int y^{2k-m-1} dy (1 - y^{2n})^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

quand on aura mis $y = 1$ après l'integration, ou bien

$$(4kk - mm) \int y^{2k+m-1} dy (1 - y^{2n})^{-\frac{m}{n}} \times \int y^{2k-m-1} dy (1 - y^{2n})^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$



par la reduction de ces integrales. Donc si $m = 1$ et $n = 2$ nous aurons

$$(4k-2)\int\frac{y^{2k}\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{y^{2k-2}\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{\pi}{2}$$

et partant si $k = 1$

$$\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\cdot\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

23. Or puisque l'angle $\frac{m\pi}{n}$ dépend du seul rapport des nombres m et n, nous aurons $\sin\frac{m\pi}{n} = 1$ si $m = \frac{1}{2}n$; sans qu'on ait besoin de determiner n. Soit donc $m = \frac{1}{2}n$, et pour eviter les fractions $2k = m + \lambda$, d'où nous tirons ce theoreme

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}} = \frac{\pi}{2\lambda n}$$

ou

$$\int\frac{y^{\lambda+n-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^{2n})}}\cdot\int y^{\lambda-1}\,dy\sqrt{(1-y^{2n})} = \frac{\pi}{2\lambda(\lambda+n)}.$$

De meme posant plus generalement $2k = \lambda + m$ on aura

$$\int y^{\lambda+2m-1}\,dy\,(1-y^{2n})^{-\frac{m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}\,dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m-n}{n}} = \frac{\pi}{2\lambda n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ou

$$\int y^{\lambda+2m-1}\,dy\,(1-y^{2n})^{-\frac{m}{n}}\cdot\int y^{\lambda-1}\,dy\,(1-y^{2n})^{\frac{m}{n}} = \frac{m\pi}{\lambda n(\lambda+2m)\sin\frac{m\pi}{n}},$$

ou le nombre λ est arbitraire, de sorte qu'on lui puisse meme donner une valeur irrationelle. Soit $m = \mu k$ et $n = \nu k$ et on aura

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}\,dy\,(1-y^{2\nu k})^{-\frac{\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}\,dy\,(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = \frac{\pi}{2\lambda\nu k\sin\frac{\mu\pi}{\nu}}$$

ou

$$\int y^{\lambda+2\mu k-1}dy(1-y^{2\nu k})^{-\frac{\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy(1-y^{2\nu k})^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\mu\pi}{\lambda\nu(\lambda+2\mu k)\,\text{si}\,\frac{\mu\pi}{\nu}}.$$

24. Posons de plus $2k=\alpha$ pour avoir cette egalité,

$$\int y^{\lambda+\mu\alpha-1}dy(1-y^{\nu\alpha})^{-\frac{\mu}{\nu}}\cdot\int y^{\lambda-1}dy(1-y^{\nu\alpha})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\pi}{\lambda\nu k\,\text{si}\,\frac{\mu\pi}{\nu}}$$

dont on aura ces cas principaux :

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{2\pi}{2\lambda\alpha},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}=\frac{2\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+2\alpha-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})^2}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[3]{(1-y^{3\alpha})}}=\frac{\pi}{3\lambda\alpha\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}},$$

$$\int\frac{y^{\lambda+3\alpha-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})^3}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt[4]{(1-y^{4\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha\sqrt{2}}.$$

25. Comme l'expression infinie du sinus nous a conduit à ces integrations, traitons de la même manière l'expression trouvée pour le cosinus; qui se réduit à cette forme :

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n.n}\cdot\frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n.3n}\cdot\frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n.5n}\ \text{etc.}$$

où puisque ni les numerateurs ni les denominateurs contiennent des facteurs selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, etc. nous n'en saurions exprimer la valeur par une seule formule integrale. Cherchons donc deux formules dont le rapport exprime cette valeur, et l'on voit d'abord qu'il faut mettre $\mu=2n$. Soit donc

$$\frac{6(\alpha+\nu)}{\alpha(6+\nu)}=\frac{(n-2m)(n+2m)}{n.n},$$

et nous aurons $\alpha = n$, $6 = n - \nu$; et $\nu = 2m$; de sorte que $6 = n - 2m$
Par consequent en posant après l'integration $x = 1$ nous avons :

$$\frac{\int x^{n-1}dx(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{n-2m-1}dx(1-x^{2n})^{\frac{m-n}{n}}} = \cos\frac{m\pi}{n} = \text{si}\frac{(n-2m)\pi}{2n}.$$

Donc posant $m = \lambda\mu$ et $n = \lambda\nu$ nous aurons

$$\frac{\int x^{\lambda\nu-1}dx(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}}{\int x^{\lambda\nu-2\lambda\mu-1}dx(1-x^{2\lambda\nu})^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}} = \cos\frac{\mu\pi}{\nu} = \text{si}\frac{(\nu-2\mu)\pi}{2\nu}.$$

26. Considerons-en les cas les plus simples :

I. Si $m = 1$, $n = 2$, $\dfrac{\int x\,dx(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int \frac{dx}{x}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

II. Si $m = 1$, $n = 3$, $\dfrac{\int xx\,dx(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}}{\int dx(1-x^6)^{-\frac{2}{3}}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

III. Si $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\dfrac{\int x\,dx(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}}{\int x\,dx(1-x^4)^{-\frac{3}{4}}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

IV. Si $m = \frac{1}{2}$, $n = 3$, $\dfrac{\int x^2dx(1-x^6)^{-\frac{3}{6}}}{\int x\,dx(1-x^6)^{-\frac{5}{6}}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

De la seconde nous tirons cette egalité

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

La troisieme se réduit à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \sqrt{2}.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

et la quatrieme à

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}.$$

27. Ces formules peuvent être changées, de sorte que la condition de l'integration demeure la meme. Ainsi on trouve

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}};$$

en posant x^3 au lieu de $1-xx$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}};$$

en posant x^3 au lieu de $1-x^6$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}},\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}=2\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}.$$

et partant nous aurons ces egalités :

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\sqrt{2}.\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-xx)^5}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^6)^2}}.$$

28. Par la meme transformation nous trouvons en general :

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{2}}}=\cos\frac{m\pi}{n}.\int\frac{x^{n-2m-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{n-m}{n}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{m\pi}{n}.\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n+2m}{2n}}}$$

et partant

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos\frac{m\pi}{n}\cdot\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}}.$$

Donc, puisque la formule $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$ est la plus simple com ne renfermant que le signe radical quarré nous aurons ces red tions pour le cas $x = 1$.

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

$$\int \frac{x^{n-2m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^{2n})^{n-m}}} = \frac{1}{2\cos\frac{m\pi}{n}}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^n)^{n+2m}}} = \frac{1}{\cos\frac{m\pi}{n}}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

dont la premiere est evidente d'elle même, mais les deux au renferment la nature des cosinus.

29. J'ai aussi trouvé dans mon Introduction (¹) ce pro infini

$$\frac{\operatorname{si}\frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{si}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)}\cdot\frac{(2n+m)(4n-m)}{(2n+k)(4n-k)}\cdot\frac{(4n+m)(6n-m)}{(4n+k)(6n-k)}\,\text{e}$$

qu'on peut reduire à un rapport de deux formules integrales. Po cet effet il faut poser $\mu = 2n$, et

$$\frac{6(\alpha+\nu)}{\alpha(6+\nu)} = \frac{m(2n-m)}{k(2n-k)}$$

(¹) *Introductio in analysin Infinitorum;* Lausannæ. 1758. 2 vol. in-4°.



ce qui se peut faire en quatre manières :

I. $\alpha = k$; $\quad \beta = m$; $\quad \nu = 2n - m - k$; $\quad \dfrac{\nu - \mu}{\mu} = -\dfrac{m - k}{2n}$;

II. $\alpha = k$; $\quad \beta = 2n - m$; $\nu = m - k$; $\quad \dfrac{\nu - \mu}{\mu} = \dfrac{m - k - 2n}{2n}$;

III. $\alpha = 2n - k$; $\beta = m$; $\quad \nu = k - m$; $\quad \dfrac{\nu - \mu}{\mu} = \dfrac{k - m - 2n}{2n}$;

IV. $\alpha = 2n - k$; $\beta = 2n - m$; $\nu = m + k - 2n$; $\quad \dfrac{\nu - \mu}{\mu} = \dfrac{m + k - 4n}{2n}$;

d'où nous aurons :

$$\frac{\int x^{\alpha-1} dx (1 - x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}}{\int x^{\beta-1} dx (1 - x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}} = \frac{\text{si}\,\frac{m\pi}{2n}}{\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}}.$$

et par la transformation

$$\frac{\int x^{\nu-1} dx (1 - x^{\mu})^{\frac{\alpha-\mu}{\mu}}}{\int x^{\nu-1} dx (1 - x^{\mu})^{\frac{\beta-\mu}{\mu}}} = \frac{\text{si}.\,m\pi}{\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}}.$$

30. Cette derniere formule fournit les réductions suivantes :

$$\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{2n-k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{2n-m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{2n-k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m-k-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{m}}},$$

$$\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{k-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{2n-m}}},$$

$$\text{si}\,\frac{k\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{m+k-2n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{m}}}.$$

Or je ne m'arrete pas à donner des exemples; il est aisé de voir qu'on en peut tirer des reductions asses remarquables; comme si $k = n - m$, on aura

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{n+m}}} = \text{tag}\,\frac{m\pi}{2n}\cdot\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1 - x^{2n})^{2n-m}}}.$$

31. Considerons encore un produit infini, que j'avois trouvé

pour la tangente d'un angle,

$$\text{tág}\,\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2(n-m)}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\ \text{etc.}$$

et que nous representons en sorte

$$\frac{m\pi}{2(n-m)\,\text{tág}\,\frac{m\pi}{2n}}=\frac{2n.2n(n+m)(3n-m)}{n.3n(2n-m)(2n+m)}\cdot\frac{4n.4n(3n+m)(5n-m)}{3n.5n(4n-m)(4n+m)}\ \text{etc.}$$

qu'on peut reduire à un produit de deux formules integrales, qui étant en general

$$\nu u\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\mu})^{\frac{\nu-\mu}{\mu}}\cdot\int x^{a-1}dx(1-x^{m})^{\frac{n-m}{m}}$$
$$=\frac{\mu m(\alpha+\nu)(a+u)}{\alpha a(\mu+\nu)(m+u)}\cdot\frac{2\mu.2m(\alpha+\nu+\mu)(a+u+m)}{(\alpha+\mu)(a+m)(2\mu+\nu)(2m+n)}\cdot\text{etc.}$$

où l'on voit d'abord qu'il faut prendre $\mu=m=2n$, et ensuite il reste à rendre :

$$\frac{(n+m)(3n-m)}{n.3n(2n-m)(2n+m)}=\frac{(\alpha+\nu)(a+u)}{\alpha a(\mu+\nu)(m+u)}.$$

Qu'on prenne donc $\alpha+\nu=n+m$ et $a+u=3n-m$ et on trouvera les quatre solutions suivantes :

I. $\nu=m$; $u=-m$; $\alpha=n$; $a=3n$; $\mu=2n$; $m=2n$

II. $\nu=m$; $u=n$; $\alpha=n$; $a=2n-m$; $\mu=2n$; $m=2n$

III. $\nu=-n$; $u=-m$; $\alpha=2n+m$; $a=3n$; $\mu=2n$; $m=2n$

IV. $\nu=-n$; $u=n$; $\alpha=2n+m$; $a=2n-m$; $\mu=2n$; $m=2n$

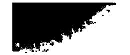
32. Voilà donc les quatre reductions qui s'ensuivent.

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{\pi}{2m(m-n)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{2n+m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}}\cdot\int\frac{x^{3n-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}}=\frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int\frac{x^{2n+m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}}\cdot\int\frac{x^{2n-m-1}dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{n}}}=\frac{m\pi}{2nn(m-n)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$



il faut remarquer que

$$\int \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n+m}}} = \frac{-n}{m}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}}$$

$$\int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{3n}}} = \frac{-m}{n}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}.$$

33. Ces substitutions nous fournissent les formules suivantes :

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[2n]{(1-x^{2n})^{m}}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

ui se reduisent à ces formules plus simples :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{n\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = \frac{\pi}{2(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-m)}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

4. Or par des substitutions ulterieures on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{2n-m}}} = n\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[2n]{(1-xx)^{m}}} = n\int \frac{x^{2n-m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

sorte que toutes nos formules se reduisent à la derniere, qui est

la plus simple, puisqu'elle ne renferme que le signe radical quarr laquelle si nous posons $m = n - k$ se change en cette forme ass remarquable :

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk}\,\text{tág}\,\frac{k\pi}{2n},$$

d'ou si $k = 0$ à cause $\text{tag}\,\frac{k\pi}{2n} = \frac{k\pi}{2n}$, on obtient

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi\pi}{4nn}.$$

35. Considerons quelques cas particuliers.

I. Si $n = 1$; $k = 0$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi\pi}{4}$;

II. Si $n = \frac{3}{2}$; $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{\ }}$

III. Si $n = 2$; $k = 1$, $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

IV. Si $n = \frac{5}{2}$; $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{5}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{10}$;

V. Si $n = \frac{5}{2}$; $k = \frac{3}{2}$, $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{15}\,\text{tág}\,\frac{3\pi}{10}$;

VI. Si $n = 3$; $k = 1$, $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6}$;

VII. Si $n = 3$; $k = 2$, $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{3}$;

VIII. Si $n = \frac{7}{2}$; $k = \frac{1}{2}$, $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{7}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{14}$;

IX. Si $n = \frac{7}{2}$; $k = \frac{3}{2}$, $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{21}\,\text{tág}\,\frac{3\pi}{14}$;

X. Si $n = \frac{7}{2}$; $k = \frac{5}{2}$, $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{35}\,\text{tág}\,\frac{5\pi}{14}$;

XI. Si $n = 4$; $k = 1$, $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{8}$;

XII. Si $n=4$; $k=3$, $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\frac{\pi}{24}\text{ tág }\frac{3\pi}{8}$;

XIII. Si $n=\frac{9}{2}$; $k=\frac{1}{2}$, $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{9}\text{ tág }\frac{\pi}{18}$;

XIV. Si $n=\frac{9}{2}$; $k=\frac{5}{2}$, $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{45}\text{ tág }\frac{5\pi}{18}$;

XV. Si $n=\frac{9}{2}$; $k=\frac{7}{2}$, $\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^9)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}}=\frac{2\pi}{63}\text{ tág }\frac{7\pi}{18}$;

XVI. Si $n=5$; $k=2$, $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{20}\text{ tág }\frac{\pi}{5}$;

XVII. Si $n=5$; $k=4$: $\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{\pi}{40}\text{ tág }\frac{2\pi}{5}$;

XVIII. Si $n=6$; $k=1$: $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{12}\text{ tág }\frac{\pi}{12}$;

XIX. Si $n=6$; $k=5$: $\int\frac{x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\frac{\pi}{60}\text{ tág }\frac{5\pi}{12}$.

36. La formule $\int\frac{y^{\lambda+\alpha-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}\cdot\int\frac{y^{\lambda-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2\alpha})}}=\frac{\pi}{2\lambda\alpha}$ que nous avons trouvée cy-dessus (§ 24) a avec celles cy un grand rapport; pour le developpement duquel écrivons x à la place de y et posons $\alpha=n$ pour avoir :

$$\int\frac{x^{\lambda+n-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2\lambda n}.$$

Or la formule que nous venons de trouver etant :

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}\cdot\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{\pi}{2nk}\cdot\text{tág }\frac{k\pi}{2n}$$

si nous posons $\lambda=k$ nous aurons :

$$\int\frac{x^{n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\text{tág }\frac{k\pi}{2n},$$

et si nous posons $\lambda=n-k$

$$\int\frac{x^{n+k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}:\int\frac{x^{2n-k-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}}=\frac{n-k}{k}\text{ tág }\frac{k\pi}{2n}.$$

37. Or pour rendre ces reductions plus generales, po
$y = x^{\frac{n}{\alpha}}$ pour avoir suivant le § 24,

$$\int \frac{x^{\frac{\lambda n}{\alpha}+n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{\frac{\lambda n}{\alpha}-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi\pi}{2\lambda n n}.$$

Soit $\frac{\lambda n}{\alpha} = k$ et nous trouverons la meme formule que cy-dessus
la position $\frac{\lambda n}{\alpha} = n - k$ ne produit rien de nouveau non p
Voyons donc quelques cas particuliers :

I. Soit $n = 1$ et $k = 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} : \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}.$$

II. Si $n = \frac{3}{2}$; $k = \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \text{tág}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et l'autre

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}} : \int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

III. Si $n = 2$, $k = 1$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \text{tág}\,\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \text{tág}\,\frac{\pi}{4} = 1,$$

et l'autre

$$\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \text{tág}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} : \int \frac{xx\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^4)}} = 3\,\text{tág}\,\frac{\pi}{8};$$

ɜncore quelques autres :

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^5)}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}=4\ \text{tág}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{xx\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x^5)}}:\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}}=\frac{3}{2}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}:\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=2\ \text{tág}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}:\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}=3\ \text{tág}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=4\ \text{tág}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}:\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}=\frac{3}{2}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=\ \text{tág}\,\frac{\pi}{12},$$

$$\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}:\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}=5\ \text{tág}\,\frac{\pi}{12}.$$

ɜs formules sont semblables par rapport à la forme à celles ·té trouvées cy dessus § 34 : toutes ces formules étant comns cette expression generale $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$. Mais cy-dessus produit de deux telles formules, dont j'avois assigné la

valeur, pendant que nous avons ici des quotiens, qui resultent de la division de l'une par l'autre. Mais dans l'un et l'autre cas il est evident que l'integration de l'un se reduit à celle de l'autre. Puisque la plupart de ces reductions sont tout à fait nouvelles, il vaudra bien la peine de les considerer plus soigneusement; pour cet effet je les distribuerai en classes selon l'exposant de la variable x derriere le signe radical, m et n etant des nombres entiers.

I. Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3} \operatorname{tág} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

II. Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4} \operatorname{tág} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

III. Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{5} \operatorname{tág} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = \frac{2\pi}{15} \operatorname{tág} \frac{3\pi}{10}.$$

IV. Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6} \operatorname{tág} \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12} \operatorname{tág} \frac{\pi}{3},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \operatorname{tág} \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^6)}} : \int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = 2 \operatorname{tág} \frac{\pi}{6}.$$

Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}}$:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{7}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{14},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{21}\,\text{tág}\,\frac{3\pi}{14},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^7)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^7)}} = \frac{2\pi}{35}\,\text{tág}\,\frac{5\pi}{14}.$$

Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{4},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24}\,\text{tág}\,\frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \text{tág}\,\frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} : \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 3\,\text{tág}\,\frac{\pi}{8}.$$

Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}}$:

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{9}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{18},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{27}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{45}\,\text{tág}\,\frac{5\pi}{18},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^9)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^9)}} = \frac{2\pi}{63}\,\text{tág}\,\frac{7\pi}{18}.$$

VIII. Reduction des formules $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10}\,\text{táng}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20}\,\text{táng}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30}\,\text{táng}\,\frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40}\,\text{táng}\,\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \text{táng}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \text{táng}\,\frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = 4\,\text{táng}\,\frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} : \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{3}{2}\,\text{táng}\,\frac{\pi}{5}.$$

39. En combinant les quotients avec les produits de chaque classe on en peut former de nouveaux produits, ce que je ferai voir en general: car ayant ce produit

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk}\,\text{táng}\,\frac{k\pi}{2n}$$

et outre cela ces deux quotients :

$$\text{I.}\quad \int \frac{x^{n-\alpha-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \text{táng}\,\frac{\alpha\pi}{2n},$$

$$\text{II.}\quad \int \frac{x^{n+b-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} : \int \frac{x^{2n-b-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{n-b}{b}\,\text{táng}\,\frac{b\pi}{2n};$$

combinons le produit avec le premier quotient, en posant $\alpha = n-k$ et nous aurons en les multipliant

$$\int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{k-1}}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk}.$$

Ensuite pour le second quotient posons $b = n - k$, et en multipliant nous aurons :

$$\int \frac{x^{2n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2n(n-k)}$$

qui ne diffère pas du precedent. Ainsi pour chaque classe nous avons deux produits généraux :

$$\text{I.} \quad \int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk}\,\text{tág}\,\frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{x^{n+k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \cdot \int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\pi}{2nk},$$

dont le dernier convient avec ceux que j'avois déjà demontrés autrefois.

40. Developpons ces produits pour quelques cas, ou n et k sont des nombres entiers; et nous aurons les reductions suivantes pour le cas $x = 1$.

I. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

II. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}\,\text{tág}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{12}.$$

III. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$:

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8} \operatorname{tág} \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16} \operatorname{tág} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24} \operatorname{tág} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{16},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = \frac{\pi}{24}.$$

IV. Produits de la forme $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$:

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10} \operatorname{tág} \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20} \operatorname{tág} \frac{\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30} \operatorname{tág} \frac{3\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40} \operatorname{tág} \frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{10},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{20},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{30},$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}} = \frac{\pi}{40}.$$

41. Après ces integrations des formules qui sont toutes comprises

dans cette generale $\int x^{m-1}\,dx(1-x^n)^k$, et qu'on peut nommer algebriques, puisque dxy est multiplié par une fonction algebrique de x, je passe comme je me suis proposé à considérer encore quelques formules integrales, où le differentiel dx est multiplié par une fonction transcendante de x, et dont l'integrale dans un certain cas se peut exprimer ou algebriquement ou par la quadrature du cercle. Ces cas sont d'autant plus remarquables, qu'il nous manque encore des methodes pour les traiter; et partant les observations suivantes serviront peut-être à decouvrir de telles methodes.

42. Je ne m'arreterai pas ici à cette formule integrale assez connue $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n$, dont on sait que la valeur au cas, qu'on met apres l'integration $x=1$, devient $=1.2.3\ldots n$; de sorte que cette valeur peut être assignée toutes les fois que l'exposant n est un nombre entier. Mais quand n est une fraction, la valeur est beaucoup plus difficile à assigner. Ainsi si $n=\frac{1}{2}$, j'ai demontré que la valeur de l'integrale $\int dx\sqrt{l\frac{1}{x}}$ au cas $x=1$ est $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. De là on tire aisément ces integrations qui en dependent :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{7}{2}}=\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}\sqrt{\pi},$$

puisqu'il y a en general

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{m}=x\left(l\frac{1}{x}\right)^{m}+m\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{m-1}.$$

Donc, posant après l'integration $x = 1$ à cause de $l\,\frac{1}{x} = 0$, on aura

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{m} = m \int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{m-1}.$$

43. Cette intégration du cas de $n = \frac{1}{2}$ peut s'exprimer de cette manière,

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} \quad \text{posant } x = 1,$$

et pour les autres fractions mises pour n, j'ai trouvé les reductions suivantes :

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{\frac{2}{4}} \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} \cdot \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}}$$
$$\times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}} \cdot \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}} \cdot \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}},$$

$$\int dx \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{5}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^3}}$$
$$\times \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^3}} \cdot \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^3}} \cdot \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^3}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{5}} = 3 \sqrt[5]{\frac{2}{5}} \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^2}}$$
$$\times \int \frac{x^5\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^2}} \cdot \int \frac{x^8\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^2}} \cdot \int \frac{x^{11}\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^2}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{4}{5}} = 4 \sqrt[5]{\frac{6}{5}} \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)}}$$
$$\times \int \frac{x^7\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)}} \cdot \int \frac{x^{11}\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)}} \cdot \int \frac{x^{15}\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)}}.$$

44. Puisqu'il se trouve parmi ces formules, où l'exposant de x est plus grand dans le numerateur, que dans le denominateur, si nous deprimons ces exposans par le secours de cette reduction,

$$\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^k = \frac{m - n}{m + nk} \int x^{m-n-1} dx (1 - x^n)^k,$$

nous trouverons les formules suivantes :

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3}} = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^3}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{4}} = 2 \sqrt[4]{\frac{1}{4^2}} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}} \cdot \int \frac{xx\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^2}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{3}{4}} = 3 \sqrt[4]{\frac{2}{4^3}} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} \cdot \int \frac{xx\, dx}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}},$$

$$\int dx \left(l\, \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}}$$
$$\times \int \frac{x\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}} \cdot \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}} \cdot \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^4}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{5^2}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}$$
$$\times\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{2}{5^3}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}$$
$$\times\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{6}{5^4}}\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}$$
$$\times\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}.$$

45. Voilà donc les valeurs de la formule integrale transcendante $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n$ lorsque n est une fraction reduite à des valeurs des formules integrales, où dx est multiplié par une fonction algebrique de x. Or parmi ces dernieres formules il y a toujours une qui renferme la quadrature du cercle, puisque

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}.$$

Ensuite pour pouvoir mieux comparer les autres ensemble, posons dans les formules du § 21 : $2k = 2n + m - 2\lambda$ pour avoir :

$$\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda-m}}}\cdot\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\lambda}}} = \frac{\pi}{n(n-\lambda)\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}.$$

De là nous avons :

I. Si $n = 3$:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\pi}{3\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}},$$

II. Si $n=4$:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{8\,\text{si}\,\frac{\pi}{4}},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{4\,\text{si}\,\frac{\pi}{4}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{4\,\text{si}\,\frac{\pi}{2}}.$$

III. Si $n=5$:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{\pi}{15\,\text{si}\,\frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{10\,\text{si}\,\frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5\,\text{si}\,\frac{\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{10\,\text{si}\,\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5\,\text{si}\,\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5\,\text{si}\,\frac{3\pi}{5}}.$$

46. De là nous voyons, que multipliant toutes les formules du meme ordre ensemble, le produit se reduit à la quadrature du

cercle; ainsi nous aurons

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{9\,\mathrm{si}\,\frac{3}{\pi}}\cdot\pi=\frac{2}{3^2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{4}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{4^3\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{4}}=\frac{6}{4^3}\sqrt{\frac{8\pi^3}{4}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}$$
$$=\frac{24\pi^2}{5^4\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{5}\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{5}}=\frac{24}{5^4}\sqrt{\frac{16\pi^4}{5}},$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{6}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{6}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{6}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{6}}$$
$$=\frac{120\pi^2\sqrt{\pi}}{6^5\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{6}\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{6}}=\frac{120}{6^5}\sqrt{\frac{32\pi^5}{6}}.$$

De là nous concluons qu'il y aura en general

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}},$$

lequel theoreme est tout à fait digne d'attention.

47. La comparaison de ces formules peut être poussée plus loin, en considerant ce theoreme general,

$$\int\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{6}}}=\int\frac{x^{n-6-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-\alpha}}},$$

d'où le theoreme precedent, tiré du § 21, se change aussi en d'autres formes. Ensuite les formules du § 29 fournissent les comparaisons

suivantes :

$$\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} : \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} : \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+k-m}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} : \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n+m-k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}} : \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{2n-m-k}}} = \text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

dont les dernieres se deduisent de la premiere, puisqu'au lieu de m et k on peut mettre $n-m$ et $n-k$.

48. Maintenant puisque $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} = \frac{n-k}{m} \int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}}$, on aura encore cette comparaison

$$\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{m+k}}} : \int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)^{m+k}}} = \frac{n-k}{m}\,\text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

et prenant pour m un nombre negatif

$$\int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)^{k-m}}} : \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{k-m}}} = \frac{n-k}{m}\,\text{si}\,\frac{m\pi}{n} : \text{si}\,\frac{k\pi}{n},$$

d'où nous tirons les comparaisons particulieres suivantes

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} : \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \text{si}\,\frac{\pi}{4} : \text{si}\,\frac{\pi}{2} = 1 : \sqrt{2},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} : \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \text{si}\,\frac{\pi}{5} : \text{si}\,\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} : \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \text{si}\,\frac{\pi}{5} : \text{si}\,\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} : \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = 2\,\text{si}\,\frac{\pi}{5} : \text{si}\,\frac{2\pi}{5},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} : \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = 3\,\text{si}\,\frac{\pi}{5} : \frac{2\pi}{5}.$$

49. Pour faire voir l'usage de ces reductions considerons l. formules particulieres qui entrent dans les expressions des formul

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}};\quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}};\quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}};\quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

Et d'abord le nombre de toutes les dites formules etant 16, il y a qui dependent de la quadrature du cercle.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{5}};\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{5}},$$

$$\int_0^1 \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{3\pi}{5}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{5}};\quad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{4\pi}{5}} = \frac{\pi}{5\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{5}}.$$

Pour les autres 12, la reduction generale fournit

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Ensuite nous venons de trouver

$$\int_0^1 \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{\mathrm{si}\,\frac{1}{5}\pi}{\mathrm{si}\,\frac{2}{5}\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{\mathrm{si}\,\frac{1}{5}\pi}{\mathrm{si}\,\frac{2}{5}\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}},$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{2\,\mathrm{si}\,\frac{1}{5}\pi}{\mathrm{si}\,\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}} = \frac{3\,\mathrm{si}\,\frac{1}{5}\pi}{\mathrm{si}\,\frac{2}{5}\pi} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}},$$

auxquelles on peut ajouter les produits de deux telles formules rapportées au § 45 pour le cas $n=5$.

50. Si nous examinons toutes ces egalités, nous trouvons que ces 12 formules se reduisent à deux; posons pour abreger

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}, \quad \alpha = \mathrm{si}\,\frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad \beta = \mathrm{si}\,\frac{2\pi}{5},$$

et toutes nos formules peuvent être reduites à la quadrature du cercle et à ces deux

$$\int yy\,dx \text{ et } \int y^3 dx.$$

De cette maniere :

$$\int y^4 dx = \frac{\beta}{\alpha}\int yy\,dx; \qquad \int xy^4 dx = \int y^3 dx;$$

$$\int x^2 y^4 dx = \int yy\,dx; \qquad \int x^3 y^4 dx = \frac{\pi}{5\alpha};$$

$$\int xy^3 dx = \frac{\alpha}{\beta}\int y^3 dx; \qquad \int x^2 y^3 dx = \frac{\pi}{5\beta};$$

$$\int x^3 y^3 dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dy};$$

$$\int xy^2 dx = \frac{\pi}{5\beta}; \qquad \int x^2 y^2 dx = \frac{\pi}{5\beta\int y^3 dx};$$

$$\int x^3 y^2 dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3 dx};$$

$$\int y\,dx = \frac{\pi}{5\alpha}; \qquad \int xy\,dx = \frac{\pi}{5\beta\int yy\,dx};$$

$$\int x^2 y\,dx = \frac{\pi}{10\alpha\int y^3 dx}; \qquad \int x^3 y\,dx = \frac{\pi}{15\alpha\int yy\,dx}.$$

Soit donc

$$\int y\,dx = A \quad \text{et} \quad \int y^3\,dx = B,$$

et les valeurs de nos formules transcendantes seront

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4\pi AAB}{5^2 \pi\pi}}.$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{\frac{\pi\pi\, BB}{5^4\, A}}.$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{\pi^3 A}{5^4\, BB}}.$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{\frac{\pi^4}{5^3\, AAB}}.$$

51. De là nous voyons que non seulement le produit de toutes ces quatre formules dépend uniquement de la quadrature du cercle, mais aussi le produit de deux, dont les exposans sont ensemble [illegible], savoir :

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]} = \frac{4\pi}{5^2 \sin\frac{\pi}{5}}$$

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]} \cdot \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]} = \frac{6\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}}.$$

Outre cela nous en pouvons déduire ces égalités

[illegible] $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{[illegible]}}} = \frac{5A}{2\pi}$

[illegible] $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{[illegible]}$ [illegible] $\frac{2\pi B}{\sqrt{5}}$ [illegible] $\frac{4\pi}{5^2 \sin\frac{2\pi}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{[illegible]}}}$.

52. Si nous joignons ces determinations aux precedentes, nous en pourrons tirer les conclusions generales suivantes :

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2^2\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{2}},$$

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2\pi}{3^2\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{3}},$$

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{3\pi}{4^2\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{4}},$$

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{4\pi}{5^2\,\mathrm{si}\,\frac{\pi}{5}},$$

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{6\pi}{5^2\,\mathrm{si}\,\frac{2\pi}{5}}.$$

et en general

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}}=\frac{m(n-m)\pi}{nn\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}.$$

Donc puisque

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{n}}=\frac{n-m}{n}\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}$$

nous aurons

$$\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\,\frac{1}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}=\frac{m\pi}{n\,\mathrm{si}\,\frac{m\pi}{n}}=m\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}.$$

53. Cette derniere egalité se peut aisement demontrer imme-

diatement en developpant le cas le plus simple où l'exposant est un nombre entier :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\lambda}=1.2.3\ldots\lambda.$$

Or cette expression terminée se peut exprimer par un produi infini comme :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\lambda}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\lambda}\cdot\frac{1}{1+\lambda}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\lambda}\cdot\frac{2}{2+\lambda}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\lambda}\cdot\frac{3}{3+\lambda}\text{ etc.}$$

Posons maintenant $\lambda=\frac{m}{n}$ pour avoir :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{n}}\frac{3n}{3n+m}\cdot\text{etc.}$$

et faisons aussi m negatif :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{-\frac{m}{n}}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{m}{n}}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{m}{n}}\cdot\frac{3n}{3n-m}\text{etc.}$$

Le produit de ces deux formules donne ouvertement

$$\frac{nn}{nn-mm}\cdot\frac{4nn}{4nn-mm}\cdot\frac{9nn}{9nn-mm}\text{ etc.}=\frac{m\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

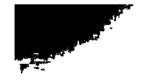
54. Nous pouvons pousser plus loin ces recherches, car puisque

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\frac{n}{n+p}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{n}}\frac{2n}{2n+p}\text{ etc.,}$$

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\frac{n}{n+q}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{q}{n}}\frac{2n}{2n+q}\text{ etc.}$$

et

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{n}{n+p+q}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p+q}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+p+q}$$



le produit des deux premieres divisé par la derniere donne

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q}{n}}}=\frac{n(n+p+q)}{(n+p)(n+q)}\cdot\frac{2n(2n+p+q)}{(2n+p)(2n+q)}\text{ etc.},$$

dont la valeur est

$$q\int\frac{x^{n+p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\frac{pq}{p+q}\int\frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ou bien aussi $= q\int x^{q-1}dx\sqrt[n]{(1-x^n)^p} = p\int x^{p-1}dx\sqrt[n]{(1-x^n)^q}$, d'où il s'ensuit la precedente, quand on pose $p=m$ et $q=-m$. De meme on trouvera la valeur de

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{q}{n}}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{r}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p+q+r}{n}}}$$

$$=\frac{pqr}{p+q+r}\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}.$$

55. Enfin pour finir cette matiere, la sommation des series reciproques des puissances nous fournit encore les valeurs des formules transcendantes suivantes, quand on met apres l'integration $x=1$,

$$\int\frac{dx}{x}l\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^2}{6};\quad\int\frac{dx}{x}l(1+x)=\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int\frac{dx}{x}l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^2}{8},$$

et ces plus composées

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\frac{1}{1-x}=\frac{\pi^4}{90};\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l(1+x)=\frac{7\pi^4}{720},$$

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,\mathrm{A\,tag}\,x=\frac{\pi^3}{32};\quad \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\,l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Or il ne paroit aucune route directe, qui nous pourroit mener à ces determinations, ce qui merite par cela meme d'autant plus d'attention.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOULD (B.-A.). — URANOMETRIA ARGENTINA. Brightness and position of every fixed star, down to the seventh magnitude within one hundred degrees of the south pole, with an Atlas. 1 vol. in-4°. Buenos-Aires, 1879.

Le Volume que nous analysons ici est le premier des publications astronomiques de l'Observatoire de Cordoba, déjà bien connu des lecteurs du *Bulletin*, et son histoire se rattache intimement à celle de la création de l'Observatoire.

En arrivant à Cordoba, au mois de septembre 1870, pour y établir l'Observatoire National de la République Argentine, M. Gould avait l'espoir de pouvoir bientôt entreprendre les recherches qui l'avaient déterminé à passer dans l'Amérique du Sud et qui devaient avoir pour résultat immédiat la construction d'un Catalogue complet des principales étoiles du ciel austral; mais il se heurta à toute une série de difficultés. Le cercle méridien qu'il portait avec lui ne put être monté qu'en mai 1872 et les observations ne commencèrent effectivement qu'en septembre de la même année.

Deux ans s'étaient donc écoulés avant que les astronomes que M. Gould avait amenés avec lui eussent la libre disposition de leur instrument fondamental, mais ils n'étaient pas pour cela restés oisifs: ils avaient entrepris de déterminer les grandeurs relatives de toutes les étoiles visibles à l'œil nu et d'en dresser une Carte, assez complète pour être d'un usage utile, et un Catalogue approché. C'est ce double travail que M. Gould publie aujourd'hui sous le titre d'*Uranometria Argentina*.

Une première difficulté fut de dresser, avec les quelques Catalogues que l'on avait sous la main, le squelette des Cartes qui devaient former l'Atlas. Elle fut surmontée, en partie au moins, grâce aux anciennes observations de La Caille et de Taylor, et les étoiles non observées par ces deux astronomes, quoique visibles à l'œil nu, furent intercalées sur les planches par la méthode des alignements. Le plus grand nombre d'entre elles ont été identifiées depuis avec des étoiles déjà déterminées, ou bien elles ont été directement observées, en sorte que leur position exacte est marquée sur les Cartes.

La seconde difficulté et la partie la plus délicate du travail con-

sistait à choisir les étoiles qui devaient servir d'échelons, de types, pour marquer les degrés de la série décroissante des grandeurs. L'échelle adoptée par M. Gould est celle d'Argelander dans l'*Uranometria nova*. Les étoiles étalons ont été prises dans une zone qui a, à Cordoba, la même altitude qu'à Bonn, c'est-à-dire dans une zone de 5° de largeur ayant pour déclinaison moyenne 9°39′15″. Pour chaque ordre de grandeur au-dessous de la seconde, ces étoiles types furent choisies parmi celles qui représentent le mieux l'éclat moyen de celles auxquelles Argelander a attribué ce même ordre de grandeur. Ces degrés de l'échelle ayant été déterminés, les différentes étoiles de la zone des types vinrent facilement se classer parmi elles, et l'on eut bientôt ainsi une échelle complète des grandeurs, comprenant 722 étoiles, depuis la 1re grandeur jusqu'à la 7e.

Ce travail de classement a d'ailleurs été fait d'une manière indépendante par chacun des quatre astronomes de Cordoba, et il est remarquable que, sauf le cas d'étoiles très vivement colorées, l'accord entre les quatre observateurs est presque complet.

Transporter sans intermédiaire cette échelle de grandeurs parmi les étoiles les plus australes ou comparer directement ces étoiles de la zone équatoriale à des étoiles voisines du pôle sud fut bientôt reconnu une opération trop difficile et trop incertaine dans ses résultats; les observateurs se décidèrent alors à comparer minutieusement et pendant un grand nombre de nuits consécutives les étoiles de la première zone type avec celles d'une zone située à environ 45° de déclinaison sud et qui a, à son tour, servi de zone étalon pour la détermination de la grandeur des étoiles circumpolaires australes.

L'étendue de cette analyse ne me permet pas d'entrer dans plus de détails sur les méthodes d'observation employées par M. Gould et ses assistants ; j'espère cependant avoir indiqué assez exactement les diverses précautions prises pour que les astronomes puissent se faire une idée exacte de la haute précision des déterminations de l'*Uranometria Argentina*. Cette haute précision est d'ailleurs indirectement prouvée par l'accord qui règne entre les déterminations d'Argelander, du Dr Heiss et de M. Gould.

Les étoiles observées à Cordoba comprennent toutes les étoiles, de grandeur égale ou supérieure à la septième, situées entre +40° de déclinaison nord et le pôle austral. Leur position approchée

pour 1875,0 est inscrite dans un Catalogue spécial et leur position reportée sur quatorze planches grand raisin.

La construction de ces cartes a été l'objet d'une étude toute particulière, nécessaire non seulement pour leur donner une exactitude complète, ce qui a exigé de nombreuses séries d'observations méridiennes, mais encore pour tracer sur elles les limites des constellations et pour classer ensuite les étoiles dans ces constellations.

Si les constellations visibles des astronomes d'Europe sont bien connues, ou du moins si l'on s'accorde sur leurs limites à la suite des travaux de Bayer, de Flamsteed et de Bode, il est loin d'en être de même pour les constellations les plus australes. L'Uranométrie de Bayer ne donne que douze constellations australes empruntées aux observations du navigateur Pierre Dircksz Keyser, qui avait été attaché à la première expédition des Hollandais dans l'Inde. Plus tard, le nombre des étoiles australes connues augmentant avec les voyages, devenus plus fréquents, Hevelius, Halley, La Caille, puis Lalande, ajoutèrent quelques constellations nouvelles, baptisées de noms qui n'ont point été acceptés. Le seul travail original sur ces constellations australes est d'ailleurs celui que La Caille fit après son retour en Europe, et l'on sait que les limites et la nomenclature adoptées par l'astronome français dans son *Cœlum australe stelliferum* ont été vivement critiquées par Bode et surtout par Baily, dans la préface du *British Association Catalogue*.

Les remaniements introduits par ces derniers astronomes dans les constellations du ciel austral avaient jeté une telle confusion dans la nomenclature des étoiles de cette partie du ciel, qu'en 1834 Herschel proposait de faire table rase de tous les travaux précédents et de former dans cette partie du ciel des constellations géométriques ayant pour limites des arcs de méridien ou de parallèle (*Memoirs of the R. Astron. Society*, Vol. XII). Les idées d'Herschel ne furent pas admises, et, jusqu'à ces dernières années, les astronomes ont continué à employer pour le ciel austral la nomenclature de La Caille modifiée par Baily.

Les inconvénients de cette dernière sont d'ailleurs nombreux et bien connus; M. Gould s'est efforcé de les faire disparaître en adoptant les principes suivants :

1° Les constellations de Ptolémée et d'Hevelius, ainsi que celles qui ont été adoptées ou créées par Lacaille, seront seules conser-

vées; leurs limites seront conformes aux limites généralement adoptées. Le nom distinctif d'*Argo* disparaîtra, cette constellation étant remplacée par ses trois divisions *Carina, Puppis* et *Vela.*

2° La forme latine est adoptée pour les noms, comme étant la seule pratique pour les usages internationaux. Ces noms seront en général formés d'un seul mot, excepté dans le cas où une constellation australe doit être distinguée d'une constellation boréale du même nom et dans le cas du *Canis Major,* qui doit être distingué du *Canis Minor.*

3° Les limites seront combinées de manière que les constellations renferment toutes les étoiles de la constellation que les auteurs ont désignées à l'origine par des lettres grecques. Les lignes limites seront d'ailleurs, autant que cela sera possible, formées par des arcs de méridien ou de parallèle pour 1875,0. Quand cela ne sera pas possible, les courbes adoptées seront des arcs de grand cercle définis par leurs points d'intersection avec les méridiens et parallèles voisins.

4° Les lettres adoptées pour les étoiles seront celles de Bayer jusqu'aux constellations de 45° de déclinaison australe; au delà de cette limite, on fera usage des lettres de La Caille. La notation de La Caille est conservée pour *Argo, Centaurus, Ara, Lupus* et *Corona austrina.*

5° Les lettres grecques de La Caille sont conservées pour les étoiles dont la distance polaire est inférieure à 25°.

C'est conformément à ces principaux principes, que je viens de résumer rapidement, qu'ont été dressés les Cartes et le Catalogue de l'*Uranometria Argentina.* Le Volume de M. Gould donne donc aux astronomes non seulement des cartes exactes et complètes du ciel austral, cartes dont ils étaient privés, mais il établit encore pour les étoiles de cette partie du ciel une nomenclature qui sera sans aucun doute adoptée par tous.

J'ajoute que l'exécution typographique du Volume et des quatorze très grandes cartes de l'Atlas fait le plus grand honneur aux imprimeries de la République Argentine. G. R.

STONE (Ormond). — PUBLICATIONS OF THE CINCINNATI OBSERVATORY. Micrometrical measurements of 1054 double stars observed with the 11 inch Refractor from January 1, 1878, to September 1, 1879. — 1 vol. in-8°, XXIX et 180 pages. Cincinnati, 1879.

Les observations publiées par M. Ormond Stone, au nom de l'Observatoire qu'il dirige, se rapportent à des étoiles doubles déjà signalées comme telles et situées pour la plupart dans l'hémisphère sud. Sur les 1054 groupes observés, 622 sont en effet au sud de l'équateur et 432 seulement au nord de cette ligne; ces dernières n'ont d'ailleurs été mesurées que pour établir des points de comparaison entre les déterminations des observateurs de Cincinnati et celles des astronomes d'Europe. Parmi les 1054 étoiles doubles déterminées, 560 se trouvent dans le Catalogue de Struve à Dorpat, 171 ont été signalées par Herschel et enfin 171 ont été découvertes dans ces dernières années par M. Burnham.

Les étoiles nord ont été observées une fois seulement; les étoiles sud l'ont été, au contraire, deux fois au moins.

Toutes les précautions ont d'ailleurs été prises pour éliminer l'influence des erreurs périodiques de la vis, et pour cela la région employée a été souvent changée. D'un autre côté, l'astronome s'est astreint à toujours placer sa tête de manière que la ligne des étoiles fût parallèle ou perpendiculaire à la ligne des yeux; M. O. Stone espère avoir ainsi éliminé l'erreur particulière qui résulte de l'inclinaison de la ligne des étoiles par rapport à l'axe de la tête et par conséquent par rapport à la verticale.

Dans l'Introduction au Mémoire que nous analysons ici, M. O. Stone donne d'ailleurs le détail des études préliminaires faites pour déterminer la grandeur absolue, la variation de ces diverses causes d'erreur et les formules qui les représentent. Les Tableaux où ces différents nombres sont consignés montrent que les observations de distance faites à Cincinnati ont une exactitude intermédiaire entre celles que W. Struve et O. Struve assignent à leurs mesures, et que pour les angles de position leur exactitude est au moins aussi grande que celle obtenue par ces deux illustres astronomes.

Le Mémoire de M. O. Stone constitue donc un document important pour l'histoire des étoiles doubles du ciel austral, et il devait, à ce titre, être signalé à l'attention des astronomes. G. R.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DONT TOUTES LES RACINES PEUVENT S'EXPRIMER LINÉAIREMENT EN FONCTION DE L'UNE D'ELLES;

PAR M. A.-E. PELLET.

1. Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 10 mai 1880, j'ai montré que, si les racines d'une équation de degré m peuvent être représentées par $x, \theta(x), \ldots, \theta^{m-1}(x)$, x étant l'une quelconque d'entre elles et $\theta(x)$ représentant une fonction linéaire $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ telle que $\theta^m(x) = x$ identiquement, cette équation peut se mettre sous la forme

$$A(x+\lambda)^m + B(x+\lambda')^m = 0.$$

En développant et ordonnant le premier membre par rapport à x, il devient

$$f(x) = a_0x^m + ma_1x^{m-1} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i} a_i x^{m-i} + \ldots + a_m,$$

trois termes consécutifs de la suite $a_0, a_1, \ldots, a_m$ étant reliés par une relation linéaire homogène $\alpha_0 a_i + \alpha_1 a_{i+1} + \alpha_2 a_{i+2} = 0$, de sorte que cette suite est formée de m termes consécutifs d'une série récurrente provenant d'une fraction dont le dénominateur est du second degré.

Réciproquement, $f(x)$ étant une fonction satisfaisant aux conditions précédentes, on a identiquement

$$(\lambda' - \lambda)f(x) = (a_0\lambda' - a_1)(x+\lambda)^m - (a_0\lambda - a_1)(x+\lambda')^m,$$

λ et λ' représentant les deux racines de l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 a_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 = 0,$$

supposées distinctes. Si les deux racines de cette équation sont



égales, on a, λ désignant cette racine double,

$$f(x) = (x+\lambda)^{m-1}[a_0(x+\lambda) - m(a_0\lambda - a_1)].$$

L'équation $f(x) = 0$ a alors $m-1$ racines égales à $-\lambda$ et une racine simple, pourvu que λ ne soit pas égal à $\frac{a_1}{a_0}$. Dans le premier cas, les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont égales à $\frac{\lambda' y - \lambda}{1-y}$, y prenant les m valeurs racines de l'équation

$$(a_0\lambda' - a_1)y^m - (a_0\lambda - a_1) = 0.$$

Les m racines de l'équation $f(x) = 0$ sont distinctes.

Supposons les coefficients de $f(x)$ réels. Si les racines de l'équation en λ sont imaginaires, la quantité $\frac{a_0\lambda - a_1}{a_0\lambda' - a_1}$ est imaginaire et a un module égal à 1 ; les m racines de $f(x) = 0$ sont réelles, car, si on change $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans $\frac{\lambda' y - \lambda}{1-y}$, on a

$$\frac{\lambda\frac{1}{y} - \lambda'}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{\lambda' y - \lambda}{1-y}.$$

Si les racines de l'équation en λ sont réelles, les seules racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ sont celles qui correspondent aux racines réelles de l'équation en y.

Les équations que nous venons d'étudier comprennent comme cas particulier l'équation générale du troisième degré.

2. Supposons que les coefficients a dans le polynôme $f(x)$ défini plus haut soient entiers ; la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, p étant premier, se ramène à la congruence binôme

$$(x+\lambda)^m - u(x+\lambda')^m \equiv 0 \pmod{p},$$

si les racines de la congruence

$$\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \equiv 0$$

sont distinctes; $u = \frac{a_0\lambda - a_1}{a_0\lambda' - a_1}$ est racine de la congruence

$$u^2 - \frac{(a_0\lambda - a_1)^2 + (a_0\lambda' - a_1)^2}{(a_0\lambda - a_1)(a_0\lambda' - a_1)} u + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Les racines de la congruence en u sont imaginaires en même temps que celles de la congruence en λ ou égales à -1, et l'on a

$$u^{p+1} \equiv 1;$$

si les racines de la congruence en λ sont réelles, u est aussi réel.

Cherchons dans quels cas $f(x)$ est irréductible (mod. p). Soit k le plus petit nombre tel que $u^k \equiv 1$ (mod. p.) : 1° u est réel. La fonction binôme $y^m - u$ est irréductible (mod. p), si m ne contient que les facteurs premiers de k et est premier avec $\frac{p-1}{k}$, dans le cas où p est de la forme $4q+1$; si p est de la forme $4q-1$, m doit en outre être impair ou double d'un impair (Serret, *Algèbre supérieure,* n° 358). D'ailleurs la fonction $f(x)$ est irréductible ou se décompose de la même manière que $y^m - u$. 2° u est imaginaire. Alors k divise $p+1$. Par un raisonnement analogue à celui de M. Serret dans le cas où u est un nombre réel, on voit que, pour que $y^m - u$ soit irréductible suivant le module p et la fonction modulaire $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2$, il faut et il suffit que m ne contienne que les facteurs premiers de k autres que 2 et soit premier avec $\frac{p+1}{k}$. La fonction $f(x)$ est *a fortiori* irréductible (mod. p) si m satisfait à ces conditions. Réciproquement, soient k un diviseur de $p+1$, u une racine primitive de la congruence $u^k - 1 \equiv 0$ (mod. p); la fonction

$$\frac{(x + au + b)^m - u(x + au^{-1} + b)^m}{1-u}$$

est irréductible suivant le module p si m ne contient que les facteurs premiers de k autres que 2 et est premier avec $\frac{p+1}{k}$; d'ailleurs elle a ses coefficients réels, car, si l'on change u en $\frac{1}{u}$, elle ne change pas, de sorte qu'ils sont des fonctions symétriques des ra-

cines de la congruence du second degré dont dépend u ; a et b sont supposés entiers, et a non congru à o (mod. p). On a ainsi une méthode pour former suivant le module p des fonctions irréductibles dont le degré ne contient que les facteurs premiers de $p+1$ autres que 2. J'en ai donné une autre dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus* du 7 juin).

Exemple. — Prenons pour u une racine de la congruence

$$u^2 + u + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Alors $k = 3$. L'un des nombres $p-1$, $p+1$ est divisible par 3, et de ce qui précède on déduit que la fonction

$$\frac{(x + au + b)^{3^n} - u(x + au^{-1} + b)^{3^n}}{1 - u}$$

est irréductible (mod. p), pourvu que $\frac{p^2-1}{3}$ ne soit pas divisible par 3. Si l'on fait $a = b = -1$ et $n = 1$, la fonction précédente devient $x^3 - 3x + 1$, et l'on a une proposition qui a fait l'objet de Communications à l'Académie des Sciences de MM. Sylvester, Pépin et Lucas (*Comptes rendus,* février à juin 1880).

« MON CHER MONSIEUR DARBOUX (¹),

« Je vous recommande instamment le *Moniteur* ci-inclus, car je n'ai que cet exemplaire, et il date de trente-cinq ans tout à l'heure. Vous y trouverez l'original dont je vous envoie en outre la copie pour l'imprimerie, présumant que vous ferez droit à ma demande. Voici à quel sujet.

(¹) Nous devons expliquer à nos lecteurs pourquoi cette lettre du regretté M. Bienaymé est imprimée aussi tardivement. Elle nous avait été envoyée pendant les vacances de 1875, et elle s'est trouvée égarée dans un livre qui nous avait été rendu en même temps. Nous avons revu bien des fois M. Bienaymé depuis cette époque; mais telle était sa bienveillance et sa crainte d'être importun qu'il ne nous a jamais parlé de la lettre qu'il avait bien voulu nous adresser. Nous saisissons cette occasion pour payer un juste tribut à la mémoire de cet homme de bien, de ce savant si distingué qui a tant fait pour le Calcul des probabilités. G. D.

» Votre *Bulletin* d'avril dernier, pages 170-171, contient un article de M. R. Hoppe qui se réduit à dire qu'il n'y a pas d'*infini*, substantif, en Mathématiques, et qu'on ne s'y sert que de l'*adjectif*. Or c'est ce que j'ai établi dans ce Journal il y a trente-cinq ans, en rendant compte de la *Théorie des fonctions* de M. Cournot. Je n'ai pas osé dire en même temps qu'on ne doit jamais, si ce n'est pour abréger, faire des substantifs avec des adjectifs, qui sont toujours relatifs et susceptibles de plus et de moins. Mais vous pouvez me l'avoir entendu dire, car je m'amuse à répéter cet axiome pour la clarté du discours. Ne pourriez-vous, dans votre prochain numéro, en rappelant la Note de M. R. Hoppe, signaler la préexistence de la même idée à trente-cinq ans de date? Après avoir dit que je fais remarquer la prévention que les élèves conçoivent en entendant parler du Calcul infinitésimal comme d'une espèce de mystère, on pourrait ajouter que j'insiste surtout sur la défectuosité de la phraséologie de l'*infini* dans les trois alinéas suivants, que vous mettriez tels quels. Au surplus, les quelques mots d'introduction seraient à votre choix.

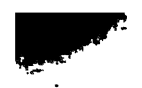
» Notez qu'il n'y a rien de semblable dans le livre de M. Cournot, et qu'en 1841 il y avait quelque hardiesse à énoncer que l'infini, pris substantivement, n'existe pas, du moins en Mathématiques. Cela se rattachait d'ailleurs à mes idées sur les dérivées et les fonctions, dont vous avez bien voulu dire un mot. Vous le verrez sans peine.

» Je n'ai pu me procurer sur-le-champ ce *Moniteur* du 4 novembre 1841, parce que la maladie me tient toujours renfermé; enfin on me l'a trouvé. J'avais oublié la date précise, et il fallait chercher. Voilà pourquoi ma *réclame* vous arrive si tard.

» J. Bienaymé. »

Paris, 21 août 1875.

« A cette prévention il convient d'ajouter l'effet produit par l'appareil d'une phraséologie nouvelle et beaucoup moins bien faite que ne l'est en général la langue des Mathématiques. Le mot *infini*, pris substantivement, se représente partout. C'est une sorte d'abréviation qui a eu longtemps de graves inconvénients et qui a peuplé d'idées fausses nombre d'Ouvrages, fort bons du reste. Le fait est qu'en Mathématiques ce mot n'a de sens que comme *adjectif*. Il



ne saurait y avoir, en fait de nombres ou de grandeurs, un *infini absolu*, puisqu'à tout nombre, quelque grand qu'on prétende le concevoir, on pourra toujours ajouter un autre nombre, à toute grandeur une autre grandeur. C'est ce que dit la première page de tout livre d'Arithmétique. Aussi tout le monde sent sur-le-champ l'obscurité que peut répandre dans cette science l'usage d'un mot qui semble représenter une idée, alors que cette idée n'a pas d'existence dans la science dont il s'agit. Sans nul doute, l'introduction des périphrases qu'évite le mot *infini*, l'énonciation exacte des vraies idées qu'il remplace feraient disparaître comme par un coup de baguette la plupart des difficultés du Calcul différentiel et intégral. On est même en droit de dire que cette réforme de langage aurait prévenu bien des erreurs.

» Malheureusement les géomètres ont tellement fait usage de ce mot qu'il y a presque nécessité à le conserver. Il faut donc, tout au moins, le bien définir, le circonscrire dès les premiers pas, pendant qu'on développe la transition au nouvel ordre d'idées que l'étudiant va réunir à l'ensemble des conceptions algébriques.

» Cette transition nous a paru bien ménagée dans le *Traité élémentaire de la théorie des fonctions*, que vient de publier un ancien élève de l'Ecole Normale consacré depuis longtemps à l'enseignement universitaire, M. Cournot, inspecteur général des études. Ce Traité présente avec un soin particulier les idées de *fonctions* et de *variables*. Il fait voir que le Calcul infinitésimal est, sous bien des rapports, le calcul des fonctions, comme Lagrange l'avait si bien nommé. Mais, en même temps, il montre comment cet illustre géomètre, voulant bannir le mot *infini*, avait à la fois repoussé les idées exactes comme les idées inexactes que ce mot renferme, de sorte que Lagrange était tombé dès l'abord dans des aberrations qui surprennent aujourd'hui. Ainsi Lagrange, qui ne veut plus de quantités *infiniment petites*, base toute sa *Théorie des fonctions analytiques* sur une série dont le nombre des termes est *infini*, et qui n'est *finie*, en somme, qu'à condition de l'*infinie petitesse* de chacun de ses termes sans nombre, si bien qu'il n'échappe pas au genre de considérations qu'il annonçait l'intention d'éviter. Et, en effet, on ne saurait se soustraire à la qualification d'opérations *sans fin*, d'opérations à répéter *infiniment*, puisqu'elle s'offre dès les premières notions de l'Arithmétique; seulement

il faut en préciser nettement le sens et la valeur. Mais c'est déjà trop insister sur cette idée. Répétons, toutefois, que c'est le substantif *infini*, et non l'adjectif ou l'adverbe, qui entraîne aux idées fausses. »

(Extrait du *Moniteur* du 4 novembre 1841.)

LETTRE A MONSIEUR LE RÉDACTEUR DU « BULLETIN ».

Paris, le 25 septembre 1880.

MONSIEUR LE RÉDACTEUR,

Le *Bulletin des Sciences mathématiques* (fascicule de janvier 1880) contient l'indication de quelques erreurs dans les Tables mathématiques. Permettez-moi de vous signaler dans les Tables, bien connues, de Lambert ([1]) les erreurs suivantes :

(a) Page 68, les compartiments 7 et 8 de la colonne 10 (gauche à droite) doivent être modifiés ainsi :

11	—
7	59
—	13
—	7
—	

(b) Page 69, le compartiment 5 de la colonne 11 (gauche à droite) doit être modifié ainsi :

11
7
—
79
29

(c) Dans la Table des nombres premiers, page 117, colonne 5, il faut supprimer $101519 = 11^2 . 839$.

([1]) *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen*, etc. Berlin, 1770.

(*d*) Page 117, colonne 5, il faut supprimer 101549 = 7.89.163.

(*e*) Page 117, colonne 6, il faut supprimer 101993 = 29.3517.

(*f*) Page 153, colonne 9, ligne 7, lire 109862 au lieu de 109782.

(*g*) Page 160, pour *log tang* 87, lire 112806042 au lieu de 112809042.

(*h*) Page 160, pour *séc.* 85, lire 114737132, au lieu de 114737312.

(*i*) Page 184, colonne 3, $112^2 = 12544$ et non 12344.

(*j*) Page 186, $437^2 = 190969$ et non 190961.

(*k*) Page 188, $995^2 = 990025$ et non 980025.

(*l*) Page 189, colonne 5, $995^2 = 990025$ et non 980025.

(*m*) Page 209, $\sqrt{7} = \frac{717}{271}$ et non $\frac{717}{217}$.

Dans l'édition intitulée : J.-H. LAMBERT, *Supplementa Tabularum Logarithmicarum et Trigonometricarum*, Olisipone, MDCCXCVIII, les faux nombres premiers sont supprimés; le faux carré de 112 est corrigé; le faux carré de 995 est mentionné dans l'*Errata* avec les fautes (*f*), (*g*), (*h*), (*j*), (*k*).

Le même fascicule du *Bulletin des Sciences mathématiques* contient un article intitulé *Extrait du ms. n° 24237 du fonds français de la Bibliothèque nationale.*

Ce ms. 24237, signalé pour la première fois dans la *Revue philosophique* (octobre 1877) [1], analysé et publié en extrait dans le *Bullettino* de M. le prince Boncompagni [2], avait soulevé et à la fois résolu, dans la *Revue critique* du 15 décembre 1877 [3], une intéressante question d'histoire littéraire. Il eût été sans doute utile, peut-être convenable, de citer ces travaux antérieurs.

Mais ce qui était certainement à considérer avant d'offrir au *Bulletin* le « *problème où il est besoin d'adresse* », c'est que la solution de ce problème est donnée plus complète dans les *Nouveaux Éléments de Mathématiques* de Prestet (2e édition, t. II, p. 249).

---

(1) *Malebranche d'après des manuscrits inédits de la Bibliothèque nationale*, p. 405-413. Quelques inexactitudes de détail s'étaient glissées dans cet article; elles ont été corrigées dans les *Recherches sur les manuscrits de Fermat.*

(2) *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat*, etc., août 1879, p. 564-565.

(3) *Sur quelques doutes élevés à propos d'épigrammes de Racine et de Boileau*, p. 373-375.

Voici la reproduction exacte du passage (¹) :

V QUESTION.

PREMIER CAS.

19. *Pour trouver deux grandeurs dont la somme soit égale à la somme des cubes.*

Ayant nommé la premiére z, et la seconde yz; l'égalité sera $z + yz \infty z^3 + y^3z^3$. Ou $1 + 1y \infty 1zz + y^3zz$. Et divisant de part et d'autre par $1zz + 1yzz$, on trouvera l'égalité $\frac{1}{zz} \infty 1 - 1y + yy$. Et prenant $v - y$ ou $y - v$ pour $\frac{1}{z}$, ou pour le côté du quarré $1 - 1y + 1yy$; l'égalité sera $1 - 1y + 1yy \infty vv - 2vy + yy$. Ou $2vy - 1y \infty vv - 1$. Et $y \infty \frac{vv - 1}{2v - 1}$. Et l'arbitraire v sera moindre ou plus grande que 2, et surpassera l'unité. L'extrême facilité et la pleine étenduë de cette résolution peuvent faire observer en passant, non seulement combien la méthode de Diophante et de ses Commentateurs est imparfaite et défectueuse, mais encore combien celle de Monsieur De Fermat est éloignée de la simplicité, à laquelle une juste méthode doit toûjours se reduire : puisqu'il avouë que la question qu'on vient de proposer, peut être difficilement résoluë par une méthode générale. « Je suis surpris, dit-il » dans sa remarque sur la même question, non de ce que Bachet » n'a point apperceu la méthode générale, qui est sans doute diffi- » cile; mais de ce qu'il n'a point averti le Lecteur, que celle qu'il » expose n'est point générale.

Supposition.

$$\left\{ z + yz \infty z^3 + y^3z^3. \right\} v \text{ arbitraire.}$$

Résolution infinie.

$$y \infty \frac{vv - 1}{2v - 1}. \left\{ z \infty \frac{2v - 1}{vv - 1v + 1} \cdot zy \infty \frac{vv - 1}{vv - 1v + 1}. \right.$$

(¹) Dans ce passage le signe ∞ indique l'égalité. Nous nous permettrons de renvoyer, pour ce signe, à notre Mémoire *Sur l'origine de quelques notations mathématiques* (extrait de la *Revue archéologique*). Didier, 1879, p. 9.

Exemples.

$$v \infty 3.\ y \infty \frac{8}{5}.\ z \infty \frac{5}{7}.\ zy \infty \frac{8}{7}.$$

$$\text{Somme } z + zy \infty \frac{13}{7} \infty z^3 + z^3y^3 \infty \frac{125 + 512}{343}.$$

$$v \infty \frac{3}{2}.\ y \infty \frac{5}{8}.\ z \infty \frac{8}{7}.\ zy \infty \frac{5}{7}.$$

$$\text{Somme } z + zy \infty \frac{13}{7}. \infty z^3 + z^3y^3 \infty \frac{512 + 125}{343}.$$

SECOND CAS.

Et si la différence des grandeurs doit égaler celle des deux

ormera la résolution de la même sorte. Et afin que zy ou sa $\frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}$. puisse surpasser z ou sa valeur $\frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}$, il que le numérateur $vv - 1$ surpasse le numérateur $2v + 1$, que l'arbitraire v surpasse $1 + \sqrt{3}$.

Supposition.

$$yz - z \infty y^3z^3 - z^3.\ v \text{ arbitraire.}$$

Résolution infinie.

$$y \infty \frac{vv - 1}{2v + 1}\ \ z \infty \frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}.\ zy \infty \frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}.$$

Exemple.

$$v \infty 3.\ y \infty \frac{8}{7}.\ z \infty \frac{7}{13}.\ zy \infty \frac{8}{13}.$$

$$\text{Reste } zy - z \infty \frac{1}{13} \infty z^3y^3 - z^3 \infty \frac{512 - 343}{2197}.$$

.1.

TROISIEME CAS.

21. *Et si la première grandeur est ajoûtée au cube de la seconde, et la seconde au cube de la première ; afin que les sommes soient égales.*

Il suffira pour rendre la résolution positive, que l'arbitraire v surpasse l'unité.

Supposition.

$$\left\{ z^3 + yz \propto y^3 z^3 + z. \right\} \ v \text{ arbitraire.}$$

Résolution infinie.

$$y \propto \frac{vv - 1}{2v + 1}. \left\{ z \propto \frac{2v + 1}{vv + 1v + 1}. \ zy \propto \frac{vv - 1}{vv + 1v + 1}. \right.$$

Exemple.

$$\left\{ v \propto 2. y \propto \frac{3}{5}. \right\} z \propto \frac{5}{7}. \ zy \propto \frac{3}{7}.$$

$$\left\{ \text{Somme } z^3 + yz \propto z^3 y^3 + z \propto \frac{272}{343}. \right.$$

Pour le second problème de l'article en question, on en rencontre un millier d'analogues et de moins faciles dans le *Diophantus redivivus* du P. de Billy, dans les *Nouveaux Élémens* de Prestet, dans les manuscrits d'Ozanam, etc, etc.

Veuillez agréer, Monsieur le Rédacteur, etc.

C. HENRY.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

B. BONCOMPAGNI. — Cinq Lettres de Sophie Germain a Charles-Frédéric Gauss, publiées d'après les originaux possédés par la Société royale des Sciences de Göttingen. — Berlin, Institut de photolithographie des frères Burchard, imprimerie de Gustave Schade (Otto Francke), MDCCLXXX; 24 p. non numérotées, in-4°.

De ces cinq Lettres, la première et la troisième, datées du 21 novembre 1804 et du 16 novembre 1805, toutes deux signées *Le Blanc*, avaient été publiées par M. Stupuy d'après des brouillons conservés à la Bibliothèque nationale de Paris (1). M. le prince Boncompagni les réédite aujourd'hui et avec raison, car les originaux de ces deux Lettres présentent avec les brouillons et l'imprimé quelques variantes intéressantes. Notons en particulier dans la première des Lettres cette utile addition à la page 300 de l'édition imprimée : « En relisant le Mémoire de M. de la Grange (Berlin, 1775), j'ai vu avec étonnement qu'il n'a pas su réduire la quantité

$$s^{10} - 11(s^8 - 4s^6r^2 + 7s^4r^4 - 5s^2r^6 + r^8)r^2$$

(p. 352) à la forme $t^2 - 11u^2$, car

$$\begin{aligned} & s^{10} - 11(s^8 - 4s^6r^2 + 7s^4r^4 - 5s^2r^6 + r^8)r^2 \\ & = \begin{cases} s^{10} - 2.11\,s^6r^4 + 11(5+6)r^8s^2 - 11(s^8 - 6s^6r^2 + 7s^4r^4 + 6s^2r^6 + r^8)r^2, \\ s^{10} - 2.11\,s^6r^4 + 11^2r^8s^2 - 11(s^8 - 6s^6r^2 + 9s^4r^4 - 2s^4r^4 + 6s^2r^6 + r^8)r^2, \\ (s^5 - 11\,sr^4)^2 - 11(s^4 - 3s^2r^2 - r^4)^2 \quad (2). \text{»} \end{cases} \end{aligned}$$

La quatrième Lettre, écrite le 30 février 1807, a été publiée par M. Ernest Schering dans les additions à un discours prononcé lors du centenaire de Gauss (3). Elle précède immédiatement la Lettre de Gauss que M. le prince Boncompagni a récemment publiée (4). « En me rendant compte de l'honorable mission dont

(1) *Œuvres philosophiques de Sophie Germain*, p. 298, 308.

(2) *Lisez* $11(s^4 - 3s^2r^2 - r^4)r^2$. (Remarque de M. le prince Boncompagni.)

(3) *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. XXII; 1877.

(4) *Voir* le *Bulletin*, 2e série, t. III, 1879.

je l'avais chargé, M. Pernetty m'a mandé qu'il vous avait fait connaître mon nom; cette circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi parfaitement inconnue que vous le croyez, mais que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de M. Le Blanc pour vous écrire et vous communiquer des Notes qui, sans doute, ne méritaient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre. » C'est, comme on vient de le voir, la première des Lettres qui soit signée *Sophie Germain*. L'écriture y est, en général, plus lâchée et plus svelte que dans les précédentes. On apprend que Sophie Germain habitait le Marais (rue Sainte-Croix-de-la-Bretonnerie, 23). L'adresse porte : *A M. le Dr Gauss, logé chez Ritter-Steinweg, n° 1917, à Brunswick*. A la Lettre était jointe une Note dont on connait le contenu par la réponse de Gauss.

La première des dèux Lettres inédites est datée du 21 juillet 1805 et signée *Le Blanc*. Cette phrase du début mérite d'être citée : « Vous me donnez l'espérance de vous entretenir avec moi de l'objet de vos études; rien au monde ne pourrait me faire plus de plaisir qu'une semblable correspondance. » Gauss avait écrit dans le n° 267 de ses *Disquisitiones arithmeticæ* (1) : « Nous excluons de nos recherches les formes ternaires dont le déterminant est 0, que nous traiterons plus en détail dans une autre occasion et qui ne sont ternaires qu'en apparence, se réduisant, comme on le verra, à des formes binaires (2). » Sophie Germain lui annonce qu'elle a fait

(1) Nous citons la traduction française de Poullet-Delisle, qui devait paraître deux ans après.

(2) Rappelons qu'on nomme :

1° *Formes binaires* les fonctions

$$ax^2 + 2a'xx' + a''x'^2,$$

dans lesquelles a, a', a'' représentent des nombres entiers, x, x' deux indéterminées;

2° *Formes ternaires* les fonctions

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx',$$

dans lesquelles a, a', a''; b, b', b'' représentent des nombres entiers, x, x', x'' trois indéterminées;

3° *Déterminant de ces formes* le nombre

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''.$$

cette réduction. Viennent ensuite quelques renseignements sur un libraire infidèle à ses engagements vis-à-vis de Gauss, un excellent résumé du quatrième Volume de la *Mécanique céleste* de Laplace, enfin une Notice sur le travail de Legendre consacré à la détermination des orbites des comètes.

La seconde Lettre inédite, la dernière de la publication, est la plus importante. Accompagnée d'un essai de démonstration (encore inédit) des trois théorèmes sur les résidus énoncés par Gauss ([1]), elle est spécialement consacrée aux résidus des puissances plus grandes que le carré; elle porte la date du 27 juin 1807. Voici les cinq propositions que Sophie Germain soumet au jugement de l'illustre géomètre :

1° p étant un nombre premier, si q est un nombre premier à $p-1$, tous les nombres de la série $1, 2, \ldots, p-1$ seront résidus puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p).

2° Si l'on a au contraire $p-1 = q^s$, il y aura, parmi les q^s nombres $1, 2, \ldots, q^s$ résidus et $(q-1)s$ non résidus, puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p).

3° Le produit de $a \equiv r^m$ par $b \equiv r^n$ est ou n'est pas résidu puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p) suivant que $m+n$ est ou n'est pas $\equiv 0$ (mod. q).

4° Si l'on désigne par $2^m, q, q', \ldots$ les différents facteurs de k dans $p = 2k+1$, -1 sera résidu puissance $(2^{m-1})^{\text{ième}}$, $q^{\text{ième}}$, $q'^{\text{ième}}$ (mod. p).

5° Pour les nombres premiers $2^{2^i}+1$, 2 est résidu $(2^{2^i-i-1})^{\text{ième}}$ puissance.

Le théorème (2) est particulièrement important; on le trouve sous une forme assez différente dans le n° 310 du *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret.

Grâce à la publication que nous venons de brièvement résumer, les lacunes que présentait jusqu'ici la correspondance de Gauss et de Sophie Germain sont comblées en partie : nous disons en partie, car la plus récente de ces cinq Lettres porte la date du 27 juin 1807; or Sophie Germain est morte en 1831. Nous pourrions donc vraisemblablement affirmer l'existence de Lettres postérieures, si nous

---

(1) *Lettera inedita di Carlo-Federico Gauss a Sofia Germain*. Firenze, autografia Achille Paris, 1879.

n'étions d'ailleurs autorisés par une gracieuse communication à dire qu'il y a encore à Gœttingue d'autres Lettres inédites ([1]).

Espérons que ces Lettres recevront bientôt comme leurs aînées l'honneur d'une de ces luxueuses publications dont M. le prince Boncompagni enrichit la bibliographie mathématique. C. H.

G. GOVI. — Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi, fondatore dell' Accademia dei Lincei. — Roma, Salviucci, 1880 (extrait des *Atti della R. Accademia dei Lincei*). In-4°, 20 pages.

G. GOVI. — Su alcune Lettere inedite di Lagrange pubb. dal Boncompagni (extrait des *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli,* juin 1880).

C'est en parcourant le Catalogue des manuscrits possédés par la Bibliothèque de Naples que M. G. Govi a eu le bonheur de trouver le discours du prince Cesi dont il est question dans le premier Mémoire. Intitulé *Del natural desiderio di sapere e Institutione de' Lincei per adempimento di esto*, ce document fait partie d'un manuscrit qui a pour titre : *Indicatio philosophicorum Operum quæ Federicus Cæsius Lynceus Princeps I. Fed. F. Princ. etc. sibi condixit.* M. Govi le présente à l'Académie et le publie, « non à cause de la nouveauté du sujet, non pour le style, mais parce qu'il a été composé par notre fondateur et prononcé par lui dans une séance solennelle à laquelle était présent le plus glorieux de nos prédécesseurs, l'immortel Galilée ». L'argumentation à laquelle le savant éditeur se livre pour prouver cette dernière assertion et placer la lecture de ce discours le 26 janvier 1616, peu de temps après l'arrivée de Galilée à Rome, est fort remarquable. Voici l'argument décisif : M. Govi a découvert et présenté en 1876 à l'Académie *dei*

([1]) Cet article était imprimé lorsque nous avons reçu de M. le professeur Angelo Genocchi une savante Notice extraite des Actes de l'Académie des Sciences de Turin (séance du 20 juin 1880), et intitulée : *Il carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss*. Dans ce travail on trouvera d'importants renseignements, non seulement sur les manuscrits inédits de Sophie Germain, possédés par la Société Royale de Göttingen, mais encore des éclaircissements sur plusieurs points de l'histoire de la théorie des nombres, particulièrement sur des manuscrits récemment publiés de Fermat.

Lincei des procès-verbaux de Jean Faber, le secrétaire *dei Lincei*. Or, un de ces procès-verbaux renferme le compte rendu d'un Discours dont les termes concordent parfaitement avec le Discours du prince Cesi. On doit féliciter vivement M. Govi d'avoir retrouvé ce document, qui complète heureusement les beaux Mémoires du prince Odescalchi sur le prince Cesi et l'Académie *dei Lincei*.

Le second Mémoire dont nous avons inscrit le titre en tête de ces lignes est consacré à des publications dont il a été rendu compte à plusieurs reprises dans ce Recueil. C. H.

SOPHIE GERMAIN. — MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DE L'ÉPAISSEUR DANS LA THÉORIE DES SURFACES ÉLASTIQUES. Paris, Gauthier-Villars, 1880; 64 pages in-4°.

Ce Mémoire a été découvert par M. Georges de Courcel dans les papiers de Prony, conservés à la Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées. Un passage des *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques*, par Sophie Germain, et un extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* lui en avaient révélé l'existence. M. de Courcel a enrichi l'œuvre inédite de nombreuses notes bibliographiques et l'a éclairée par de judicieux emprunts à la correspondance de Sophie Germain. Signalons dans l'Appendice une Lettre inédite, adressée par la célèbre géomètre à l'Académie, concernant les expériences de Wheatstone sur les vibrations des plaques élastiques. L'éditeur a dû faire revenir du *British Museum* la copie de cet important document. Une Lettre inédite au chimiste d'Arcet, publiée d'après des papiers de famille, mérite également d'être signalée. Enfin, quelques Lettres publiées dans l'édition de M. Stupuy ou dans la *Revue philosophique* (décembre 1879) ont été également reproduites.

C. H.

MÉLANGES.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS RATIONNELS;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

Traduit par M. STEPHANOS.

De même que les fonctions de plusieurs variables, appelées *abéliennes*, doivent leur naissance aux intégrales des fonctions algébriques quand on considère, d'après l'exemple de Jacobi, les limites supérieures de p intégrales d'une fonction algébrique convenable comme fonctions de la somme de ces intégrales et d'autres $p-1$ sommes semblablement formées, de même on obtient, comme je le démontre dans le présent travail, une nouvelle classe de fonctions de plusieurs variables en prenant pour base les intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Je me suis posé d'abord la question d'examiner la nature des solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du $m^{\text{ième}}$ ordre pour le cas où les équations

$$\sum_1^m {}_i \int_{\zeta_i}^{z_i} f_\alpha(z)\,dz = u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ sont des constantes et où $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation différentielle, doivent définir $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme fonctions analytiques de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

J'ai obtenu la résolution de cette question pour les équations différentielles du second ordre, et je me propose de présenter dans ce qui suit les résultats auxquels je suis parvenu.

Pour des développements ultérieurs sur les fonctions ici définies, et surtout pour leur représentation analytique, on aura à se rapporter aux relations que j'ai données, dans un travail inséré au

tome 75 du *Journal de Borchardt*, p. 177 ([1]), pour les intégrales des solutions d'une équation différentielle linéaire, prises entre deux points singuliers de cette équation.

Les résultats du présent travail ont déjà été communiqués, le 4 de ce mois, à la Société Royale des Sciences de Göttingue.

I.

Considérons une équation différentielle

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Qy = 0,$$

dont les coefficients P, Q sont des fonctions rationnelles de z, qui soit telle que ses intégrales aient par rapport à tout point singulier a la propriété que, multipliées par une puissance de $z - a$, elles ne deviennent ni nulles ni infinies pour $z = a$ (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 146).

Soit

$$y_1 = f(z), \quad y_2 = \varphi(z)$$

un système fondamental d'intégrales de l'équation (A); alors

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \quad w_2 = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

où z_0 désigne une valeur arbitraire, formeront, avec une constante que nous prendrons égale à c, un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle

$$\text{(A')} \qquad \frac{d^3w}{dz^3} + P\frac{d^2w}{dz^2} + Q\frac{dw}{dz} = 0.$$

Un changement du chemin d'intégration changerait respectivement w_1, w_2 en w'_1, w'_2, tels que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} w'_1 = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{12}w_2 + \beta_1 c, \\ w'_2 = \alpha_{21}w_1 + \alpha_{22}w_2 + \beta_2 c, \end{cases}$$

$\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}$, β_1, β_2 désignant des constantes.

([1]) Voir *Bulletin*, 1re série, p. 233-236.

Le même changement de chemin remplace respectivement y_1, y_2 par y'_1, y'_2, où

$$(2) \qquad \begin{cases} y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ y'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2. \end{cases}$$

Maintenant, au moyen des équations

$$(\text{B}) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)\,dz = u_1, \\ \displaystyle\int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

où ζ_1, ζ_2 sont des valeurs arbitraires fixes, mais différant des points singuliers de l'équation (A), *en même temps que $f(\zeta_1)$, $f(\zeta_2)$, $\varphi(\zeta_1)$, $\varphi(\zeta_2)$ ont des valeurs données, définissons z_1, z_2 comme fonctions de u_1, u_2 et cherchons quelles propriétés doivent avoir $f(z)$, $\varphi(z)$ pour que z_1, z_2 soient des fonctions analytiques déterminées desdites variables.*

Supposons que les chemins d'intégration joignant les mêmes valeurs de z soient coïncidents pour les deux équations.

Faisons passer par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ de l'équation (A) une coupure quelconque jusqu'à l'infini; soit désignée par q_i la coupure correspondant à a_i. Ces coupures ne doivent se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Que le plan des variables complexes z ainsi découpé soit désigné par T'. Si toutes les intégrales qui figurent dans (B) franchissent une même coupure q_i un nombre égal de fois et dans des sens identiques, toute variation du chemin de l'intégration changera u_1 en $\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c$, u_2 en $\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c$ si par cette variation de chemin y_1, y_2 subissent la substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Les quantités β_1, β_2 ont des valeurs déterminées lorsque le changement du chemin d'intégration est déterminé.

Soient maintenant

$$(\text{C}) \qquad z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2);$$

ces fonctions F_1 et F_2 jouissent de la propriété suivante :

$$(D)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c)=F_1(u_1,u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\beta_2 c)=F_2(u_1,u_2). \end{cases}$$

Les fonctions F_1 et F_2 admettent en outre généralement la même valeur pour une infinité d'autres valeurs de u_1, u_2, comme il résulte de ce qu'on peut laisser invariable le chemin d'intégration de ζ_2 à z_2 ou bien celui de ζ_1 à z_1, en faisant varier l'autre.

II.

Nous allons maintenant supposer que l'équation (A) n'ait que des points essentiellement singuliers, c'est-à-dire que ses coefficients ne deviennent infinis que pour des points auxquels l'intégrale générale devient discontinue ou subit une ramification. De plus, que les racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant à chacun de ces points singuliers soient des nombres réels et rationnels, et en outre, conformément à mon Mémoire (t. 76 du *Journal de Borchardt*, p. 184), différents entre eux, négatifs et plus petits en valeur absolue que l'unité.

Au contraire, que les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z=\infty$ soient des nombres réels et rationnels, différents entre eux et plus grands que l'unité positive.

Les quantités z_1, z_2 qui figurent dans les équations (B) peuvent alors coïncider, pour des valeurs finies de u_1, u_2, avec des points singuliers de l'équation (A) ou avec le point à l'infini.

Les fonctions z_1, z_2 des variables indépendantes u_1, u_2 définies par les équations (B), satisfont aux équations différentielles

$$(E)\quad \begin{cases} \Delta dz_1 = \quad \varphi(z_2)du_1 - f(z_2)du_2, \\ \Delta dz_2 = -\varphi(z_1)du_1 + f(z_1)du_2, \end{cases}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(z_1) & f(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi(z_2) \end{vmatrix}.$$

Lorsque u_1, u_2, partant des valeurs o, o, suivent des chemins arbitraires et indépendants entre eux, il arrive, d'après les principes développés par MM. Briot et Bouquet (voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265, et Briot, *Théorie des fonctions abé-*

liennes, p. 79), que z_1, z_2, partant des valeurs ζ_1, ζ_2, s'avancent d'une manière continue sur des chemins correspondants et restent holomorphes au voisinage des valeurs parcourues de u_1, u_2, jusqu'à ce que z_1, z_2 soient devenus infinis ou soient parvenus à des valeurs pour lesquelles $\frac{f(z_1)}{\Delta}$, $\frac{f(z_2)}{\Delta}$, $\frac{\varphi(z_1)}{\Delta}$, $\frac{\varphi(z_2)}{\Delta}$ prennent des valeurs qui ne sont pas toutes finies et déterminées.

Cette dernière circonstance ne peut avoir lieu que lorsqu'une au moins des quantités z_1, z_2 s'approche d'un point singulier de l'équation (A) ou du point à l'infini, ou bien lorsque ces quantités atteignent des valeurs satisfaisant à l'équation $\Delta = 0$.

III.

Considérons d'abord le cas où, pour $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, z_1 coïncide avec un point singulier de l'équation (A) et z_2 avec un point b non singulier et situé en distance finie, sans que pourtant l'équation

$$\text{(F)} \qquad \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

soit satisfaite par $z_1 = a$, $z_2 = b$.

Si l'on pose

$$z_1 - a = w_1, \quad z_2 - b = w_2,$$

on aura, d'après mon Mémoire (t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 139), aux environs de a,

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_2} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_1} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_2} g_2(w_1), \end{array} \right.$$

où r_1, r_2 sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ des constantes, et $g_1(w_1)$, $g_2(w_1)$ des fonctions holomorphes au voisinage de a et telles que $g_1(0)$, $g_2(0)$ soient différents de zéro.

Au contraire, on a, aux environs de $z_2 = b$,

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(z_2) = \gamma_0 + \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_2^2 + \ldots, \\ \varphi(z_2) = \gamma'_0 + \gamma'_1 w_2 + \gamma'_2 w_2^2 + \ldots, \end{array} \right.$$

γ_i, γ'_i étant des constantes déterminées.

On aura, par conséquent,

$$\Delta = w_1^{r_1} G_1(w_1, w_2) + w_1^{r_2} G_2(w_1, w_2), \tag{3}$$

où G_1, G_2 désignent des fonctions de w_1, w_2 respectivement holomorphes aux environs de $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Soit $r_2 > r_1$.

Puisque $z_1 = a$, $z_2 = b$ ne satisfont pas à l'équation (F), la quantité

$$G_1(0, 0) = g_1(0)\,[c_{11}\gamma_0' - c_{21}\gamma_0]$$

doit être différente de zéro.

Il résulte de là que $\Delta w_1^{-r_1}$ est fini et différent de zéro pour $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Soient maintenant, d'après le numéro précédent,

$$r_1 = -\frac{k_1}{n}, \quad r_2 = -\frac{k_2}{n},$$

où k_1, k_2, n désignent des nombres positifs entiers, dont les deux premiers sont plus petits que n, et posons

$$w_1 = t^n.$$

Les équations (E) se transforment ainsi en

$$(4) \quad \begin{cases} nt^{n-1}\Delta\, dt = \varphi(w_2 + b)\,du_1 - f(w_2 + b)\,du_2, \\ \Delta\, dw_2 = -[c_{21}t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{22}t^{-k_2} g_2(t^n)]\,du_1 \\ \qquad\qquad + [c_{11}t^{-k_1} g_1(t^n) + c_{12}t^{-k_2} g_2(t^n)]\,du_2. \end{cases}$$

Si nous supposons donc que

$$k_1 \geqq n - 1,$$

c'est-à-dire, à cause de $k_1 < n$, que

$$k_1 = n - 1,$$

les valeurs de $\dfrac{\partial t}{\partial u_1}, \dfrac{\partial t}{\partial u_2}, \dfrac{\partial w_2}{\partial u_1}, \dfrac{\partial w_2}{\partial u_2}$ résultant des équations (4) seront des fonctions holomorphes de t, w_2 aux environs de $t = 0$, $w_2 = 0$.

De là, il s'ensuit que z_1 et z_2 sont des fonctions holomorphes de u_1, u_2 aux environs des valeurs $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

IV.

Considérons maintenant le cas où, pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, les z_1, z_2 coïncident respectivement avec deux points singuliers différents a_1, a_2 de l'équation (A), sans que toutefois l'équation (F) soit satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$.

Soient r_{11}, r_{12} les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_1 et r_{21}, r_{22} celles de l'équation correspondant à a_2, et posons, en conformité avec les deux numéros précédents,

$$(1)\quad \begin{cases} r_{11} = -1 + \dfrac{1}{n_1}, & r_{12} = -1 + \dfrac{l_1}{n_1}, \\ r_{21} = -1 + \dfrac{1}{n_2}, & r_{22} = -1 + \dfrac{l_2}{n_2}, \end{cases}$$

l_1, l_2, n_1, n_2 étant des nombres entiers positifs, et $l_1 > 1$, $l_2 > 1$.

En posant de nouveau

$$z_1 - a_1 = w_1, \quad z_2 - a_2 = w_2,$$

on aura, à l'instar des équations (1) du § III,

$$(2)\quad \begin{cases} f(z_1) = c_{11} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{12} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ \varphi(z_1) = c_{21} w_1^{r_{11}} g_1(w_1) + c_{22} w_1^{r_{12}} g_2(w_1), \\ f(z_2) = e_{11} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{12} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \\ \varphi(z_2) = e_{21} w_2^{r_{21}} h_1(w_2) + e_{22} w_2^{r_{22}} h_2(w_2), \end{cases}$$

où $c_{11}, \ldots, c_{22}$, $e_{11}, \ldots, e_{22}$ sont des constantes, et $g_1(w_1)$, $g_2(w_1)$, $h_1(w_2)$, $h_2(w_2)$ des fonctions holomorphes au voisinage de $w_1 = 0$ ou de $w_2 = 0$, et qui ne s'annulent pas pour $w_1 = 0$ ou pour $w_2 = 0$. Δ prend maintenant la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta = w_1^{r_{11}} w_2^{r_{21}} G_{11}(w_1, w_2) + w_1^{r_{11}} w_2^{r_{22}} G_{12}(w_1, w_2) \\ \quad + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{21}} G_{21}(w_1, w_2) + w_1^{r_{12}} w_2^{r_{22}} G_{22}(w_1, w_2), \end{cases}$$

où $G_{ik}(w_1, w_2)$ sont des fonctions holomorphes de w_1, w_2 aux environs de $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

Maintenant

$$G_{11}(0, 0) = (c_{11} e_{21} - e_{11} c_{21}) g_1(0) h_1(0)$$

est différent de zéro, car autrement l'équation (F) serait satisfaite par $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, contrairement à notre supposition.

Il suit de là que $\Delta w_1^{-r_{11}} w_2^{-r_{21}}$ est fini et différent de zéro pour $w_1 = 0$, $w_2 = 0$.

En substituant dans les équations (E)

$$z_1 - a_1 = t_1^{n_1}, \quad z_2 - a_2 = t \;,$$

on reconnaît que $\frac{\partial t_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial t_2}{\partial u_2}$ sont des fonctions holomorphes de t_1, t_2 aux environs de $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, d'où il résulte que t_1, t_2, et par conséquent z_1, z_2, sont des fonctions holomorphes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice qui correspond à $z = \infty$ pour l'équation (A), et posons

$$\rho_1 = \frac{s_1}{n}, \quad \rho_2 = \frac{s_2}{n},$$

où s_1, s_2, n sont des nombres positifs entiers et tels que $s_2 > s_1 > n$ (*voir* § II).

Nous supposerons maintenant que

$$(4) \qquad s_1 = n + 1.$$

Sous le bénéfice de cette supposition, on démontrerait, comme dans les cas du précédent et du présent paragraphe, que z_1, z_2 demeurent uniforme, même dans le voisinage de valeurs de u_1, u_2 pour lesquelles z_1 devient infini et z_2 vient à coïncider avec un point a singulier de l'équation (A), ou bien non singulier, tant que l'équation (F) n'est pas satisfaite pour $z_1 = \infty$, $z_2 = a$.

En joignant les résultats de ces deux derniers paragraphes, on obtient la proposition :

Lorsque pour tout point singulier de l'équation (A) *les racines* r_1, r_2 *de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante sont de la forme*

$$(G) \qquad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{l}{n}$$

(*n et l étant des nombres positifs entiers*, $l > 1$), *tandis que les*

racines ρ_1, ρ_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$ sont de la forme

$$(G') \qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{l}{n}$$

(n et l étant des nombres positifs entiers, $l > 1$), les fonctions z_1, z_2 seront des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de toutes les valeurs de ces variables, pour lesquelles z_1, z_2 ne viennent pas à coïncider avec des points satisfaisant à l'équation (F).

V.

Soient $f(z)$, $\varphi(z)$ deux intégrales arbitraires de l'équation (A). On aura, aux environs d'un point singulier a,

$$f(z) = c_{11}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{12}(z-a)^{r_2} g_2(z),$$
$$\varphi(z) = c_{21}(z-a)^{r_1} g_1(z) + c_{22}(z-a)^{r_2} g_2(z),$$

où r_1, r_2 $(r_2 > r_1)$ sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, $c_{11}, \ldots, c_{22}$ des constantes différentes de zéro, et $g_1(z)$, $g_2(z)$ des fonctions holomorphes aux environs de a et telles que $g_1(a)$, $g_2(a)$ soient différents de zéro.

Il sera supposé constamment dans le présent travail que *le développement d'une intégrale de l'équation* (A) *aux environs d'un point singulier ou du point à l'infini ne contient pas de logarithme.*

Si l'on pose

$$(H) \qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)},$$

on aura, pour $z = a$, $\zeta = \frac{c_{11}}{c_{21}}$, qui sera ainsi fini et différent de zéro. On voit de même que, pour $z = \infty$, ζ sera aussi fini et différent de zéro.

Définissons maintenant, d'après l'équation (H), z comme fonction de ζ.

Supposons qu'à une valeur arbitraire ζ_0 de ζ corresponde une valeur z_0 de z. En partant de ce couple de valeurs, on peut poursuivre la fonction z sur le plan des ζ, ce qui s'effectue à l'aide de

l'équation

$$(J) \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varphi(z)^2}{F(z)},$$

à laquelle z satisfait (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 128), et dans laquelle

$$F(z) = Ce^{-\int P\,dz}.$$

La quantité C a une valeur constante et déterminée si $f(z)$, $\varphi(z)$ désignent des solutions déterminées des équations (A).

Les valeurs de ζ pour lesquelles z peut cesser d'être holomorphe sont, en dehors de $\zeta = \infty$, les valeurs de cette variable pour lesquelles z coïncide avec un point singulier de l'équation (A) ou bien devient infini.

Supposons d'abord que, pour $\zeta = \zeta_1$, z coïncide avec un point singulier a de l'équation (A), et soient r_1, r_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a, racines qui satisfont aux conditions (G).

On a (*voir* mon Mémoire, t. 66 du *Journal de Borchardt*, p. 143), aux environs de a,

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

où $\eta(z)$ est une fonction holomorphe aux environs de a et différente de zéro pour $z = a$.

Si maintenant on a d'abord

$$(2) \qquad r_2 = r_1 + 1,$$

il résulte de l'équation (J) que z est holomorphe aux environs de $\zeta = \zeta_1$; mais, si l'équation (2) n'a pas lieu, en substituant dans l'équation (J)

$$z - a = t^n,$$

on obtient

$$(3) \qquad n\frac{dt}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi(t)}{\eta(t)},$$

où $\psi(t)$, $\eta(t)$ sont holomorphes aux environs de $t = 0$, et dont le quotient ne devient ni nul ni défini pour $t = 0$.

En prenant dans ce cas

$$(4) \qquad l = 2,$$

il résulte de l'équation (3) que t et par conséquent z sont holomorphes dans le voisinage de $\zeta = \zeta_1$.

Supposons en second lieu que, pour $\zeta = \zeta_2$, z devienne infini, et soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$, racines qui satisfont aux relations (G').

On a, pour les environs de $z = \infty$,

$$(5) \qquad \begin{cases} f(z) = \gamma_{11}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1} h_1\left(\dfrac{1}{z}\right) + \gamma_{12}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_2} h_2\left(\dfrac{1}{z}\right), \\ \varphi(z) = \gamma_{21}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1} h_1\left(\dfrac{1}{z}\right) + \gamma_{22}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_2} h_2\left(\dfrac{1}{z}\right), \\ F(z) = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{\rho_1+\rho_2+1} \eta_1\left(\dfrac{1}{z}\right), \end{cases}$$

où $h_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $h_2\left(\frac{1}{z}\right)$, $\eta_1\left(\frac{1}{z}\right)$ sont des fonctions holomorphes aux environs de $z = \infty$ et ne s'annulent pas pour $z = \infty$. Les constantes $\gamma_{11}, \ldots \gamma_{22}$ sont de même différentes de zéro, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ sont des solutions arbitraires de l'équation (A).

Si l'on a de nouveau

$$(6) \qquad \rho_2 = \rho_1 + 1,$$

il résulte immédiatement de l'équation (J) que z est uniforme aux environs de $\zeta = \zeta_2$; mais, si l'équation (6) n'est point remplie, en substituant dans (J)

$$z = t^{-n},$$

on obtient

$$(7) \qquad -n\frac{df}{d\zeta} = t^{2-l}\frac{\psi_1(t)}{\eta_1(t)},$$

où $\psi_1(t)$, $\eta_1(t)$ sont des fonctions holomorphes aux environs de $t = 0$ et ne s'annulent pas pour $t = 0$.

En prenant de nouveau dans ce cas

$$(8) \qquad l = 2,$$

il se trouve que t et par conséquent z sont uniformes aux environs de $\zeta = \zeta_2$.

Supposons en dernier lieu que, pour $\zeta = \infty$, on ait $z = b$, b n'étant, d'après la remarque faite au commencement de ce numéro, ni un point singulier de l'équation (A) ni infini. Pour $z = b$, on aura cependant $\varphi(z) = 0$.

Soient, aux environs de b,

$$(9)\qquad \begin{cases} f(z) = a_0 + a_1(z-b) + \ldots, \\ \varphi(z) = a'_1(z-b) + \ldots. \end{cases}$$

On obtient de là

$$(10)\qquad (z-b)\frac{[a'_1 + a'_2(z-b) + \ldots]}{a_0 + a_1(z-b) + \ldots} = \frac{1}{\zeta}.$$

Comme maintenant $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne s'annulent pas simultanément, puisque b n'est pas un point singulier de l'équation (A), il s'ensuit que a_0 est différent de zéro. De même a'_1 ne peut pas être nul, car autrement il résulterait de l'équation (A) que $\varphi(z)$ est identiquement nul. L'équation (10) reçoit donc la forme

$$(10^a)\qquad \alpha_1(z-b) + \alpha_2(z-b)^2 + \ldots = \frac{1}{\zeta},$$

où $\alpha_1 = \frac{a'_1}{a_0}$ est fini et différent de zéro. Il résulte de cette équation, comme on sait, que z est une fonction holomorphe de $\frac{1}{\zeta}$ aux environs de $\zeta = \infty$.

De ce qui précède on obtient la proposition :

I. *Si les quantités r_1, r_2 correspondant à tout point singulier remplissent les conditions*

$$(K)\qquad r_1 = -1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n},$$

et que les quantités ρ_1, ρ_2 correspondant à l'infini remplissent les conditions

$$(K')\qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho_1 + 1 \quad \text{ou} \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

la fonction z de ζ définie par l'équation (H) *sera méromorphe pour toutes les valeurs de ζ.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est exprimée par le corollaire :

La fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *n'admet pas une même valeur pour diverses valeurs de* z.

Supposons maintenant que, *dans le cas où l'équation* (2) *ou l'équation* (6) *se trouve remplie, il arrive respectivement que le dénominateur de* r_1 *ou de* ρ_1 *soit égal à* 2.

Alors la fonction $F(z)$ *sera aussi une fonction uniforme de* ζ.

Soit d'abord $\zeta = \zeta'$ une valeur pour laquelle z ne coïncide pas avec un point singulier de l'équation (A) ni avec le point à l'infini : il est évident que $F(z)$ est uniforme aux environs de $\zeta = \zeta'$.

Soit maintenant $\zeta = \zeta_1$ une valeur pour laquelle z coïncide avec un point singulier a. On aura, d'après ce qui précède,

$$F(z) = (z-a)^{r_1+r_2-1}\eta(z),$$

où $\eta(z)$ est une fonction holomorphe aux environs de $z = a$ et différente de zéro pour $z = a$.

Si l'équation (2) a lieu, on aura, d'après notre supposition,

$$r_1 + r_2 - 1 = 2r_1 = \text{un nombre entier},$$

et par conséquent $F(z)$, de même que z, sera uniforme aux environs de $\zeta = \zeta_1$.

Si au contraire c'est l'équation (4) qui a lieu, on aura

$$r_2 + r_1 - 1 = -3 + \frac{3}{n}.$$

On a ainsi

$$F(z) = t^{3-3n}\eta(a+t^n).$$

D'après ce qui précède, t et par conséquent $F(z)$ sont uniformes aux environs de $\zeta = \zeta_1$.

On reconnaitrait de la même manière que $F(z)$ est uniforme aux environs d'une valeur de ζ pour laquelle z devient infini.

Nous avons déjà démontré que z est une fonction uniforme de ζ; la même chose a donc lieu pour la dérivée $\frac{dz}{d\zeta}$. Puisque mainte-

nant $\frac{dz}{d\zeta}$, ainsi que $F(z)$, est une fonction uniforme de ζ, il s'ensuit de l'équation (J) que $\varphi(z)^2$ et de même $f(z)^2$ sont des fonctions uniformes de ζ.

On obtient ainsi la proposition suivante :

II. *Lorsque les conditions* (K), (K') *subissent la restriction que le dénominateur de* r_1 *ou de* ρ_1 *soit égal au nombre* 2 *dans le cas où* $r_2 = r_1 + 1$ *ou* $\rho_2 = \rho_1 + 1$, *les fonctions* $\varphi(z)^2$ et $f(z)^2$ *sont également des fonctions uniformes de* z.

VI.

Il résulte du numéro précédent que, lorsque les variables indépendantes u_1, u_2 atteignent dans les équations (B) des valeurs pour lesquelles z_1, z_2 satisfont à l'équation (F), *on doit avoir nécessairement* $z_1 = z_2$ dès que les équations (K), (K') sont remplies.

Conformément à cela, soit, pour $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, $z_1 = z_2 = b$.

Si l'on admet ici les suppositions de la proposition II du paragraphe précédent, il s'ensuit, d'après cette proposition, que les équations

$$(1) \qquad f(z_2) = \pm f(z_1), \quad \varphi(z_2) = \pm \varphi(z_1),$$

où les signes se correspondent, ont lieu simultanément.

Distinguons maintenant trois cas :

1° b n'est pas un point singulier de (A). Soient, aux environs de $z_1 = b$,

$$(2) \qquad \begin{cases} f(z_1) = a_0 + a_1(z_1 - b) + a_2(z_1 - b)^2 + \ldots, \\ \varphi(z_1) = c_0 + c_1(z_1 - b) + c_2(z_1 - b)^2 + \ldots; \end{cases}$$

on aura, d'après les équations (1),

$$(2^a) \qquad \begin{cases} \pm f(z_2) = a_0 + a_1(z_1 - b) + a_2(z_1 - b)^2 + \ldots = f'(z_2), \\ \pm \varphi(z_2) = c_0 + c_1(z_1 - b) + c_2(z_1 - b)^2 + \ldots = \varphi'(z_2), \end{cases}$$

où les signes se correspondent.

Les équations (E) deviennent alors

$$(E^a)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta' dz_1 &= \quad\ \varphi'(z_2)\,du_1 - f'(z_2)\,du_2,\\ \pm\Delta' dz_2 &= -\varphi''(z_1)\,du_1 + f(z_1)\,du_2,\end{aligned}\right.$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix}.$$

Si nous posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} (z_1 - b) \pm (z_2 - b) &= w_1,\\ (z_1 - b)^2 \pm (z_2 - b)^2 &= w_2,\end{aligned}\right.$$

où les signes se correspondent, il viendra des équations (E^a)

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta' dw_1 &= [\varphi'(z_2) - \varphi(z_1)]\,du_1 - [f'(z_2) - f(z_1)]\,du_2,\\ \Delta' dw_2 &= 2[(z_1 - b)\,\varphi'(z_2) - (z_2 - b)\,\varphi(z_1)]\,du_1\\ &\quad - 2[(z_1 - b)\,f'(z_2) - (z_2 - b)\,f(z_1)]\,du_2.\end{aligned}\right.$$

En effectuant sur Δ' les substitutions indiquées par les équations (2) et (2^a), on reconnait que Δ' est divisible par $(z_2 - b) - (z_1 - b)$. Les termes du quotient sont des fonctions entières, homogènes et symétriques de $z_1 - b$, $z_2 - b$, et la valeur de ce quotient pour $z_1 = b, z_2 = b$ est $a_0 c_1 - a_1 c_0$, qui n'est point nul, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ forment un système fondamental de solutions de (A).

Les coefficients de du_1, du_2 dans les équations (4) sont également divisibles par $(z_2 - b) - (z_1 - b)$, et les quotients correspondants sont des fonctions entières, homogènes et symétriques de $z_1 - b, z_2 - b$.

On obtient ainsi des équations (4), pour $\frac{\partial w_1}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_1}{\partial u_2}, \frac{\partial w_2}{\partial u_2}$ des expressions qui dépendent rationnellement de w_1, w_2 et qui ne deviennent pas infinies pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Les fonctions w_1, w_2 sont par conséquent des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Si dans les équations (3) on a à prendre les signes inférieurs, il se trouve que $z_1 - b$ et $z_2 - b$, et par conséquent z_1 et z_2, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 au voisinage de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Si au contraire il faut prendre dans les équations (3) les signes supérieurs, il résulte que $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ représentent des fonctions uniformes au même voisinage.

2° b coïncide avec un point singulier de l'équation (A). Soient

r_1, r_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à b, et soit, conformément aux propositions I, II du paragraphe précédent,

$$(5)\qquad r_1 = -1 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad r_2 = r_1 + 1,$$

avec la condition $n = 2$ pour ce dernier cas.

Posons, dans les équations (E),

$$z_1 - b = t_1^n, \quad z_2 - b = t^n;$$

on a alors

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z_1) &= t_1^{1-n}\left[c_{11}g_1(t_1^n) + c_{12}t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)\right],\\ \varphi(z_1) &= t_2^{1-n}\left[c_{21}g_1(t_1^n) + c_{22}t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)\right],\\ \pm f(z_2) &= t_2^{1-n}\left[c_{11}g_1(t_2^n) + c_{12}t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_2^n)\right] = f'(z_2),\\ \pm \varphi(z_2) &= t_2^{1-n}\left[c_{21}g_1(t_2^n) + c_{22}t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_2^n)\right] = \varphi'(z_2), \end{aligned} \right.$$

où $c_{11}, \ldots, c_{22}$ sont des constantes arbitraires, $g_1(t^n)$, $g_2(t^n)$ des fonctions holomorphes de t^n aux environs de $t = 0$ et qui ne s'annulent pas pour $t = 0$, et où ε est égal à 0 ou à 1 suivant que l'on a

$$r_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad r_2 = r_1 + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2}.$$

Posant de nouveau

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f(z_1) & f'(z_2) \\ \varphi(z_1) & \varphi'(z_2) \end{vmatrix},$$

on obtient des équations (6)

$$(6^a)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta' = {} & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \\ & \times t_1^{1-n}t_2^{1-n}\left[t_2^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_1(t_1^n)g_2(t_2^n) - t_1^{\varepsilon n+1-\varepsilon}g_2(t_1^n)g_1(t_2^n)\right]. \end{aligned} \right.$$

L'expression $\Delta t_1^{n-1}t_2^{n-1}$ est divisible par $t_2^2 - t_1^2$ ou par $t_2 - t_1$ suivant que l'on a

$$\varepsilon = 1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 0.$$

La valeur du quotient pour $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ est égale à

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})g_1(0)g_2(0),$$

qui est différent de zéro, puisque $f(z)$, $\varphi(z)$ forment un système fondamental de solutions de (A) et puisque $g_1(0)$, $g_2(0)$ ne s'annulent pas.

En posant

$$f(z_1)t_1^{n-1} = f_1(t_1), \quad \varphi(z_1)t_1^{n-1} = \varphi_1(t_1),$$
$$f'(z_2)\, t_2^{n-1} = f_1(t_2), \quad \varphi'(z_2)t_2^{n-1} = \varphi_1(t_2),$$

les équations (E) deviennent

$$(\mathrm{E}^b) \qquad \begin{cases} n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dt_1 = \varphi_1(t_2)\,du_1 - f_1(t_2)\,du_2, \\ \pm n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dt_2 = -\varphi_1(t_1)\,du_1 + f_1(t_1)\,du_2. \end{cases}$$

Si l'on a maintenant $\varepsilon = 0$, on déduit des équations (E^b), comme on l'a déjà fait dans le cas 1° pour $z_1 - b$, $z_2 - b$ au moyen des équations (E^a), que les quantités t_1, t_2 mêmes, ou bien les $t_1 + t_2$, $t_1 t_2$, et par conséquent aussi les quantités $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Soit, en second lieu,

$$\varepsilon = 1.$$

Posons, suivant que les équations (E^b) doivent être prises avec les signes supérieurs ou inférieurs,

$$t_1 \pm t_2 = w_1, \quad t_1^3 \pm t_2^3 = w_2.$$

Les équations (E^b) donnent alors

$$n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dw_1 = [\varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1)]\,du_1 - [f_1(t_2) - f_1(t_1)]\,du_2,$$
$$n\Delta' t_1^{n-1} t_2^{n-1}\, dw_2 = 3[t_1^2\varphi_1(t_2) - t_2^2\varphi_1(t_1)]\,du_1$$
$$- 3[t_1^2 f_2(t_2) - t_2^2 f_1(t_1)]\,du_2.$$

Les coefficients de ces équations sont divisibles par $t_2^2 - t_1^2$. Les quotients correspondants se composent de termes qui sont des fonctions rationnelles, homogènes et symétriques de t_1^2, t_2^2. On a, en outre,

$$3t_1 t_2 = \pm\left(w_1^2 - \frac{w_2}{w_1}\right).$$

On déduit de là que $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_1}{\partial u_2}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial u_2}$ sont des expressions formées rationnellement avec w_1, w_2 et qui ne deviennent pas infinies pour $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, d'où il s'ensuit que w_1, w_2, et par consé-

quent $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

3° $b = \infty$. Soient ρ_1, ρ_2 les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$, et soit, conformément aux propositions I, II du numéro précédent,

$$(5^a) \qquad \rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \rho_2 = \tfrac{5}{2}.$$

Posons, dans l'équation (A),

$$\frac{1}{z} = \xi, \quad y = \xi^2 \eta;$$

alors

$$\frac{f(z)}{\xi^2} = f'(\xi),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\xi^2} = \varphi'(\xi)$$

constituent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle entre η et ξ. Le point $\xi = 0$ est un point singulier pour cette équation, et les quantités

$$(5^b) \quad \sigma_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad \sigma_2 = -1 + \frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \sigma_2 = +\tfrac{1}{2}$$

sont les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $\xi = 0$.

Pourtant, en posant

$$\frac{1}{z_1} = \xi_1, \quad \frac{1}{z_2} = \xi_2,$$

on tire des équations (B)

$$(\text{E}') \qquad \begin{cases} f'(\xi_1)d\xi_1 + f'(\xi_2)d\xi_2 = du_1, \\ \varphi'(\xi_1)d\xi_1 + \varphi'(\xi_2)d\xi_2 = du_2. \end{cases}$$

Il résulte maintenant de ces équations, comme dans le cas 2°, que $\xi_1 + \xi_2$ et $\xi_1 \xi_2$ sont des fonctions uniformes de u_1, u_2 aux environs de $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$.

Par conséquent, la même propriété appartient à $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

En résumant ce qui précède, on obtient la proposition suivante :

Si les racines r_1, r_2 de toute équation fondamentale déterminatrice correspondant aux divers points singuliers de l'équation (A) *sont telles que l'on ait*

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

ou bien

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = \tfrac{1}{2},$$

et si pour les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$ on a soit

$$\rho_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{n},$$

soit

$$\rho_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \rho_1 = \tfrac{5}{2},$$

les fonctions $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ définies par les équations (B) *sont racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u_1, u_2.*

VII.

D'après mon Mémoire (t. LXVI, p. 145 du *Journal de Borchardt*, on a

$$(1) \qquad \Sigma(r_1 + r_2) + \rho_1 + \rho_2 = A - 1,$$

en désignant par A le nombre des points singuliers de l'équation (A).

Si maintenant A′ est le nombre des points singuliers pour lesquels les équations fondamentales déterminatrices ont les racines $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, et A′ le nombre des autres points singuliers, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad 3\sum \frac{1}{n_i} + \rho_1 + \rho_2 = A' + 3A'' - 1,$$

où la somme se rapporte aux dénominateurs des racines des équations fondamentales qui correspondent aux points singuliers de la

seconde espèce. Mais, comme

$$\rho_1 + \rho_2 \leqq 5,$$
$$3\sum \frac{1}{n_i} \leqq \frac{3A'}{2},$$

l'équation (2) donne

(3) $$\tfrac{3}{2}A'' + A' \leqq 6 \quad \text{ou} \quad A + \tfrac{1}{2}A' \leqq 6.$$

Il s'ensuit de là que :

Le nombre des points singuliers de l'équation (A) *n'est pas supérieur à six.*

VIII.

Voici un exemple pour le cas $A = 6$.

Si l'on a pour chacun des six points singuliers

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_2 = +\tfrac{1}{2},$$

l'équation (A), d'après mon Mémoire (t. LXXXI du *Journal de Borchardt*), sera satisfaite par la racine carrée d'une fonction rationnelle.

Or, comme il faut que dans les développements relatifs aux environs d'un point singulier ou du point à l'infini n'entrent pas de logarithmes, il s'ensuit qu'il y a une seconde racine carrée d'une fonction rationnelle satisfaisant à l'équation (A) et constituant avec la première un système fondamental.

Si l'on représente par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les points singuliers, et que l'on pose

$$(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_6) = \varphi(z),$$

le système fondamental a la forme

$$y_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{\varphi(z)}}, \quad y_2 = \frac{h(z)}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

où $g(z)$, $h(z)$ désignent des fonctions rationnelles entières.

Comme dans le cas actuel on a

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 3,$$

il s'ensuit que $g(z)$, $h(z)$ ne peuvent pas être d'un degré supérieur au premier. Dans l'exemple actuel, les fonctions $F_1(u_1, u_2)$,

$F_2(u_1, u_2)$ fournissent donc les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

IX.

Le fait qu'en général les équations différentielles (A) ici caractérisées n'admettent pas des intégrales algébriques, et que par conséquent *les fonctions* $F_1(u_1, u_2)$, $F_2(u_1, u_2)$ *sont différentes des fonctions abéliennes*, peut être montré par l'exemple suivant.

Soient $A = 2$ et a_1, a_2 les deux points singuliers de l'équation (A), et soient

$$r_{11} = -\tfrac{2}{3},\quad r_{12} = -\tfrac{1}{3}$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_1, de même

$$r_{21} = -\tfrac{5}{6},\quad r_{22} = -\tfrac{1}{6}$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à a_2 et

$$\rho_1 = \tfrac{3}{2},\quad \rho_2 = 2$$

les racines de l'équation fondamentale déterminatrice correspondant à $z = \infty$.

En substituant, pour ce cas, dans l'équation (A),

$$y = (z - a_1)^{-1}(z - a_2)^{-\frac{5}{4}} w,$$

les racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant respectivement à

$$a_1,\qquad a_2,\qquad \infty$$

sont

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\qquad \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\qquad -\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4};$$

par conséquent, l'équation en w a la forme

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = P w, \tag{1}$$

P étant une fonction rationnelle de z.

D'après mon Mémoire (t. LXXXI du *Journal de Borchardt*, p. 135), cette équation différentielle, comme les racines de l'équa-

tion fondamentale déterminatrice correspondant à a_2 sont plus grandes que 10, n'est pas intégrable algébriquement tant que chacune de ses intégrales ou une fonction quadratique homogène de ses intégrales n'est pas égale à la racine d'une fonction rationnelle.

Puisque maintenant les dénominateurs des racines des équations fondamentales déterminatrices correspondant aux points singuliers a_1, a_2 sont différents des nombres $1, 2, 4$, la seule possibilité restante, d'après le même Mémoire (p. 136), est que l'équation (1) soit complètement intégrable par des racines de fonctions rationnelles.

Ce qui cependant n'a pas lieu.

En effet, toute racine w d'une fonction rationnelle de z, satisfaisant à l'équation (1), devrait avoir la forme

$$w = \psi(z)(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2},$$

où $\psi(z)$ serait une fonction rationnelle entière de z, ne s'annulant pas pour $z=a_1$ ni pour $z=a_2$, et où de plus α_1 aurait une des valeurs $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ et α_2 une des valeurs $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$. Le degré μ de $\psi(z)$ devrait aussi satisfaire à la condition

$$\mu + \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{3}{4} \text{ ou } \tfrac{1}{4}.$$

Cependant la seule fonction répondant à ces diverses restrictions est

$$w = (z-a_1)^{\frac{1}{3}}(z-a_2)^{\frac{5}{12}},$$

à l'exclusion de toute autre racine d'une fonction rationnelle.

L'équation (1) ne peut donc être intégrée complètement par des fonctions algébriques, et par conséquent l'équation (A) *non plus.*

Ajoutons, pour conclusion, la remarque suivante :

Si l'on pose, comme dans l'équation (H),

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = v, \tag{1}$$

z est, d'après la proposition I du § V, une fonction uniforme de v; mais, d'après la proposition II du même paragraphe, $f(z)^2$ et $\varphi(z)^2$ sont aussi des fonctions uniformes de v.

Posant donc

$$z = \chi(v), \tag{2}$$

on a la proposition suivante :

Les équations (β) peuvent, au moyen des substitutions uniformes, mais en général non rationnelles,

$$z_1 = \chi(v_1), \quad z_2 = \chi(v_2),$$

être mises sous la forme

$$(L)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\eta_1}^{v_1} \sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} \sqrt{g(v)}\,dv = u_1, \\ \displaystyle\int_{\eta_1}^{v_1} v\sqrt{g(v)}\,dv + \int_{\eta_2}^{v_2} v\sqrt{g(v)}\,dv = u_2, \end{cases}$$

où l'on a

$$\zeta_1 = \chi(\eta_1), \quad \zeta_2 = \chi(\eta_2),$$

et où $g(v)$ est une fonction uniforme, en général non rationnelle, de v.

Heidelberg, le 14 février 1880.

SUR LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE ONT ENTRE EUX UNE RELATION;

PAR M. S. LIE.

1. Des belles recherches de M. Weingarten (*Journal de Crelle*, t. 59) sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux ρ et ρ' ont entre eux une relation résulte bien simplement un moyen général pour la détermination des lignes de courbure de ces surfaces: c'est ce que je vais exposer.

L'équation $\rho =$ const. détermine sur la surface des centres d'une surface quelconque F un faisceau de courbes parallèles, dont les trajectoires orthogonales $q =$ const. sont les lignes géodésiques de la surface des centres. Les tangentes à une courbe du faisceau $q =$ const. rencontrent la surface F le long d'une ligne de courbure de cette surface. Ainsi la détermination des lignes de courbure de F et la détermination des lignes géodésiques $q =$ const. de la surface des centres sont deux problèmes équivalents : c'est un résultat connu.

Supposons maintenant que les rayons de courbure ρ et ρ' de la surface F aient entre eux une relation donnée; l'élément d'arc ds,

sur la surface des centres, est alors donné, d'après M. Weingarten, par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = d\rho^2 + e^{2\int \frac{d\rho}{\rho - \rho'}} dq^2,$$

formule qui montre que la surface des centres est applicable sur une surface de révolution. Bour a déterminé les lignes géodésiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution, lorsque leur courbure n'est pas constante; on reconnaît donc que les lignes de courbure d'une surface dont les rayons de courbure ont entre eux une relation peuvent s'obtenir par des quadratures, excepté lorsque la surface des centres est à courbure constante.

Ce mode de détermination est doublement incomplet : d'une part, il nécessite de longs calculs; de l'autre, il ne s'applique point à quelques cas exceptionnels. Il y a donc lieu de développer une méthode plus simple et plus générale.

Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface des centres, l'équation (1) donne

$$dq = e^{-\int \frac{d\rho}{\rho - \rho'}} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\rho^2}$$

ou

$$(2) \qquad q = \int e^{-\int \frac{d\rho}{\rho - \rho'}} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\rho^2};$$

dans cette formule, les quantités ρ, ρ', ξ, η, ζ doivent être exprimées au moyen des coordonnées x, y des points de la surface F, en sorte que le radical prend la forme

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy,$$

où X et Y sont des fonctions connues de x et de y; par suite, q est déterminé en fonction de x et de y, et l'on a obtenu un faisceau de lignes de courbure de la surface F.

Si les rayons de courbure ρ *et* ρ' *d'une surface ont entre eux une relation, les lignes de courbure de cette surface sont déterminées par la formule* $q =$ const. (2). *Dans cette équation,* ξ, η, ζ *désignent les coordonnées du centre de courbure qui correspond au rayon de courbure* ρ.

2. La méthode précédente est générale; elle s'applique encore

lorsque la relation entre ρ et ρ' est de la forme

$$\rho - \rho' = a = \text{const.},$$

auquel cas, d'après les recherches de M. Beltrami et de M. Dini, la surface des centres possède une courbure constante. Si je ne me trompe, cette remarque complète de la façon la plus heureuse la théorie donnée par M. Bianchi (*Ricerche sulle superficie a curvatura costante*; Pisa, 1879). Dans ce travail, M. Bianchi fait une remarque qui parait bien neuve et bien importante, à savoir que d'une surface Φ à courbure constante, dont on a déterminé les lignes géodésiques, on peut toujours déduire ∞^1 surfaces Φ_1 à courbures constantes. Il suffit pour cela de prendre l'élément d'arc sur la surface Φ sous la forme

$$(3) \qquad ds^2 = d\rho^2 + e^{\frac{2\rho}{A}} dq^2 \quad (A = \text{const.}),$$

ce qui, d'après M. Beltrami, est possible de ∞^1 manières. Que l'on mène maintenant les tangentes à toutes les lignes géodésiques du faisceau $q = \text{const.}$, et que l'on construise toutes les surfaces F qui coupent orthogonalement ces tangentes (ce que l'on peut faire d'une façon explicite) : toutes ces surfaces auront une même surface des centres, dont une nappe est précisément Φ. La seconde nappe Φ_1 est aussi une surface à courbure constante. De cette façon, de la surface donnée Φ on déduit une infinité (simple) de surfaces Φ_1 à courbure constante. Si maintenant on pouvait mettre l'élément d'arc d'une surface Φ_1 sous la forme (3), on pourrait aussi déduire de Φ_1 une infinité simple de surfaces à courbure constante; ce qui précède montre que cette opération peut s'effectuer, et il n'est pas nécessaire pour cela de déterminer l'équation finie des surfaces F.

Ainsi l'application successive de la méthode de M. Bianchi pour la détermination de surfaces à courbure constante n'exige aucune intégration d'équations différentielles quand on a déterminé les lignes géodésiques de la surface primitive Φ.

Je remarquerai maintenant que les recherches de M. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXIV, XXV) conduisent aisément à une méthode pour la détermination de ∞^1 surfaces à courbure constante, quand on s'est donné une telle surface. En

effet, de cette surface, par une transformation parallèle (dilatation) convenable, on peut d'abord déduire une surface à courbure moyenne constante; de cette nouvelle surface on déduit (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV, p. 76-78) une infinité simple de nouvelles surfaces à courbure moyenne constante, et finalement on trouve ∞^1 surfaces à courbure constante. Il me semblerait désirable qu'on cherchât quel rapport peut exister entre cette opération et celle de M. Bianchi. Les recherches de M. Bonnet montrent, en tout cas, que les surfaces à courbure constante se classent naturellement en groupes dont chacun contient une infinité simple de ces surfaces.

3. Quand les rayons de courbure d'une surface sont liés entre eux par une relation quelconque $\rho' = A(\rho)$, il ne parait pas possible, en général, de déterminer les lignes asymptotiques, non plus que les lignes géodésiques dont la longueur est nulle. Dans certains cas intéressants, mais particuliers, cette détermination est généralement possible. Pour le montrer simplement, je me référerai de nouveau au travail déjà cité de M. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV, p. 92-111). Si l'on pose

$$\rho = \varphi(k), \quad \rho' = \varphi(k) - k\varphi'(k),$$

et que l'on choisisse les lignes de courbure comme lignes coordonnées, l'élément d'arc ds sur la surface peut être mis sous la forme

$$ds^2 = \frac{\varphi^2}{k^2}\,du^2 + \frac{(\varphi - k\varphi')^2}{\varphi'^2}\,dv^2;$$

les lignes géodésiques dont la longueur est nulle sont alors déterminées par l'équation

$$\frac{\varphi}{k}\,du \pm i\,\frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'}\,dv = 0,$$

qui est intégrable si la fonction $\varphi(k)$ satisfait à la condition

$$\frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'} = C\,\frac{\varphi}{k} \quad (C = \text{const.}).$$

Cette condition est une équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale générale a la forme $k^2 = M\varphi^2 - 2C\varphi$, $\varphi = \frac{1}{C}k^2$

étant l'intégrale singulière. L'intégrale générale donne toutes les surfaces à courbure moyenne constante, et l'intégrale singulière les surfaces minima.

Sur les surfaces à courbure moyenne constante, on peut obtenir, par des quadratures, non seulement les lignes de courbure, mais encore les courbes $ds = 0$. Les lignes de courbure sont des lignes isothermes.

Les lignes asymptotiques d'une surface dont les rayons de courbure ont entre eux une relation sont déterminées par l'équation

$$\frac{\varphi}{k^2}\,du^2 + \frac{\varphi - k\varphi'}{\varphi'^2}\,dv^2 = 0,$$

qui est intégrable si φ satisfait à l'équation

$$L\varphi\varphi'^2 = k^2(\varphi - k\varphi') \quad (L = \text{const.}).$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$\varphi^2 = Ak^2 + LA^2.$$

Les surfaces correspondantes ont une courbure constante; l'intégrale singulière

$$\varphi = \frac{i}{2\sqrt{L}}\,k^2$$

donne seulement les surfaces minima.

Sur les surfaces à courbure constante on peut trouver, par des quadratures, non seulement les lignes de courbure, mais encore les lignes asymptotiques.

J'ai déjà, dans une autre circonstance, démontré ce théorème d'une manière différente ([1]).

([1]) Je me réserve de développer les indications qui précèdent relativement à la théorie générale des surfaces à courbure constante; d'une surface à courbure constante, dont on a déterminé les lignes géodésiques, on peut déduire par des quadratures successives ∞^∞ telles surfaces qui ne satisfont à aucune équation à différences partielles, excepté l'équation proposée

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CANTOR (MORITZ). — VORLESUNGEN ÜBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Erster Band, von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. — Leipzig, Teubner, 1880. In-8°, VIII-804 pages, 1 planche.

Écrire une histoire des Mathématiques qui fasse époque et, à ce titre, remplace enfin l'œuvre désormais vieillie de Montucla, nul ne pouvait mieux l'entreprendre que M. Cantor, soit que l'on considère ses aptitudes personnelles, ses longues études sur la matière, ou encore la part active qu'il a prise au mouvement historique de notre siècle. Le premier Volume, qu'il vient de faire paraître, ne trompera certes pas l'espoir du public compétent, et ce n'est peut-être pas assez dire, car il semble que l'illustre professeur d'Heidelberg se soit surpassé lui-même.

Si du temps où il écrivait les *Mathematische Beiträge* il a gardé, toujours aussi vives, cette fortune de conjectures suggestives, cette puissance de divination, si désirables dans l'étude des questions obscures et controversées, il a désormais acquis au plus haut degré les qualités indispensables à l'historien : je veux dire la prudence dans l'exposition des thèses neuves, et l'impartialité dans la discussion des opinions, fussent-elles le plus contraires aux siennes propres. D'autre part, dans le vaste champ d'une histoire générale, il se trouve plus à l'aise que dans le cadre restreint des diverses monographies que nous lui devons, et il a particulièrement réussi à ordonner un ensemble dont les diverses parties sont harmonieusement pondérées et où la profusion des détails n'empêche pas de suivre le clair développement des idées principales.

Il n'est plus possible aujourd'hui de prétendre garder le plan de Montucla, qui a embrassé toutes les Mathématiques, pures et appliquées. M. Cantor a sagement fait d'exclure de son cadre, aussi rigoureusement qu'il était possible, tout ce qui est étranger à la science abstraite du nombre et de l'étendue et appartient notamment en propre à l'histoire de l'Astronomie ou à celle, encore à faire, de la Mécanique.

Le Volume paru comprend, d'après son titre, les temps les plus anciens jusqu'à l'an 1200 après J.-C., c'est-à-dire jusqu'à Léonard

de Pise; le deuxième doit aller jusqu'à Leibnitz, et le troisième s'arrêter après Lagrange. Mais l'ordre chronologique indiqué devait nécessairement plier dans une certaine mesure devant l'ordre géographique, et dès maintenant se trouve épuisée l'histoire des Grecs du Bas-Empire, des Hindous, des Chinois et des Mahométans.

M. Cantor s'est efforcé, nous dit-il dans sa Préface, d'utiliser et de mentionner tous les travaux modernes intéressant son sujet, et qui ont paru avant le 15 mars 1880, date à laquelle son manuscrit a été remis à l'imprimeur. L'examen des sources auxquelles il a puisé, et qui sont des plus diverses natures, témoigne de la conscience et du succès avec lesquels ce but a été poursuivi. Comme d'ailleurs M. Cantor n'est rien moins qu'un compilateur, comme il sait, dans la juste mesure, négliger ce qui n'a pas assez d'importance, son œuvre possède vraiment tout ce qu'il faut pour marquer une date et servir de point de départ aux travaux de l'avenir.

Le lecteur ne peut attendre ici une analyse complète d'un Livre aussi considérable; mais il désirera sans doute être particulièrement renseigné, d'un côté, sur ce qui s'y trouve, comme définitivement acquis à la science, de spécialement neuf et personnel à l'auteur, d'autre part, sur la position qu'a prise ou gardée M. Cantor en présence des problèmes importants sur lesquels la controverse reste toujours permise. Mais, même de ces deux ordres de questions, le premier peut à peine être effleuré. Entrer dans le détail des nombreuses erreurs anciennes définitivement condamnées, des nouvelles rejetées après examen décisif, des points secondaires éclaircis ou ramenés à leur signification véritable, ce serait annoter chaque page.

Je me contenterai donc de signaler en bloc l'analyse des documents relatifs aux Égyptiens, aux Babyloniens et aux Chinois, et en particulier, pour le premier de ces peuples, l'étude du *Manuel d'Ahmès* (papyrus de Rhind), dont la date est désormais fixée entre 2000 et 1700 ans avant J.-C.; il y a là un travail très remarquable et dont quiconque n'est pas égyptologue peut certainement tirer plus de profit que de la traduction de M. Eisenlohr.

La façon dont est présentée l'histoire des Mathématiques chez les Arabes, sa liaison avec l'histoire politique et la distinction établie entre les diverses écoles et les divers pays apportent également sur un sujet cette fois moins neuf des éléments d'ordre et de clarté qui

faisaient défaut jusqu'à présent. Mais, pour voir comment M. Cantor sait renouveler la matière qu'on croirait le mieux épuisée, il suffit de comparer à ses écrits antérieurs les Chapitres d'Euclide, de Héron d'Alexandrie et des agrimenseurs romains.

Je bornerai donc ici ces indications, forcément trop succinctes, pour aborder la revue des problèmes principaux relatifs à la période qui nous occupe, problèmes sur lesquels une lumière plus ou moins grande est apportée, mais qui, de fait, n'en restent pas moins à l'ordre du jour. On peut les réduire aux suivants :

A quelle époque ont été acquises chez les Grecs les connaissances géométriques représentées, dans leur ensemble, par les *Éléments* d'Euclide?

A quelle époque a réellement pris corps la théorie des coniques, que nous connaissons par Apollonius?

Quelle est l'origine de l'Algèbre chez les Grecs et, dans cette science, la valeur respective de leurs travaux, de ceux des Hindous et de ceux des Arabes?

Quelle est la véritable histoire de nos chiffres modernes?

Je considère comme désormais tranchée la question de la reprise des études mathématiques au commencement du moyen âge, c'est-à-dire comme parfaitement établies l'indépendance de Gerbert et des abacistes par rapport aux Arabes, leur liaison avec la tradition romaine.

Géométrie élémentaire. — M. Cantor reporte à bon droit la réelle constitution de la science au moins au temps de Platon, c'est-à-dire aux travaux de Théétète et d'Eudoxe. Il faut évidemment s'arrêter à cette date (un siècle avant Euclide environ) pour les parties arithmétique et stéréométrique des *Éléments;* mais en ce qui concerne la Géométrie plane, correspondant aux six premiers Livres, la génération précédente, que représente Hippocrate de Chios, n'est peut être pas traitée assez favorablement, et il semble que sur Bretschneider M. Cantor ait fait un pas en arrière.

Il reste au moins dans l'opinion que le géomètre grec, en cherchant la quadrature de ses lunules, poursuivait celle du cercle. Mais, pour juger la question, nous n'avons plus à nous laisser prévenir par une vague assertion d'Aristote; nous possédons le long fragment d'Eudème, conservé par Simplicius.

Si l'on en retranche les interpolations maladroites de ce dernier, il reste quatre théorèmes intéressants qu'Eudème avait plus ou moins fidèlement extraits d'un Ouvrage d'Hippocrate, sans doute différent de ses *Éléments* et formant un ensemble complet.

Or le dernier théorème (*construction d'une lunule dont la surface, ajoutée à celle d'un cercle, soit équivalente à celle du triangle isoscèle inscrit dans la lunule, plus celle de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle*) me semble prouver suffisamment, par son seul énoncé, que jamais Hippocrate ne s'est proposé de ramener la quadrature du cercle à celle de la lunule, le problème simple au problème complexe, qu'il a fait tout le contraire, en étudiant les cas singuliers où l'on peut obtenir la quadrature de la lunule avec la règle et le compas.

Si les trois autres théorèmes nous donnent trois quadratures de ce genre, ils ne fournissent pas de fait les constructions, et, comme la dernière exige la solution géométrique d'une équation complète du second degré, M. Cantor doute qu'Hippocrate la connût. Il est cependant parfaitement supposable que les constructions étaient données dans des lemmes préliminaires, qu'Eudème se sera naturellement dispensé de conserver, surtout si de son temps ils n'offraient rien de particulièrement neuf.

Cette supposition peut d'ailleurs être confirmée par la remarque suivante. Après la première quadrature, dérivée d'un triangle isoscèle, après la seconde, dérivée d'un trapèze à trois côtés égaux, il était naturel de passer, comme Bretschneider l'a fait remarquer, au pentagone à quatre côtés égaux et ainsi de suite. Mais on tombe alors sur une figure qui ne peut être réellement construite avec la règle et le compas; dans ces conditions, l'invention de la troisième quadrature, qui exigeait au reste une remarquable sagacité, me paraît prouver suffisamment qu'Hippocrate s'était astreint, tout comme l'aurait fait Euclide, à construire complètement ses lunules quarrables.

C'est admettre, ai-je dit, qu'il connaissait la solution géométrique d'une équation complète du second degré. Or cette solution nous apparaît, dans les *Éléments* d'Euclide, sous la forme de la παραβολή avec ἔλλειψις ou ὑπερβολή, qui couronne en fait le Livre VI, et que M. Cantor, d'après le témoignage formel d'Eudème, attribue d'ailleurs avec raison à l'école pythagoricienne. Si ce fut sans doute

son dernier effort, il n'en doit pas moins être antérieur à Hippocrate et, dès lors, tout semble concourir à faire croire que les *Éléments* composés par ce géomètre renfermaient, à très peu près, toutes les théories importantes des six premiers Livres d'Euclide, à l'exception peut-être du cinquième (théorie de la similitude), au moins refait par Eudoxe.

Théorie des coniques. — La seconde question que nous allons aborder a, jusqu'à présent, été moins mûrie que la précédente; on doit, en tout cas, à M. Cantor d'en avoir précisé un côté.

Les termes grecs que l'on vient de voir à l'instant désignent, à parler proprement, la construction de x dans l'équation

$$y^2 = px \mp mx^2,$$

y étant supposé donné. Le problème inverse (construire y, x étant donné) rentre dans les quadratures (τετραγωνισμός).

On reconnait l'origine des noms donnés aux trois sections coniques, mais ces noms ne paraissent pas avoir été mis en usage avant Apollonius. M. Cantor part de là pour soutenir, par une discussion très minutieuse et très subtile, la thèse qu'il faut dénier à Euclide la notion de la variation concomitante de x et de y dans les problèmes de la παραβολή et la connaissance que la courbe ainsi engendrée est une conique.

Les arguments qu'il met en avant méritent certainement d'être pris en considération; toutefois, il faudrait éviter d'exagérer la portée de la conclusion à en tirer. Quoiqu'il n'y ait d'ailleurs de preuves directes qu'en ce qui concerne la parabole, je ne pense pas que M. Cantor nie que non seulement Euclide ou Aristée l'ancien, mais déjà Ménechme connût la relation constante, pour chaque conique, entre l'ordonnée et l'abscisse à partir du sommet. Quand il employait les courbes de son invention pour résoudre le problème de la duplication du cube, il appliquait de telles relations, et il faut bien croire qu'elles lui servaient également pour construire ces courbes par points. D'ailleurs, la détermination de l'ordonnée en se donnant l'abscisse, ou celle de l'abscisse en se donnant l'ordonnée lui étaient également faciles. Exiger davantage au point de vue de la variation concomitante des deux coordonnées, c'est peut-être demander plus qu'on ne pourrait jamais prouver chez les Grecs.

Ce qu'on doit concéder au moins, en revanche, c'est que les premiers géomètres qui ont traité des coniques ne se sont pas préoccupés de prouver que la courbe construite par points pouvait être mise en coïncidence avec telle section de tel cône; ils l'ont probablement supposé implicitement, et, au dire de Pappus, c'est Apollonius qui a complété la théorie sur ce point. Mais il lui a fait faire aussi un autre progrès, sans doute plus notable, en considérant des sections quelconques de cônes quelconques. C'est ce dernier pas qui me semble avoir été le véritable motif de l'adoption des nouvelles désignations, d'ailleurs plus commodes; par exemple, l'ancien nom de la parabole, *section du cône orthogone*, devenait impropre du moment où il était prouvé que cette courbe peut être engendrée sur un cône quelconque.

Algèbre. — Si sur les deux questions qui précèdent j'ai formulé quelques réserves, il n'en sera pas de même pour la troisième. M. Cantor a fait beaucoup pour retrouver aussi haut que possible les origines de l'Algèbre chez les Grecs, pour leur restituer leur juste part dans la constitution de la science arabe et pour montrer leur influence jusque chez les Hindous. Il serait évidemment disposé à aller encore plus loin, si l'on parvenait à découvrir quelque trace nouvelle. Peut-être considère-t-il encore Diophante comme plus original sur son terrain que Pappus en Géométrie; mais, en tout cas, il ne reste plus rien des thèses de Haukel, qui dans l'auteur des *Arithmétiques* voulait à peine voir un Grec, qui attribuait aux Hindous des démonstrations arabes de source évidemment hellène. Les légendes sur l'antiquité de la science dans l'Inde s'effacent en même temps; Aryabhatta n'est plus né qu'en 476 après J.-C., le *Surya Siddhânta* est postérieur à Ptolémée. Baudhâyana et les autres auteurs des *Culvasûtras*, qu'on a voulu faire remonter avant la conquête d'Alexandre, ne semblent pas antérieurs au IIe siècle après J.-C.

Histoire des chiffres modernes. — Il ne s'agit pas d'ailleurs de dénier aux Hindous leur originalité incontestable, de leur retirer en particulier l'invention de notre numération écrite de position, avec notre emploi du zéro. Mais la question de l'origine de nos chiffres n'en reste que plus obscure: car il est parfaitement établi

qu'ils ont été employés en Europe sur l'*abacus* avant la connaissance de l'usage moderne du zéro, tandis que les Arabes orientaux ont reçu leurs signes numéraux des Hindous, avec le système de position complet. Si dès lors des chiffres analogues aux nôtres se retrouvent chez les Arabes de l'Occident, avec un système de numération qui n'a aucun rapport avec celui des Hindous, il est clair que nos chiffres sont anciens en Occident et qu'ils y sont passés, non pas des Arabes aux Chrétiens, mais bien des seconds aux premiers. Dès lors aussi, la date réelle pour laquelle on peut prouver directement leur existence en Occident n'a plus qu'une importance secondaire, et l'on peut rester sceptique sur la question de l'authenticité de la *Géométrie* de Boèce, où ils figurent. M. Cantor n'en défend pas moins cette authenticité avec une grande vigueur, et j'avoue qu'il a fortement ébranlé ma conviction contraire.

La question de l'origine de nos chiffres n'existerait plus, pour ainsi dire, si les *apices* occidentaux étaient, comme forme, essentiellement différents des caractères indo-arabes. Mais au contraire, comme ils présentent une grande similitude, il faut leur chercher une origine commune. Ici on ne peut plus échapper aux hypothèses; le terrain solide se dérobe sous les pas.

M. Cantor retrouve la source dont il s'agit dans les lettres initiales des noms de nombre en sanscrit, d'après la forme de ces lettres au IIe siècle après J.-C. Il pense que, à une date où le système de position n'était pas encore inventé, les relations certaines qui ont existé, sous l'empire romain, entre l'Inde et l'Occident ont permis la communication des chiffres à quelque néopythagoricien; celui-ci s'en sera servi pour faciliter les calculs sur l'*abacus*, instrument d'ailleurs absolument étranger à l'Inde, et il aura fait, suivant la légende conservée par Boèce, remonter son invention au maître vénéré de l'école.

Quant aux noms bizarres qui accompagnent les *apices* sur les manuscrits du moyen âge, des diverses étymologies proposées, M. Cantor choisit pour chacun celle qui lui paraît la plus probable, et il arrive ainsi à admettre deux sources différentes, l'une sémitique, l'autre grecque. Quoique des recherches de ce genre prêtent beaucoup trop à la fantaisie pour qu'on puisse leur attribuer une importance sérieuse, et sur ce point je suis d'accord avec lui, il semble que l'on pourrait se contenter de la source grecque, si l'autre est démontrée

insuffisante; car on possède, dans les *Theologumena,* une mine inépuisable de rapprochements pour n'importe quelle forme barbare. Seulement, il ne faudrait pas, comme les savants que suit M. Cantor, adopter des traductions incompatibles avec la symbolique pythagoricienne, voir par exemple, dans *igin* = 1, ἡ γυνή = la femme, dans *andras* = 2, ἄνδρες = hommes, ce qui est absolument le rebours de cette symbolique bien connue. Il est si facile de lire d'un côté ἡ γονή = la semence, de l'autre ἀνδρεία = courage, synonymies garanties expressément par Anatolius.

Je ne continuerai pas des explications de ce genre; j'en ai qualifié la valeur; mais je me permettrai d'émettre à mon tour une hypothèse. L'existence de ces noms cabalistiques, l'adoption de formes étranges en Occident pour figurer les neuf premiers nombres, ne peuvent-elles pas faire croire qu'il s'agit d'un procédé de calcul tenu secret à l'origine et inventé entre astrologues, ne fût-ce que pour rehausser leurs pratiques aux yeux du vulgaire? S'il en est ainsi, il n'y a peut-être pas de mot à l'énigme, tout, mots et caractères, pouvant avoir une origine arbitraire et conventionnelle, et il serait au fond assez indifférent de savoir si des astrologues hindous ont emporté dans leur patrie des caractères de ce genre, en même temps que les procédés de calcul empruntés à leurs confrères de l'Occident, ou bien s'ils leur ont laissé ce présent en échange.

On ne se méprendra pas sur la portée des observations qui précèdent; j'ai seulement réclamé, sur des questions toujours obscures, une liberté d'opinion que M. Cantor sera sans doute le dernier à refuser, et, pour ainsi dire, je n'ai pas puisé un seul argument à une autre source que son Livre même. Je vais au contraire terminer en présentant le relevé de quelques taches ou lacunes de détail, certainement inévitables dans une œuvre aussi considérable que la sienne, comme ne le savent que trop tous ceux qui se sont tant soit peu occupés d'érudition. On trouvera sans doute mes remarques bien minutieuses; je m'excuserai en disant que ce sont les seules que m'ait permises la lecture la plus attentive, étant donné que, d'une part, je ne veux ici toucher que des points hors de conteste, que de l'autre j'ai voulu m'abstenir de faire aucun emprunt aux divers essais que j'ai déjà publiés dans différents Recueils; je le devais d'autant plus que M. Cantor, ne les ayant pas connus assez à temps pour les utiliser dans le corps de son Volume, m'a fait l'hon-

neur de leur consacrer une page de sa préface et notamment d'y adopter, sur l'âge auquel vivait Diophante, la conclusion de l'étude qui a été insérée ici même ([1]).

Page 161 : « Platon nomme Anaxagore un célèbre géomètre, » dit, en se référant à la *Liste des mathématiciens* conservée par Proclus M. Cantor, qui attribue naturellement un grand poids à l'opinion du chef de l'Académie. Mais Proclus, qui paraît ici avoir interpolé le texte d'Eudème, rappelle seulement que « Platon fait mention, » dans les *Rivaux*, d'Anaxagore et d'OEnopide comme ayant acquis » un nom dans les sciences (μαθήμασι) ». Or, nous possédons le dialogue dont il s'agit, et qui d'ailleurs n'appartient probablement pas à Platon lui-même ; il est facile d'y vérifier qu'aucun éloge n'y est donné à ces deux mathématiciens, que leurs noms sont simplement cités à l'occasion d'une discussion entre jeunes gens sur un sujet d'Astronomie sphérique.

Page 172 : Le sophisme sur la quadrature du cercle par les nombres cycliques, rapporté par M. Cantor avant le temps d'Hippocrate de Chios, n'a pas de date assignable avant l'âge d'Alexandre d'Aphrodisias (IIe siècle de notre ère), qui est le garant de Simplicius. Cette mauvaise plaisanterie n'a donc guère le droit d'être rapprochée des tentatives sérieuses faites par les *sophistes* Antiphon et Bryson.

Page 183 : Diogène Laerce fait voyager Platon après trente-deux ans, d'abord à Cyrène, pour le mettre en rapport avec son maître en Géométrie, Théodore de Cyrène, puis en Italie, pour lui faire entendre les pythagoriciens Philolaos et Eurytus. M. Cantor abandonne à bon droit le second rapprochement, absolument insoutenable ; mais il maintient la première donnée, qui est une invention de la même force, et ne mérite pas plus de créance. Nous devons nous en rapporter à Platon lui-même, qui, dans le *Théétète*, présente Théodore comme enseignant à Athènes, à l'époque où vivait Socrate, et penser qu'il avait suivi les leçons du premier avant de s'attacher au second.

Page 214 : « Le successeur immédiat de Platon, Speusippe, ne semble s'être signalé par aucun travail mathématique. » M. Cantor

---

([1]) 2e série, t. III, Ire Partie, p. 261.

parait ici ignorer un passage important des *Theologumena*, X, que je vais reproduire :

« Speusippe ... a composé ... un petit Livre très profond *sur » les nombres pythagoriques*. Dans la première moitié il traite très » élégamment des nombres linéaires, polygones et de tous les plans » et solides de divers genres en nombres, des cinq figures attri- » buées aux éléments cosmiques, de leurs propriétés générales, » particulières et relatives, de l'*analogie* et de l'*anacoluthie* (pro- » portions géométriques entre trois ou quatre termes); après quoi, » dans la seconde moitié du Livre, il traite sans ambages de la » décade. » Suit un long extrait textuel, où je me contente de signaler le terme technique de *pyramide* (en nombres).

Ce passage fournit la preuve que la théorie des nombres polygones et pyramidaux remonte bien aux anciens Pythagoriciens, comme M. Cantor est au reste porté à le supposer; d'autre part, il permet de faire remonter à cette époque l'invention de l'*épanthème* de Thymaridas, auquel est dû, d'après Jamblique, le terme de nombre *linéaire* (premier), et que l'on place, sans raison sérieuse, vers le IIe siècle de l'ère chrétienne.

Page 224 : « Il n'est nulle part dit un mot d'*Éléments* qui auraient été composés par un Grec après Euclide. » Cette assertion est rigoureusement exacte; mais il est bon de remarquer que Proclus, dans son commentaire sur le premier Livre d'Euclide, cite d'Apollonius des définitions, démonstrations, solutions, qui semblent bien appartenir au moins à la tentative d'élever un monument rival de celui du maître élémentaire.

Page 256 : A côté de la mention du *salinon* d'Archimède, empruntée à la quatorzième proposition des *Lemmes*, on désirerait, d'après la même source (proposition 4), celle de son *arbelon*, figure sur laquelle Pappus nous a conservé un théorème très intéressant, peut-être dû au géomètre de Syracuse.

Page 276 : Le sens exact du titre de l'*Arénaire* d'Archimède est le *nombre des grains de sable*, ψαμμίτης étant un adjectif à côté duquel il faut suppléer ἀριθμός.

Par un lapsus de plume, M. Cantor a écrit (ligne 20) « la première octade de la septième période » au lieu de « la septième octade de la première période »; de même (ligne 24), « huitième période » au lieu de « huitième octade ». La première période d'Ar-

chimède, définie plus haut, comprend tous nos nombres jusqu'à 800 millions de figures. Les deux limites que calcule le Syracusain sont seulement 10^{51} et 10^{63}.

Je lis plus loin (p. 277) que ni avant, ni après Archimède on ne trouve en langue grecque rien de semblable à ces calculs. C'est oublier ceux d'Apollonius (*voir* p. 290), qui l'ont conduit à un nombre de cinquante-cinq figures. Quant à l'origine du problème de l'*Arénaire*, je ne puis voir aucune nécessité à aller la chercher dans l'Inde. Si le Bouddha sait calculer le nombre des atomes qui font la longueur d'un *yójana* (quinze figures), Apollon Pythien « connaît le nombre des grains de sable et la mesure de la mer » (réponse de l'oracle à Crésus dans Hérodote), tout aussi bien que l'Elohim d'Abraham pourrait compter la poussière de la terre. La question, sinon la solution, est bien de tous les pays. Quant à la donnée d'un grand nombre comme produit de plusieurs, c'est un procédé qu'on trouve également dans des épigrammes grecques assez anciennes pour avoir été attribuées à Homère et à Hésiode.

Page 290 : Le nom donné par Apollonius au paramètre des coniques est ὀρθία et non ὀρθή, du moins d'après l'édition de Halley.

Page 304 : M. Cantor demande où Montucla a puisé sa donnée que la règle et le compas aient été inventés par un neveu de Dédale. Montucla ne le dit que du compas, et, de fait, la fable parle de la scie et du compas. On peut le voir dans Ovide (*Métamorphoses*, VIII, v. 244 et suiv.) ou dans Hygin. L'oncle, jaloux de ces inventions, précipite du haut d'une tour son neveu, que Minerve change en perdrix.

Page 321 : Il est impossible d'attribuer à Héron d'Alexandrie l'invention de la *dioptra*, dont se servait déjà un disciple d'Aristote, Dicéarque de Messine, pour mesurer la hauteur des montagnes (Théon de Smyrne, *Astronomici*, 3).

Page 339 : En signalant les imperfections des écrits héroniens, M. Cantor parle notamment du calcul (*Stereometrica*, I, 35) du volume d'une pyramide tronquée dont les bases rectangulaires ont l'une 20 pieds sur 14, l'autre 4 pieds sur 2. Un tel solide n'est point, à vrai dire, une pyramide tronquée ; mais il eût été équitable de remarquer qu'en tout cas le volume est calculé par une formule

exacte et curieuse :

$$\left(\frac{20+4}{2}\times\frac{14+2}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{20-4}{2}\times\frac{14-2}{2}\right)24,$$

la hauteur étant de 24 pieds. La même formule se retrouve (*Stereometrica*, II, 40), et le solide est alors appelé *bomisque*. Comme elle s'applique évidemment aussi à la véritable pyramide tronquée, il n'y a, dans la première compilation citée, qu'une faute de rédaction, et encore n'est-elle pas bien prouvée, car sous la désignation κόλουρος εἴτουν ἡμιτελής, *tronquée ou imparfaite*, se cache peut-être la distinction de la véritable pyramide tronquée et du solide qu'on peut calculer par la même formule.

Page 413 : Dans les analyses du Traité de Diophante sur les nombres polygones, on a négligé jusqu'à présent une remarque importante pour apprécier à sa juste mesure le prétendu père de l'Algèbre. Le but du Traité est de montrer qu'on peut substituer à la définition ancienne du polygone p_m^r de m angles et de côté r, comme somme de r nombres commençant par l'unité et progressant suivant la différence $m-2$, celle qui résulte de la propriété que $8(m-2)p_m^r+(m-4)^2$ est un nombre carré. Or la définition est mauvaise, car, par exemple,

$$8(5-2)2+(5-4)^2=7^2\,;$$

donc 2 serait un pentagone, etc. S'il est d'ailleurs possible aux modernes d'élargir la première définition de façon à y faire rentrer la seconde, il faut pour cela introduire des notions sans aucun doute étrangères aux anciens.

Le dernier problème (mutilé) du Traité (*De combien de manières un nombre peut-il être polygone?*) ne fournit d'ailleurs rien qu'on puisse être tenté d'utiliser pour une généralisation de cette sorte. C'est un fragment indigne de Diophante ; n'étant pas annoncé dans le préambule, il doit être rejeté comme un malencontreux essai d'addition fait par un homme qui, au bout de deux pages de calcul, n'a pas su avancer la question d'un pas.

Page 551 : L'origine de la valeur approximative $\pi=\sqrt{10}$, dans Brahmagupta, me paraît avoir été éclaircie par M. Léon Rodet (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1879, p. 99).

$3\frac{1}{7}$ étant une approximation par défaut de $\sqrt{10}$, obtenue en divisant le reste par le double de la partie entière augmenté de l'unité, la seconde expression aura été substituée à la première, qui devait probablement la remplacer, au contraire, dans la réalité des calculs. PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. DARBOUX.

« Louvain, le 27 octobre 1880.

» CHER MONSIEUR,

» Dans le cahier de mai 1880 du *Bulletin*, M. Frédéric Ritter, à propos d'une lettre de Fermat à Huygens sur le problème d'Adrien Romain, observe qu' « il serait intéressant de connaître la » liste des mathématiciens du monde entier donnée en tête du défi » d'Adrien Romain, si, par un hasard heureux, quelque exem» plaire de ce défi se trouvait aux mains d'un bibliophile ou dans » quelque bibliothèque. »

» Ce fameux défi parut à la suite de la préface de l'Ouvrage intitulé *Ideæ mathematicæ pars prima, sive methodus polygonoum*, etc., *authore Adriano Romano Lovaniensi, medico et mathematico* (Anvers, 1593, in-4° de 16-128 pages). L'Ouvrage ne parait pas très rare. Le défi a pour titre *Problema mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum.*

» La liste des mathématiciens vivants donnée dans cette préface comprend Christophe Clavius de Bamberg, Guido Ubaldi des marquis de Monti, Jean-Antoine Magini de Padoue, Jean-Corneto Grotius, Ludolf van Collen (ou van Ceulen), « *cui in Arithmeticis* » *parem nulla hactenus ætas habuit, nec facile est habitura;* » Michel Cognet d'Anvers, Nicolas Petersen, Simon Stevin de Bruges, dont Romain fait le plus brillant éloge et à qui il attribue un Traité de Statique écrit en langue flamande, « *quam linguarum omnium* » *totius orbis docet esse principem* » ; le Danois Tycho Brahe, Valentin Otto et Georges Joachim Rheticus, dont A. Romain cite

in extenso une Lettre fort curieuse adressée à P. Ramus en 1568. On y trouve, entre autres, cette phrase : *Habeo etiam præ manibus novas de rerum natura philosophandi rationes, ex sola naturæ contemplatione, omnibus antiquorum scriptis sepositis.*

» La liste se termine par quelques disciples de Romain, dont la célébrité mathématique est assez douteuse : Bernard Lordel, Jean van den Weege, Thomas Fienus, Corneille Opmeer. On voit que Viète était inconnu; c'est sur Van Collen que compte l'auteur pour lui envoyer la solution du problème.

» Le même Ouvrage de Romain renferme (deux pages plus loin que le défi) la valeur du nombre π qui lui est due, savoir

$$3,1415926535897931.$$

» Rappelons, pour finir, que le vrai nom d'Adrien Romain était *Van Roomen*.

» Recevez, etc.

» PH. GILBERT. »

SUR LA THÉORIE DES CONNEXES CONJUGUÉS;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

Je vais essayer, dans cette Note, de donner un aperçu succinct des principaux résultats auxquels je suis parvenu en étudiant les connexes conjugués.

Pour mettre dans tout son jour la portée de cette théorie, je commencerai par quelques remarques générales.

L'idée fondamentale dont Clebsch a poursuivi le développement en ébauchant la théorie des connexes était, on le sait bien, de considérer comme élément du plan l'ensemble d'un point x et d'une droite u; un connexe apparait alors comme un système triplement infini de pareils éléments assujettis à une seule condition

$$f = (x_1, x_2, x_3)^m (u_1, u_2, u_3)^n = 0.$$

Toutefois, dans l'étude des propriétés projectives des connexes,

il convient de distinguer deux espèces de formations covariantes d'un connexe : celles qui gardent le caractère de covariance pour deux transformations linéaires quelconques effectuées respectivement sur les deux séries de variables x et u de la forme f, et celles qui ne gardent ce caractère que si chacune des deux transformations auxquelles on soumet respectivement les deux séries de variables x et u est l'inverse de la transposée de l'autre, c'est-à-dire si ces deux transformations définissent une même homographie du plan porteur des points x et des droites u.

On voit bien que les formations de la première espèce se prêtent à une interprétation projective, même si l'on rapporte dans la forme f les variables x à des éléments (points ou droites) d'un plan et les variables u à des éléments d'un autre plan, etc., d'où il résulte qu'en étudiant ces formations on étudie en même temps les propriétés communes à plusieurs sortes de dépendances géométriques.

Ces dépendances géométriques, lorsqu'on veut se restreindre à la considération d'un seul plan, se présentent soit comme connexes, soit comme des *liaisons* entre deux éléments de même nature ; une *liaison* pouvant être définie comme un système triplement infini de *couples* de deux points ou de deux droites d'un plan.

Maintenant un des attributs les plus remarquables du connexe conjugué d'un connexe, c'est qu'il en constitue une formation covariante de la première espèce, de sorte qu'en interprétant autrement l'équation d'un connexe on reconnaît qu'à toute *liaison* entre deux points (ou droites) d'un plan correspond une autre liaison entre deux droites (ou points), qui en est la conjuguée.

Le besoin d'introduire, à côté des connexes, des liaisons entre des éléments de même nature d'un plan, quoiqu'il soit manifeste par soi-même, se montrera inévitable lorsque nous ferons voir que deux connexes conjugués sont, en général, accompagnés de bien près par deux liaisons dont l'une est la conjuguée de l'autre.

Le problème capital de la théorie des connexes conjugués, comme il a été posé par Clebsch, consiste 1° à déterminer les singularités que présente le conjugué d'un connexe tout à fait général, et expliquer par là comment le conjugué de ce connexe coïncide précisément avec le connexe primitif ; de cette manière, on saura quelles sont les *singularités nécessaires* ou inévitables à un connexe

et à son conjugué; 2° à déterminer dans quelles proportions se distribuent les diverses *singularités nécessaires* dans deux connexes présentant tous les deux toutes sortes de pareilles singularités; les lois de cette distribution seront exprimées par des formules analogues à celles dues à Plücker, qui régissent les singularités ordinaires des courbes algébriques.

Les résultats que nous allons présenter ici se rapportent à la première partie de ce problème, et constituent, croyons-nous, une contribution notable à sa résolution.

I.

1. Si l'on considère un couple (x, u) d'un connexe, la courbe U, enveloppe des droites liées au point x dans ce connexe, touche u en un point y, et la courbe X, lieu des points liés à la droite u, a pour tangente au point x une droite v. Les nouveaux couples d'éléments (v, y) qu'on obtient ainsi constituent un nouveau connexe, le conjugué du connexe considéré.

Mais on peut aussi considérer la liaison des points x et y entre eux, ainsi que celle des droites v et u. On obtient de la sorte deux liaisons associées au connexe considéré, et dont l'étude offre le plus grand intérêt, parce qu'elles constituent une double voie de transition entre le connexe primitif et son conjugué ([1]).

Cette relation entre les deux liaisons (x, y) et (v, u) et le connexe conjugué (v, y) résulte des deux propositions fondamentales suivantes, dont l'une est la corrélative de l'autre :

Le lieu $\mathfrak{X}_y$ des points x auxquels correspondent dans le connexe considéré des courbes U *passant par un point y coïncide avec la courbe* V *correspondant à y dans le connexe conjugué.*

L'enveloppe $\mathfrak{V}_v$ des droites u auxquelles correspondent dans le connexe considéré des courbes X *touchant une droite v coïncide avec la courbe* Y *correspondant à v dans le connexe conjugué.*

([1]) Il peut arriver, pour des connexes particuliers, que l'une de ces liaisons ne soit pas formée d'un nombre triplement infini de couples, ce qui a lieu toujours lorsqu'un des nombres m, n (ordre et classe du connexe) est égal à l'unité. Nous nous bornons à cette indication, et nous ne persisterons pas, dans la suite, à montrer chaque fois les propositions qui ne subsistent plus dans ce cas.

De cette manière, les courbes $\mathfrak{Y}_x$ et $\mathfrak{X}_y$ correspondant aux points x et y suivant la liaison (x, y) coïncident respectivement avec les courbes U_x et V_y qu'on rencontre dans le connexe considéré et son conjugué. De même les courbes $\mathfrak{V}_u$ et $\mathfrak{U}_v$ correspondant aux droites u et v suivant la liaison (v, u) coïncident respectivement avec les courbes X_u et Υ_v qu'on rencontre dans le connexe considéré et son conjugué.

2. On parvient à la première de ces deux propositions fondamentales, pour le cas où le connexe primitif est tout à fait général et n'offre aucune particularité, en constatant successivement que pour ce cas :

Le lieu $\mathfrak{X}_y$ des points x auxquels correspondent des courbes U *passant par un point fixe y coïncide avec l'enveloppe des courbes* X *correspondant aux droites u passant par le point y* [1].

La courbe X *correspondant à une droite u passant par le point y touche la courbe $\mathfrak{X}_y$ en m^2 points x auxquels correspondent des courbes* U *ayant au point y pour tangente la droite u.*

La courbe U *correspondant à un point x de $\mathfrak{X}_y$ a pour tangente au point y une droite u à laquelle correspond une courbe* X *touchant la courbe $\mathfrak{X}_y$ au point x.*

3. A ces derniers théorèmes se rattachent les propositions suivantes :

La courbe V *correspondant à un point double y de U_x a le point x pour point double.*

La courbe V *correspondant à un point de rebroussement de U_x a le point x pour point de rebroussement.*

Les réciproques de ces propositions sont aussi vraies, pourvu qu'on ne considère que des points singuliers des courbes V, ne

---

[1] Pour démontrer cette proposition, considérons deux droites infiniment voisines u passant par le point y; à ces deux droites correspondent, dans le connexe considéré, deux courbes X, qui se coupent suivant m^2 points x. Il est clair maintenant que les courbes U corrrespondant à chacun de ces points x touchent les deux droites u considérées en des points infiniment voisins de y; en d'autres termes, elles passent par le point y lorsque les deux droites u viennent à coïncider. D'où résulte la proposition énoncée.

constituant pas des singularités non communes à toutes les courbes V.

4. Si l'on considère un couple (x, u) du connexe primitif et le couple correspondant (v, y) du connexe conjugué, on peut remarquer que *les courbes* X_u *et* V_y *touchent la droite* v *au point* x, *et que les courbes* U_x *et* Υ_v *touchent la droite* u *au point* y.

De là on déduit ce résultat très important, dû à Clebsch, que *le connexe conjugué du conjugué d'un connexe coïncide avec ce connexe primitif.*

On peut en déduire aussi que *les deux liaisons* (x, y) *et* (v, u) *sont conjuguées l'une de l'autre*. Le lecteur pourra aisément obtenir la définition d'une liaison conjuguée à une autre en se rapportant à ce que nous avons remarqué en commençant sur la nature des connexes conjugués [1].

5. Si le connexe considéré est représenté par l'équation

$$f = (x_1, x_2, x_3)^m (u_1, u_2, u_3)^n = 0,$$

la liaison (x, y) sera représentée par l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la forme réciproque (*reciprocal*) $R_u f$ de f par rapport à u. De même l'équation de la liaison (v, u) sera obtenue en égalant à zéro la forme réciproque $R_x f$ de f par rapport à x.

Les liaisons (x, y) et (v, u) seront donc définies par des équations de la forme

$$R_u f = \varphi = (x_1, x_2, x_3)^{2m(n-1)} (y_1, y_2, y_3)^{n(n-1)}$$

et

$$R_x f = \psi = (v_1, v_2, v_3)^{m(m-1)} (u_1, u_2, u_3)^{2n(m-1)}.$$

On voit ainsi qu'en général les courbes V_y sont du degré $2m(n-1)$, et les courbes Υ_v de la classe $2n(m-1)$.

Dans ce qui suit nous supposerons toujours, comme nous l'avons fait dans le présent numéro, que la forme f soit la plus générale possible, c'est-à-dire à coefficients tout à fait arbitraires.

---

[1] Ainsi, étant donnée une liaison (x, y), si l'on considère les courbes $\mathfrak{X}_y$ et $\mathfrak{Y}_x$ correspondant d'après cette liaison à deux points y, x liés entre eux, les droites v et u qui touchent respectivement les courbes $\mathfrak{X}_y$ et $\mathfrak{Y}_x$ aux points x et y formeront un couple de la *liaison conjuguée*.

6. Les nombres des points doubles et de rebroussement d'une courbe V_y sont égaux aux nombres des courbes U_x ayant en y un point double ou de rebroussement. On sait déjà [1] que ces derniers nombres sont égaux à

$$2m^2(n-2)(n-3) \quad \text{et} \quad 3m^2(n-2).$$

On est ainsi à même de calculer la classe de V_y et l'ordre de T_v; on retrouve ainsi les nombres

$$m[mn+2(m-1)(n-1)] \quad \text{et} \quad n[mn+2(m-1)(n-1)],$$

obtenus différemment par M. Lindemann.

7. L'équation tangentielle $U_2 = 0$ des points doubles de U_x, qui doit être du degré $2n(n-2)(n-3)$ par rapport aux coefficients des u dans l'équation $f=0$ [2], représente, si l'on y considère les x comme coordonnées courantes, le lieu des points doubles x des courbes V correspondant aux points y d'une droite u; ce lieu sera donc d'un ordre égal à $2mn(n-2)(n-3)$. De même l'équation tangentielle $V_2 = 0$ des points doubles de V_y représente aussi le lieu des points doubles y des courbes U correspondant aux points x d'une droite v, dont l'ordre est égal à l'ordre $2mn(n-2)(n-3)$ de la courbe précédente.

D'une manière analogue, l'équation tangentielle $U_3 = 0$ des points de rebroussement de U_x, qui doit être du degré $3n(n-2)$ par rapport aux coefficients des u dans $f=0$, représente le lieu des points de rebroussement x des courbes V correspondant aux points y d'une droite u; ce lieu sera donc d'un ordre égal à $3mn(n-2)$. De même, l'équation tangentielle $V_3 = 0$ des points de rebroussement de V_y représente aussi le lieu des points de rebroussement des courbes U correspondant aux points x d'une droite v, dont l'ordre est nécessairement égal à celui de la courbe précédente.

8. Il est manifeste que pour les courbes X et T auront lieu des

---

[1] *Voir* LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, p. 970. On doit aussi à M. Lindemann (*ibid.*, p. 971) certains résultats de notre n° 7.

[2] *Voir* pour la question corrélative le Mémoire de Cayley, *Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes* (*Journal de Crelle*, vol. 34).

propositions corrélatives à celles exposées dans les nos 2, 3, 6, 7 au sujet des courbes U et V.

9. La forme réciproque de $\varphi = R_u f$ par rapport à x est

$$R_x \varphi = R_x R_u f = FV_2^2 V_3^3,$$

où

$$F = (v_1, v_2, v_3)^{mt} (y_1, y_2, y_3)^{nt} = 0 \quad [t = mn + 2(m-1)(n-1)]$$

représente le connexe conjugué du connexe $f = 0$.

De même, la forme réciproque de $\psi = R_x f$ par rapport à u est

$$R_u \psi = R_u R_x f = F\Upsilon_2^2 \Upsilon_3^3,$$

où $\Upsilon_2 = 0$ et $\Upsilon_3 = 0$ sont les équations ponctuelles des tangentes doubles et d'inflexion de la courbe Υ.

Il résulte de la nature des relations précédentes qu'aucune des courbes V correspondant aux points y d'une droite arbitraire u ne présente une nouvelle tangente double ou d'inflexion, et que de même aucune des courbes Υ correspondant aux droites v passant par un point arbitraire x ne présente un nouveau point double ou de rebroussement.

II.

10. Les courbes X correspondant à des droites u' infiniment voisines d'une droite u appartiennent à un réseau

$$u'_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u'_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u'_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0,$$

dans lequel est comprise la courbe X_u.

Les points déterminés sur X_u par une courbe de ce réseau correspondant à une droite u' forment les points de contact avec X_u de la courbe V correspondant au point de rencontre y des droites u et u'.

Les courbes X correspondant à des droites u' infiniment voisines de u déterminent sur X_u une infinité de groupes de m^2 points tels que tout point de X_u n'appartienne qu'à un seul de ces groupes.

river, pour des positions spéciales de u,

que les groupes déterminés sur X_u par les courbes X qui en sont infiniment voisines aient tous un point commun x. Dans ce cas, toutes les courbes du réseau

$$u'_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u'_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u'_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$$

passeront par ce point x.

On voit ainsi que les couples (x, u) communs aux connexes

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$$

sont formés par des éléments jouissant des propriétés dont il s'agit.

12. *Lorsque les courbes* X *correspondant à des droites u' infiniment voisines de u rencontrent toutes la courbe* X_u *en un même point x, la courbe* U_x *a la droite u pour tangente double.*

Le lieu $\mathfrak{S}$ des points x auxquels correspondent des courbes U ayant une tangente double est une courbe du degré $3m(n-1)^2$. L'enveloppe Σ des droites u qui sont des tangentes doubles des courbes U est une courbe de la classe $3m^2(n-1)$.

On remarquera que l'équation $\mathfrak{S} = 0$ qui représente la courbe $\mathfrak{S}$ est obtenue en égalant à zéro le discriminant de f par rapport à u.

13. *La courbe* X *correspondant à une tangente u de* Σ *touche la courbe* $\mathfrak{S}$ *au point x qui correspond à u.*

De cette manière, l'équation de la tangente de $\mathfrak{S}$ au point x sera

$$(2) \qquad x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

La classe de la courbe $\mathfrak{S}$ est égale au nombre

$$3m(n-1)[mn + (m-1)(n-1)]$$

des couples (x, u) communs aux quatre connexes (1) et (2).

14. *A tout point double x de* $\mathfrak{S}$ *correspond une courbe* U *ayant*

deux tangentes doubles, tandis qu'à tout point de rebroussement de $\mathcal{S}$ correspond une courbe U ayant une tangente d'inflexion.

Chacun des couples (x, u) communs au connexe $f=0$ et au *couple de courbes* (*Curvenpaar*) commun aux six connexes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_3}=\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_3}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u_3 \partial u_1}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_3 \partial u_2}:\frac{\partial^2 f}{\partial u_3^2}$$

est formé d'un point de rebroussement x de $\mathcal{S}$ et de la tangente d'inflexion u de la courbe correspondante U_x.

Le nombre des points de rebroussement de la courbe $\mathcal{S}$ est ainsi égal à

$$12 m^2 (n-)(1n-2).$$

Par conséquent, le nombre des points doubles de $\mathcal{S}$ sera égal à

$$\frac{3}{2} m^2 (n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).$$

15. A toute tangente double u de Σ correspond une courbe X_u rencontrée en deux points fixes par toutes les courbes X qui en sont infiniment voisines. D'une manière analogue, si la courbe Σ avait des tangentes d'inflexion u, toute courbe X_u correspondant à une de ces droites u serait touchée par toutes les courbes X infiniment voisines d'elle en un même point; cependant il n'existe pas en général de droites u jouissant de cette propriété.

Connaissant ainsi que la courbe Σ est de la classe $3m^2(n-1)$, qu'elle n'a pas de tangentes d'inflexion et que son genre est égal à celui de la courbe $\mathcal{S}$, on pourra en calculer tous les autres nombres pluckériens.

16. Les courbes $\mathfrak{S}$ et T, dont la première est l'enveloppe des droites u auxquelles correspondent des courbes X ayant des points doubles x et dont la seconde est le lieu de ces points doubles x, ont des propriétés corrélatives à celles des courbes $\mathcal{S}$ et Σ.

III.

17. Les courbes V correspondant aux divers points y d'une tangente u de la courbe Σ sont tangentes entre elles et à la courbe $\mathfrak{S}$ au point x de cette dernière courbe correspondant à la tangente u de Σ.

Il s'ensuit de là que *toute courbe* V_y *touche* $\mathfrak{S}$ *en* $3m^2(n-1)$ *points auxquels correspondent des tangentes de* Σ *passant par le point* y.

Des propositions analogues ont lieu pour les courbes Υ par rapport aux courbes $\mathfrak{T}$ et T.

18. La forme réciproque de φ par rapport à y est

$$R_y\varphi = R_y R_u f = f U_2^2 U_3^2 \mathfrak{S}.$$

De même, la forme réciproque de ψ par rapport à v est

$$R_v\psi = R_v R_x f = f X_2^2 X_3^2 \mathfrak{T}.$$

A ces relations analytiques se relient les faits géométriques suivants :

L'enveloppe des courbes V *correspondant aux points* y *d'une droite* u *est constituée par la courbe* X *correspondant à la droite* u *et la courbe* $\mathfrak{S}$.

L'enveloppe des courbes Υ *correspondant aux droites* v *passant par un point* x *est constituée par la courbe* U *correspondant au point* x *et la courbe* $\mathfrak{T}$.

19. *Si la courbe* V_y *a pour tangente double ou d'inflexion une droite* v, *la courbe* Υ_v *aura* y *pour point double ou de rebroussement.*

L'enveloppe $\Upsilon'_2 = 0$ des tangentes doubles des courbes V correspondant aux points y d'une droite est de la classe

$$mn[t^2 - 21(m-1)(n-1)] + \frac{1}{2}mn(m+n),$$
$$[t = mn + 2(m-1)(n-1)].$$

D'un degré égal à ce même nombre sera nécessairement le lieu $V'_2 = 0$ des points doubles des courbes Υ correspondant aux droites v d'un faisceau.

L'enveloppe $\Upsilon'_3 = 0$ des tangentes d'inflexion des courbes V correspondant aux points y d'une droite est de la classe

$$12mn(m-1)(n-1).$$

D'un degré égal à ce même nombre sera le lieu $V'_3 = 0$ des points de rebroussement des courbes Υ correspondant aux droites v d'un faisceau.

20. La forme réciproque de F par rapport à y est

$$R_y F = \psi \Upsilon'^2_2 \Upsilon'^3_3 \mathfrak{S}',$$

où $\mathfrak{S}' = 0$ représente en coordonnées tangentielles la courbe $\mathfrak{S}$.

De même :

La forme réciproque de F par rapport à v est

$$R_v F = \varphi V'^2_2 V'^3_3 \mathfrak{T}',$$

où $\mathfrak{T}' = 0$ représente en coordonnées ponctuelles la courbe $\mathfrak{T}$.

A ces relations analytiques se relient des nouveaux faits géométriques, savoir :

Parmi les courbes Υ_v, il n'y a que celles correspondant aux tangentes v de $\mathfrak{S}$ qui se décomposent en une droite double et une autre courbe résiduelle.

Parmi les courbes V_y, il n'y a que celles correspondant aux points y de $\mathfrak{T}$ qui se décomposent en un point compté deux fois et en une autre courbe résiduelle.

Paris, février 1880.

SUR LES FONCTIONS PROVENANT DE L'INVERSION DES INTÉGRALES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. L. FUCHS, à Heidelberg.

Dans une Communication, insérée dans les *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, numéro de février 1880, p. 170 et suiv., j'ai défini des fonctions de plu-

sieurs variables qui doivent leur naissance à l'inversion des intégrales des équations différentielles linéaires.

J'ai donné en ce lieu, et avec plus de détails dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXXIX, p. 151, etc., un exemple des fonctions de cette sorte, en introduisant, pour le cas des équations différentielles du second ordre, les restrictions suivantes :

Les fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 doivent atteindre les points singuliers de l'équation différentielle pour des valeurs finies de u_1, u_2, tandis que dans la représentation des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne doivent pas entrer de logarithmes. De plus, tous ces points singuliers doivent avoir la propriété que les solutions y deviennent infinies ou bien y subissent des ramifications.

Il est manifeste que ces restrictions ne sont pas nécessaires toutes à la fois. Quant aux restrictions nécessaires, je les ai développées, pour des équations différentielles d'ordre quelconque, dans un travail qui doit paraitre bientôt.

Le but de la Note actuelle est de présenter le Tableau des équations différentielles qui répondent aux restrictions faites pour les exemples dont je viens de parler. La Note déjà mentionnée, insérée dans les *Nachrichten* de Goettingue, à laquelle nous aurons à nous reporter, sera désignée par la lettre N.

Dans ce Tableau, que nous dressons ci-après, p et q désignent les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,$$

et A le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (A) de N.

Pour toute équation différentielle admettant des intégrales algébriques, nous nous bornerons, pour abréger, à la remarque « intégrales algébriques », tandis que pour les autres nous donnons un système fondamental d'intégrales ω_1, ω_2 de l'équation différentielle en ω.

I. $A = 6$.

$$R = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_6), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

II. $A = 5$.

1° $$R = (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - a_4} + \frac{1}{z - a_5}\right), \quad q = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(z - a_4)(z - a_5)},$$

intégrales algébriques;

2° $$R = (z - a_1)\dots(z - a_5), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

III. $A = 4$.

1° $$R = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\,\frac{1}{R},$$

Ω désignant un module de périodicité de l'intégrale elliptiq
$\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}, \quad \omega_2 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz};$$

2° $$y = [(z - a_1)(z - a_2(z - a_3))]^{-\frac{1}{2}}(z - a_4)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z - a_2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z - a_3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{z - a_4},$$

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_2 + 2a_3 + a_4) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)},$$

intégrales algébriques;

3° $$y = [(z - a_1)\dots(z - a_4)]^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{R},$$

$$R = (z - a_3)(z - a_4),$$

intégrales algébriques;

4° $$y = [(z - a_1)(z - a_2)]^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z - a_3)(z - a_4),$$

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{2}{9}\,\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

5° $$y = [(z - a_1)(z - a_2)(a - z_2)]^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = \tfrac{3}{2}(z - a_4)^{-1}, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

IV. $A = 3$.

1° $$R = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3), \quad y = R^{-\frac{1}{2}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R},$$

Ω étant un module de périodicité de l'intégrale elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$,

$$\omega_1 = e^{\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz}, \quad \omega_2 = e^{-\frac{\pi i}{\Omega}\int R^{-\frac{1}{2}}dz};$$

2° $$y = [(z - a_1)(z - a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z - a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z - a_2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z - a_3}$$

$$q = \left[\frac{1}{36}(2a_1 + 2a_2 + a_3) - \frac{5}{36}z\right]\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)},$$

intégrales algébriques;

3° $$y = R^{-\frac{2}{3}}\omega, \quad R = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3),$$

$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$

$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}}dz;$$

4° $$R = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}}(z - a_2)^{-\frac{2}{3}}(z - a_3)^{-\frac{5}{6}}, \quad y = R\omega,$$

$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z - a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z - a_2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z - a_3}; \quad q = 0,$$

$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\,dz;$$

5° $$y = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{5}{6}}\omega, \quad R = (z - a_2)(z - a_3),$$

$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

6°
$$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{2}{3}}\omega,\quad R=(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p=\frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{2}{9}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

7°
$$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\omega,\quad R=(z-a_2)(z-a_3),$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz},\quad q=-\frac{1}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

8°
$$y=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_2}+\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_3},\quad q=-\frac{1}{18}\frac{1}{(z-a_2)(z-a_3)},$$

intégrales algébriques;

9°
$$y=[(z-a_1)(z-a_2)]^{-\frac{1}{2}}(z-a_3)^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p=\tfrac{2}{3}(z-a_3)^{-1},\quad q=0,$$

intégrales algébriques.

V. $A=2$.

1°
$$R=(z-a_1)^{-\frac{2}{3}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{2}{3}\frac{1}{z-a_1}+\frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

2°
$$R=(z-a_1)(z-a_2),\quad y=R^{-\frac{3}{4}}\omega,$$
$$p=\frac{3}{4}\frac{d\log R}{dz},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R^{-\frac{3}{4}}dz.$$

3°
$$R=(z-a_1)^{-\frac{1}{2}}(z-a_2)^{-\frac{5}{6}},\quad y=R\omega,$$
$$p=\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_1}+\frac{5}{6}\frac{1}{z-a_2},\quad q=0,$$
$$\omega_1=\text{const.},\quad \omega_2=\int R\,dz;$$

4° $$R = (z - a_1)(z - a_2), \quad y = R^{-\frac{2}{3}}\omega,$$
$$p = \frac{2}{3}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R^{-\frac{2}{3}} dz;$$

5° $$R = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}}(z - a_2)^{-\frac{3}{4}}, \quad y = R\omega,$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z - a_1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z - a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\, dz;$$

6° $$R = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}}(z - a_2)^{-\frac{2}{3}}, \quad y = R\omega,$$
$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{z - a_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z - a_2}, \quad q = 0,$$
$$\omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_2 = \int R\, dz;$$

7° $$R = (z - a_1)(z - a_2), \quad y = R^{-\frac{5}{6}}\omega,$$
$$p = \frac{5}{6}\frac{d\log R}{dz}, \quad q = -\frac{5}{36}\frac{1}{R},$$

intégrales algébriques;

8° $$y = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}}(z - a_2)^{-\frac{5}{6}}\omega,$$
$$p = 0, \quad q = 0,$$

intégrales algébriques.

Pour les équations différentielles qui admettent des intégrales algébriques, z est une fonction rationnelle $\chi(\zeta)$ de ζ. En substituant dans l'équation (B) de N

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

on obtient, pour la détermination des ζ_1, ζ_2 comme fonctions de u_1, u_2 les équations qui ont lieu pour les fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Pour les cas IV 3°, 4°, V 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, il résulte du Mémoire de MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, p. 222) que z est une fonction uniforme et doublement périodique $\chi(\zeta)$ de ζ.

De même, pour les cas III 1°, IV 1°, z représente une fonction uni-

forme $\chi(\zeta)$ de ζ, telle que

$$\chi(2\pi i\zeta) = \chi(\zeta), \quad \chi\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} 2\pi i\zeta\right) = \chi(\zeta),$$

où Ω_1 désigne un second module de périodicité de l'intégrale $\int R^{-\frac{1}{2}} dz$, différent de Ω. En substituant dans les équations (B) de N

$$z_1 = \chi(\zeta_1), \quad z_2 = \chi(\zeta_2),$$

ces équations deviennent, pour les cas III 1°, IV 1°,

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}} + \zeta_2^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi i}{\Omega} u_1,$$

$$\zeta_1^{-\frac{1}{2}} + \zeta_2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi i}{\Omega} u_2,$$

tandis que, pour les cas IV 3°, 4° et V 1°, 2°, ..., 6°, elles deviennent

$$\zeta_1 + \zeta_2 = u, \quad \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

de sorte que pour tous ces cas les coefficients de l'équation quadratique pour z_1, z_2 (N, p. 174) sont représentables au moyen des fonctions elliptiques.

Heidelberg, juin 1880.

Extrait d'une Lettre adressée par M. Fuchs à M. Borchardt.

Dans un résumé des résultats de mon travail *Sur une classe de fonctions*, etc., que j'ai publié dans les *Nachrichten* de Goettingue (février 1880, p. 170-176), se trouve (p. 173) la proposition suivante :

I. *Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ forment un système fondamental arbitraire de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients rationnels, et que pour tout point singulier les racines r_1, r_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante satisfassent aux conditions*

$$r_2 = r_1 + 1 \quad \text{ou} \quad r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \quad r_2 = -1 + \frac{2}{n}$$

(n étant un nombre entier positif), tandis que les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation fondamentale déterminatrice correspondante à $z = \infty$ satisfont aux conditions

$$\rho_2 = \rho_1 + 1, \quad \textit{ou} \quad \rho_1 = 1 + \frac{1}{\nu}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{2}{\nu}$$

(ν étant un nombre entier positif), et que de plus les développements des solutions de l'équation différentielle aux environs des points singuliers ne contiennent pas de logarithmes, l'équation

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta$$

détermine z comme fonction uniforme de ζ.

Dans mon travail inséré dans votre Journal (t. 89, p. 151, et suiv.), dans lequel j'ai développé les résultats mentionnés, la proposition précédente a été présentée (p. 159) comme proposition I, sous une forme un peu modifiée, laquelle, étant d'une moindre clarté, n'éloigne pas la possibilité d'une mésintelligence. C'est M. H. Poincaré, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, qui par une aimable Communication a attiré mon attention sur cette circonstance.

Je prends maintenant la liberté de joindre ici quelques éclaircissements sur cette proposition.

Soit menée dans le plan des z, par chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ de l'équation différentielle, une coupure quelconque, la coupure q_i par le point a_i. Que toutes ces coupures soient supposées continuées jusqu'au point $z = \infty$ et soumises seulement à la restriction de ne pas se croiser ni avec elles-mêmes ni entre elles. Désignons par T le plan des z ainsi découpé. Si pour une valeur arbitraire $z = z_0$ on attribue à $f(z)$ et $\varphi(z)$, ainsi qu'à leurs premières dérivées, des valeurs arbitraires, ces fonctions, ainsi que ζ, se trouvent déterminées uniformément dans toute l'étendue de T. En franchissant successivement les diverses coupures $q_1, q_2, \ldots, q_\rho$ dans un ordre quelconque et un nombre quelconque de fois chacune, on obtient des surfaces que l'on peut désigner par T_1, T_2, T_3, ... Ces surfaces sont en nombre infini quand les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas algébriques. Dans chacune de ces surfaces T_i, ζ est une fonction uniforme de z. Établissons maintenant au moyen

de l'équation (F) la représentation des diverses feuilles T, T_1, T_2, ... sur le plan des ζ. Soit désignée par S_i la surface qui représente ainsi sur le plan des ζ la surface T_i. Tant que, sur une feuille T_i, $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas *identiquement* infinis, c'est-à-dire infinis pour toute valeur de z, S_i, qui correspond à T_i, remplira également une surface, soit que T_i provienne d'un nombre fini de transgressions des coupures $q_1, q_2, \ldots, q_p$, soit qu'il provienne d'un nombre infini. Au contraire, si $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis sur une feuille T_i provenant d'un nombre infini de transgressions des coupures q, la représentante S_i de T_i se réduira en un point.

L'ensemble des représentantes S, S_1, S_2, ... forme une surface non découpée (*zusammenhängend*) dans le plan des ζ. Celles de ces représentantes qui ne correspondent pas à des surfaces T_i sur lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis *n'admettent pas de points de ramification* d'après les développements de mon Mémoire (p. 158-160 de votre Journal); *l'ensemble de ces représentantes constitue donc sur le plan des ζ une surface σ, qui couvre ce plan partout simplement.* Sur les bornes de cette surface σ se trouvent les points qui jouent le rôle des représentantes des surfaces T_i dans l'intérieur desquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont identiquement infinis parce que ces points peuvent être obtenus par le passage à la limite des surfaces qui constituent σ.

Le sens de la proposition I de mon travail (p. 161 de votre Journal) revient maintenant à ce que z est une fonction méromorphe de ζ *dans l'intérieur de la surface σ*. De là découle le corollaire immédiatement suivant, dont il est fait usage dans la partie ultérieure du même travail, que $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ ne peut pas admettre une même valeur pour deux valeurs différentes de z, étant supposé nécessairement que ce quotient n'est pas indépendant de z, ou, ce qui est la même chose, que $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis.

Si maintenant un des points limites est entouré en tous sens par des surfaces S, il faut, en dehors des restrictions déjà mentionnées, qu'une autre relation ait lieu encore entre les constantes contenues dans les coefficients de l'équation différentielle.

Heidelberg, 7 juin 1880.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Dr J. ODSTRČIL. — KURZE ANLEITUNG ZUM RECHNEN MIT DEN (HAMILTON'SCHEN) QUATERNIONEN. — Halle, 1879.

Ce petit Volume de 79 pages n'est, comme le titre l'indique, qu'une sorte d'introduction très résumée au Calcul des quaternions; mais il serait difficile de trouver un Traité plus substantiel, car l'auteur, avec beaucoup de talent et une profonde connaissance du sujet, y a fait entrer tout ce qui est essentiel pour s'assimiler les principes de la méthode d'Hamilton.

L'auteur, avant d'entrer dans l'exposé du calcul, a cru devoir débuter en quelques pages par certaines considérations générales sur les quantités et les nombres. Il insiste avec grande raison sur la notion de qualité, qui s'introduit dans le calcul algébrique à côté de la notion de grandeur et donne naissance d'abord aux quantités négatives, puis aux quantités imaginaires. Au point de vue purement philosophique, c'est un grand progrès dans la Science que cette généralisation des quantités et des nombres; on est conduit à substituer l'idée de rapport, c'est-à-dire de comparaison mesurable, à celle de grandeur absolue, et, dans cette comparaison, rien n'empêche d'imaginer que certaines qualités des objets que l'on considère pourront figurer à côté de la grandeur absolue de ces objets.

Les symboles qui représenteront le résultat de cette comparaison complexe devront garder la trace des diverses quantités comparées entre elles. C'est ainsi que le rapport de deux quantités imaginaires nous donne à la fois le rapport des longueurs de deux droites dans un plan et l'angle qu'elles forment l'une avec l'autre.

C'est en cherchant à généraliser cette notion des imaginaires et à créer un algorithme pour la Géométrie de l'espace que le célèbre William Rowan Hamilton a été conduit à imaginer son algèbre des quaternions, si intéressante, si féconde, et qui semble commencer à se répandre, malgré la défaveur relative dans laquelle ce calcul semble avoir été tenu assez longtemps.

L'Ouvrage de M. Odstrčil est divisé en sept Chapitres :

I. Composition et décomposition des vecteurs.

II. Construction d'un quaternion.

III. Addition et soustraction des quaternions.

IV. Multiplication des vecteurs.

V. Multiplication des quaternions.

VI. Produits de trois ou plusieurs vecteurs.

VII. Exemples et applications.

Le premier Chapitre, dont l'exposition est très claire et très bien ordonnée du reste, ne saurait présenter au lecteur la moindre difficulté.

C'est dans les Chapitres suivants, principalement dans les Chapitres IV et V, que se trouve, on peut le dire, contenue toute la méthode. Nous pourrions, à la rigueur, adresser à l'auteur une légère critique pour avoir introduit un Chapitre sur la construction d'un quaternion avant d'arriver à la multiplication et à la division des vecteurs.

Il nous semble que la marche logique doit être celle-ci : montrer tout d'abord avec quelle facilité se font l'addition et la soustraction des vecteurs ; arriver à la multiplication, en montrer les difficultés; indiquer comment Hamilton les a surmontées, grâce à la conception du *rapport géométrique* de deux vecteurs (ou de la *biradiale*); enfin, en combinant les biradiales par des opérations géométriques et en cherchant à traduire symboliquement ces opérations diverses, se trouver conduit au symbole analytique de la biradiale, qui est le quaternion.

C'est du reste, à très peu près, ce que fait l'auteur, malgré la critique que nous venons d'élever, et qui est beaucoup moins de fond que de forme.

Ainsi que nous l'indiquions plus haut, le lecteur qui possède parfaitement les Chapitres II, III, IV et V (vingt-huit pages en tout dans l'Ouvrage dont il s'agit) peut se considérer comme maître de la méthode. Le reste ne saurait plus être qu'une affaire de perfectionnements, de pratique, d'applications, s'acquérant par la lecture d'Ouvrages plus complets, et surtout par la résolution de nombreux problèmes.

Le Chapitre VI renferme quelques formules, choisies parmi les plus importantes et les plus usitées dans les applications, et qui ont rapport à des produits de trois ou plusieurs vecteurs.

Enfin, les applications du Chapitre VII sont aussi nombreuses qu'il est possible en si peu d'espace. Très élémentaires pour la

plupart, se rapportant seulement aux matières traitées dans les Chapitres de doctrine, elles ont trait surtout à la Géométrie et à la Trigonométrie. Deux ou trois exemples empruntés à la Statique montrent cependant avec quelle facilité le calcul d'Hamilton s'adapte à ces sortes de questions. L'auteur a eu soin de ne pas passer sous silence la représentation des rotations, auxquelles l'algorithme des quaternions s'applique d'une façon si heureuse et si simple.

Nous aurions été heureux de voir figurer dans ce petit Ouvrage quelques notions sur la différentiation et aussi sur les équations du premier degré, l'une des parties de la méthode qui font certainement le plus d'honneur au génie de l'inventeur des quaternions; mais l'auteur a cru évidemment nécessaire de sacrifier beaucoup à la brièveté et à la simplicité. Tel qu'il est, son Livre doit rendre un véritable service et contribuer à répandre en Allemagne la culture de cette méthode. C'est tout au moins une première et très complète initiation, qui prépare à la lecture des Ouvrages originaux.

Nous ne dirons rien des notations : M. Odstrčil s'est exactement conformé à celles de l'inventeur et de ses disciples d'Angleterre.

Nous croyons, au contraire, que les modifications introduites par M. Hoüel dans sa remarquable *Théorie des quantités complexes*, où il traite des quaternions d'une manière très complète, sont un perfectionnement réel et sérieux, qu'il est désirable de voir maintenir dans les Ouvrages français; mais cela ne touche pas au fond même.

En terminant, nous aurions à exprimer le désir de voir paraitre en France des Ouvrages conçus dans le même esprit que celui de M. Odstrčil et propres à répandre les principes du Calcul des quaternions dans le public mathématique et peut-être même dans l'enseignement supérieur. Mais ce désir est à moitié réalisé déjà ; nous croyons savoir en effet qu'une *Introduction à la méthode des quaternions*, de M. Laisant, est sur le point de sortir des presses de M. Gauthier-Villars [1], et que la même maison a entrepris également la publication d'une traduction française, par M. Plarr, du

---

[1] Depuis la rédaction de ce compte rendu, l'Ouvrage dont nous parlons a été publié; il se compose d'un volume in-8° de XXII-242 pages. Il en sera rendu compte ultérieurement dans le *Bulletin*

remarquable Ouvrage de M. Tait, *An elementary Treatise on Quaternions*. A. L.

LIE (SOPHUS). — BEITRÄGE ZUR THEORIE DER MINIMALFLÄCHEN (¹).

Sous le titre général qu'on vient de lire, les Tomes XIV et XV des *Mathematische Annalen* contiennent deux Mémoires remarquables, destinés à jeter une grande lumière sur la théorie des surfaces minima.

Le premier de ces deux articles, intitulé *Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Math. Ann.*, Bd. XIV), présente le plus grand intérêt, et est d'une portée considérable.

L'auteur y est parvenu à donner des méthodes projectives pour la génération des surfaces minima et, en s'appuyant sur ces méthodes, à fonder une nouvelle théorie de ces surfaces. Le point principal de ces recherches consiste dans la démonstration de ce théorème que *les surfaces minima se déduisent du groupe de surfaces*

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

toutes les fois que les deux courbes

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t),$$
$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau),$$

dont le mouvement de translation engendre la surface, sont des courbes minima, c'est-à-dire toutes les fois que les fonctions arbitraires qui entrent dans ces équations satisfont aux équations différentielles

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0.$$

La théorie des surfaces minima est ainsi ramenée à l'étude des

---

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 331-416, et t. XV, p. 465-506.

deux courbes minima qui, par leur translation, engendrent la surface. Cette représentation des surfaces minima de Lie a, en tous cas, l'avantage de fournir non seulement les surfaces réelles, mais encore les surfaces imaginaires; elle est ainsi très générale. A l'aide de ce mode de génération, l'auteur parvient à déterminer la classe et aussi l'ordre d'une surface algébrique formée au moyen de deux surfaces minima données. Soient M, M' les classes, R, R' les rangs des deux courbes; la classe de la surface sera donnée par cette formule simple :

$$M(R' - M') + M'(R - M).$$

En général, la surface est imaginaire; elle devient réelle lorsque A et A_1, ainsi que B et B_1 et que C et C_1, sont des fonctions conjuguées. On a alors $M = M'$, $R = R'$, et il en résulte, pour la classe de la surface,

$$2M(R - M).$$

Il faut remarquer, en particulier, le cas spécial où l'on a, en outre, $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$. Ces surfaces sont des surfaces doubles, dont l'indice de la classe est

$$M(R - M).$$

La détermination de l'indice de l'ordre est plus compliquée, parce qu'elle ne dépend pas uniquement des ordres des deux courbes, mais aussi de la manière dont ces courbes se comportent à l'infini.

Maintenant l'auteur parvient à la solution complète de la question posée par M. Weierstrass, savoir, la détermination de toutes les surfaces réelles d'un indice de classe donné, dans le cas où cet indice est un nombre premier. Ces surfaces se présentent toutes comme surfaces doubles; la classe des courbes minima se trouve égale à l'unité, et la fonction de Weierstrass $F(s)$ est une fonction rationnelle. Le calcul est développé pour quelques cas particuliers. On trouve, entre autres, comme indice de classe le moins élevé, le nombre 5, d'accord avec les recherches de M. Henneberg.

Il est plus difficile de déterminer toutes les surfaces d'un ordre donné. La possibilité de la solution est cependant mise en évidence, et le calcul est complètement achevé dans plusieurs cas. Pour la

surface de cinquième classe étudiée par M. Henneberg, l'ordre se trouve être 15 et non 17. Toutefois il n'y a pas là de contradiction essentielle vis-à-vis des recherches de M. Henneberg, car les méthodes employées par ce dernier ne peuvent prétendre qu'à fixer un certain maximum pour l'indice de l'ordre. D'ailleurs, M. C. Schilling (¹) est parvenu à séparer du déterminant dont M. Henneberg avait conclu l'indice d'ordre 17 un facteur du second degré et à réduire ainsi l'ordre de la surface au nombre indiqué par M. Lie. La suppression de ce facteur donne pareillement l'explication d'autres assertions contradictoires avec le beau travail fondamental de M. Lie.

II. *Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Math. Ann.*, Bd. XV).

Comme suite à l'élégante solution donnée par M. H.-A. Schwarz du problème de la détermination d'une surface minimum, touchée par une surface développable donnée, suivant une courbe donnée, M. Lie se pose le problème tout à fait général de chercher toutes les surfaces minima algébriques tangentes à une développable algébrique donnée. La solution générale de ce problème, il est vrai, n'est pas connue; toutefois, on a obtenu une solution élégante et complète de toute une suite de cas principaux. Par exemple, l'auteur a déterminé toutes les surfaces algébriques, en nombre doublement infini, qui touchent une surface conique algébrique. Il a, de plus, étudié les surfaces qui ont une courbe algébrique pour ligne de courbure. On obtient dans ces recherches un grand nombre de très beaux théorèmes. De ceux-ci découlent, comme cas tout à fait particuliers, les deux théorèmes établis par Henneberg sur les surfaces ayant une ligne géodésique plane donnée. On trouve également toutes les surfaces algébriques tangentes à une développable circonscrite à une surface minimum algébrique, et on les détermine par une construction commune.

(¹) *Die Minimalflächen fünfter Classe*. Dissert. Göttingen, 1880.



MÉLANGES.

NÉCROLOGIE.

GIUSTO BELLAVITIS.

Le 6 novembre 1880, la Science a fait une grande perte : c'est ce jour-là qu'est mort le savant géomètre italien Giusto Bellavitis, professeur à l'université de Padoue et sénateur du royaume d'Italie.

Il serait téméraire d'entreprendre ici de tracer une Notice complète de sa vie et de ses travaux ; des existences si bien remplies méritent qu'on se recueille avant de les étudier, et pour cela le temps est nécessaire. Mais il nous est permis du moins de venir payer notre tribut de regrets et d'admiration à la mémoire de ce géomètre éminent, qui fut en même temps un homme de bien. Nous estimons même que c'est un devoir pour la Science française de ne pas laisser disparaître dans le silence ceux qui ont poursuivi la recherche de la vérité et qui se sont illustrés dans cette recherche, que ce soit au dedans ou en dehors de nos frontières.

Les regrets que laisse derrière lui Giusto Bellavitis seront partagés par toutes les personnes qui s'intéressent aux sciences. Mais combien ces regrets ne seront-ils pas plus vifs chez ceux qui ont eu l'heureuse fortune de le connaître personnellement et d'échanger avec lui des correspondances où, de sa part, se révélait constamment, à côté d'une véritable puissance scientifique, une exquise bienveillance, toujours empreinte de bonhomie et de finesse.

M'étant trouvé au nombre de ces favorisés, je ressens plus vivement que personne la perte que l'Italie scientifique vient de faire, et ce n'est pas sans un profond serrement de cœur que je revois ses lettres, si vivantes, si *jeunes* (qu'on me passe ce mot), tracées par une main aujourd'hui glacée.

Le lecteur me permettra d'extraire d'une de ces Lettres, datée du 27 décembre 1872, la propre biographie de Giusto Bellavitis,

écrite par lui-même, et certainement sans aucune préoccupation de publicité. On n'en jugera que mieux ce qu'était cet esprit puissant et charmant, dont la correspondance complète mériterait certainement d'être publiée un jour :

« Puisque vous êtes assez bon, m'écrivait-il, pour vous intéresser à un vieillard qui, sans doute, n'aura jamais le plaisir de vous embrasser (1) (et j'ajoute en manière de consolation qu'il n'y a rien qui ne coûte en cette vie), je joins ma biographie à ma photographie. Né le 22 novembre 1803 à Bassano, petite ville à 40 kilomètres au nord de Padoue, j'ai fait toutes mes études par moi seul. Ne poursuivant pas ainsi les études officielles, il semblait que la carrière de l'instruction publique dût m'être fermée. Mais, l'Institut vénitien ayant été rétabli par l'empereur Ferdinand, j'y fus admis en 1840. Alors, l'amitié de quelques personnes et ma chance constante me firent nommer professeur de Mathématiques au lycée de Vicence (1841), puis, en 1845, professeur de Géométrie descriptive à l'Université de Padoue, chaire que j'échangeai, après l'unification de l'Italie, pour celle d'Algèbre complémentaire et de Géométrie analytique.

» Je me suis marié en 1842, et j'ai un fils unique, qui professe aujourd'hui, à l'université de Padoue, les applications de la Géométrie descriptive.

» Cette petite famille m'a rendu et me rend heureux. J'ai eu plusieurs amis, la plupart sont morts prématurément : ce furent là mes chagrins.

» D'un caractère toujours joyeux, j'aime la discussion, sans jamais m'en sentir offensé. Libre penseur, libéral et un peu républicain de sentiment, mais monarchiste par réflexion, je ne pouvais sincèrement et franchement accepter la domination étrangère; mais d'ailleurs je n'ai eu à en souffrir aucune persécution.

» Après la libération de cette province, je fus nommé sénateur par le gouvernement, je le dus beaucoup à mon heureuse fortune habituelle, et peut-être aussi à ce qu'alors il n'y avait pas beaucoup de professeurs sur les sentiments italiens desquels on pût

---

(1) [illegible] j'ai eu le bonheur de passer deux jours [illegible] à Padoue et Venise vers la fin de [illegible]

compter (il s'est trouvé ensuite que d'autres étaient plus Italiens et plus libéraux que moi).

» Je suis allé plusieurs fois à Florence et à Rome; mais ma chaire de professeur et ma famille m'ont toujours ramené bien vite à Padoue. Ici la vie m'est douce. Mes concitoyens m'ont nommé, et jusqu'à présent maintenu, conseiller municipal.

» Je mourrai un jour : le.... »

Hélas! ses amis étaient en droit d'espérer qu'ils ne seraient pas appelés aussi tôt à remplir le blanc fatal qui termine cette autobiographie; car Giusto Bellavitis a conservé jusqu'à la fin la santé du corps et celle de l'esprit, la vigueur intellectuelle et morale, et cette philosophie pratique, pleine de bonne humeur et de vertu, dans laquelle, exception bien rare à notre époque, il se vante lui-même d'avoir trouvé le bonheur. Après avoir vécu heureux, il est mort debout. « Je continue à jouir d'une bonne santé », m'écrivait-il le 10 octobre 1880, moins d'un mois avant de mourir.

Pourtant, l'idée de la mort le préoccupait depuis quelques années. Vers le milieu de 1875, il fut sur le point de suspendre définitivement la publication de l'intéressant Recueil scientifique qu'il publiait sous le titre de *Rivista di giornali,* et il termina le douzième fascicule de ce Recueil par une Notice de ses travaux, sorte d'inventaire de sa vie scientifique, qu'il croyait déjà terminée.

Il suffit de parcourir cette Notice pour se rendre compte de la variété extraordinaire des sujets auxquels s'est appliqué ce remarquable esprit, en y apportant toujours une marque d'originalité et une extrême préoccupation de la clarté. On sent, dans tous ses travaux, non seulement qu'il cherche à découvrir des vérités nouvelles, mais qu'il a surtout à cœur de faire profiter les autres des vérités découvertes par lui.

Nous n'essayerons même pas d'analyser cette liste d'Articles, de Mémoires et d'Ouvrages qui s'étend de l'année 1826 jusqu'à 1875. Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Calcul infinitésimal, Probabilités, Mécanique, Physique, Astronomie, Chimie, Minéralogie, Géodésie, Géographie, Télégraphie, Sciences sociales, Philosophie, Littérature même, il n'y a pour ainsi dire pas une branche des connaissances humaines qui n'ait eu le don d'attirer son attention et de mettre son esprit en éveil.

Mais son principal titre, celui qui le placera, dans l'avenir plus encore que dans le présent, au nombre des géomètres dont le nom sera conservé, c'est l'invention de la méthode des équipollences, véritable doctrine nouvelle de Géométrie analytique, très philosophique et très féconde à la fois.

Certes, avant lui, on avait imaginé la représentation des quantités imaginaires par des droites tracées sur un plan, issues d'une origine commune et diversement inclinées sur un axe fixe; mais ce n'était là, pour ainsi dire, qu'une représentation conventionnelle, très propre à éclaircir les notions fournies par l'Algèbre, mais n'allant pas plus loin.

L'idée de renverser les termes de la question, en instituant de toutes pièces le calcul analytique applicable aux figures planes, lequel se trouve identique avec l'Algèbre des imaginaires, cette idée-là appartient bien en propre à Giusto Bellavitis et lui fait le plus grand honneur.

En développant cette doctrine dans un grand nombre de Mémoires, en l'appliquant à une foule de problèmes, il a véritablement créé une nouvelle méthode de Géométrie analytique, trop inconnue encore de nos jours, et dont les principes essentiels, d'une extrême simplicité, méritent de passer dans l'enseignement.

De tous les Mémoires publiés par lui sur ce sujet, celui qui contient l'exposé le plus complet de la méthode : *Exposition de la méthode des Équipollences*, a été traduit, dans l'année 1874, en Bohême et en France simultanément, par M. Zahradník dans le premier de ces deux pays, et dans le nôtre par l'auteur de la présente Notice nécrologique.

Précédemment, sur des Notes communiquées par Bellavitis à M. Hoüel, ce dernier avait, en les traduisant et en les publiant dans les *Nouvelles Annales,* commencé à initier les lecteurs de ce Recueil aux principes de la méthode des équipollences.

Cependant, comme il arrive parfois, les idées de Giusto Bellavitis, même en Italie, n'attirèrent pas tout d'abord l'attention des savants, autant qu'elles en étaient dignes.

Dans la même Lettre du 27 décembre 1872, dont j'ai donné plus haut un extrait, je trouve encore le passage suivant :

« J'avoue, dit-il, que depuis quarante ans j'ai la persuasion que, sous un nom ou sous un autre, les principes de la méthode (des

équipollences) finiront par être adoptés. Mais je manque d'une initiative persistante, et j'ai été aussi un peu malheureux. En Italie, personne ne fit attention à mes idées; et si, après beaucoup d'années, on en a adopté quelques-unes, on préfère les attribuer aux Allemands. »

Depuis lors, il semble qu'un certain progrès s'est fait, non seulement en Italie, mais un peu partout, au point de vue de la vulgarisation de la méthode des équipollences. Cependant ces progrès sont encore insuffisants à notre avis, et ils ne deviendront efficaces, ainsi que nous le disions tout à l'heure, que le jour où la méthode sera introduite dans l'enseignement, au moins par ses parties essentielles. Il arrive ainsi le plus souvent qu'une invention ne porte ses fruits et ne donne ses véritables résultats qu'après la mort de l'inventeur.

Il me resterait, pour terminer cette Notice, à raconter comment Giusto Bellavitis a été brusquement enlevé à l'affection de sa famille et de ses nombreux amis, de la façon la plus cruelle et la plus imprévue. Je ne puis le faire que d'une façon sommaire, d'après ce que m'écrivait son fils, quelques jours après cette mort si fatale.

Le samedi 6 novembre, après avoir passé la journée à Padoue pour les examens de l'Université, il retournait, à 9^h du soir, à sa campagne de Tezze, près Bassano. Il était joyeux de revoir les siens, après trois jours d'absence. Quelques minutes plus tard, descendant un escalier de neuf marches, il tombait la tête la première, et on le relevait au milieu d'une mare de sang. Depuis lors, il ne reprit pas connaissance et ne prononça plus une parole.

Une congestion a-t-elle été la cause de la chute, ou est-ce la chute elle-même qui a occasionné la mort? C'est ce qu'on n'a pu déterminer exactement. « Peu m'importe », ajoute M. Ernest Bellavitis, « du moment que j'ai la douleur de me dire que je ne le reverrai plus vivant! »

Si quelque chose peut adoucir la peine de sa veuve et de son fils, c'est bien la pensée des regrets éternels que laisse derrière lui celui qu'ils pleurent. C'est aussi l'assurance de cette renommée sereine et pure qui ne fera que grandir avec le temps.

Proposons-le comme modèle, et à nous-mêmes, et aux jeunes géomètres de notre époque. Sa vie est digne de servir d'exemple.

Ceux qui, comme lui, poursuivent sans relâche la vérité pour la vérité elle-même, ceux qui font abnégation des petites préoccupations égoïstes, ceux qui ne conservent pas d'aigreur contre leurs contemporains à raison de froissements personnels, ceux-là seuls sont vraiment les adeptes de la Science. Leurs travaux ont pu n'être pas appréciés autant qu'ils devaient l'être, mais justice leur sera rendue un jour.

Ayant vécu modestes, ils resteront célèbres : Giusto Bellavitis sera de ceux-là. A. LAISANT.

SUR LE CONTACT DES COURBES ET DES SURFACES;

PAR M. G. DARBOUX.

M. Kummer a démontré que les surfaces du quatrième ordre douées d'une conique double peuvent être engendrées de dix manières différentes par le mouvement d'une conique variable assujettie à rencontrer en deux points la conique double.

Dans le cas où ces surfaces sont des cyclides générales, c'est-à-dire où la ligne double devient le cercle imaginaire de l'infini, les coniques deviennent des cercles, et il passe, par conséquent, dix cercles réels ou imaginaires par chaque point de la surface. Cette propriété des cyclides m'a toujours paru des plus remarquables; les nombreuses recherches des géomètres sur les surfaces du troisième, du quatrième et du cinquième ordre nous ont fait connaître des surfaces admettant plusieurs séries de coniques; mais aucune d'elles ne contient un aussi grand nombre de séries de sections circulaires que les cyclides. Il m'a semblé qu'il y aurait intérêt à démontrer rigoureusement qu'une surface ne peut admettre plus de dix séries de sections circulaires et que les cyclides sont les seules surfaces dans lesquelles ce nombre maximum de dix séries soit effectivement atteint. On verra, dans la suite de ce travail, que la démonstration de cette proposition se déduit assez facilement des théorèmes généraux que l'on peut établir relativement aux contacts de différents ordres que peut avoir en un point donné un cercle avec une surface.

J'ai aussi étudié le contact d'une conique quelconque avec une surface. Je ne connais sur ce sujet que deux Mémoires de M. Tran-

son, l'un publié en 1841 dans le *Journal de Mathématiques de M. Liouville*, l'autre en 1870 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Ces Mémoires intéressants contiennent surtout des résultats relatifs à l'élément introduit par M. Transon sous le nom de *déviation*. J'ai retrouvé ces résultats et d'autres qui me paraissent nouveaux (¹).

(¹) Ces recherches ont été communiquées à l'Académie dans la séance du 13 décembre 1880. Dans la séance suivante, M. Moutard a présenté une réclamation qui nous paraît fondée, et à laquelle nous faisons droit en reproduisant ici une partie de la Note de ce savant géomètre, insérée à la page 1055 du tome XCI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

« La question du contact des coniques et des surfaces, examinée par M. Darboux dans une Note insérée au dernier numéro des *Comptes rendus* (13 décembre 1880), a fait l'objet de deux Communications verbales que j'ai présentées à la Société philomathique vers 1865. Dans la première, j'énonçais, à côté d'autres résultats, ceux qui, dans la Note de M. Darboux, sont relatifs à des coniques quelconques, en exceptant toutefois le théorème, non le moins important, qui concerne les surfaces sur lesquelles il passe, en chaque point, une infinité de coniques; dans la seconde, je représentais, à l'aide d'une cubique gauche, la loi de distribution des cercles qui surosculent une surface en un même point, sous une forme assez simple pour permettre d'en déduire, non seulement les propositions de M. Darboux sur ce sujet, mais aussi, dans une certaine mesure, les constructions correspondantes.

» De cette dernière Communication, il n'existe aucune trace imprimée, et je n'ai par conséquent aucune réclamation de priorité à faire de ce chef. Il n'en est pas de même de la première; j'en ai consigné les points principaux dans une lettre adressée en 1863 au général Poncelet, lettre dont l'illustre géomètre m'a fait l'honneur de publier un extrait dans le Tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* (p. 363 et 364). (M. Chasles en a reproduit une partie, en 1870, dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 354.)

» Après avoir énoncé et démontré à l'aide des principes de Poncelet un théorème général sur le contact de deux surfaces en un point, j'ajoute :

» Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de ce théorème général, en y joignant quelques autres considérations, je me bornerai à citer les suivants :

» *Si autour d'une tangente quelconque menée à une surface, en un point* A, *on fait tourner un plan, et que dans chacune de ses positions on construise la conique qui a en* A *avec la surface un contact du quatrième ordre, il existera en général deux positions du plan sécant pour lesquelles le contact montera au cinquième ordre. L'ensemble de toutes ces coniques forme d'ailleurs une surface du deuxième ordre, en général simplement osculatrice à la proposée.*

» *Par chaque point d'une surface continue il est, en général, possible de mener vingt-sept coniques ayant avec la surface, en ce point, un contact du sixième ordre.*

» Dans le cas particulier où la surface donnée est du troisième degré, les positions singulières du plan sécant mené par une tangente quelconque pour lesquelles le contact avec une conique peut monter au cinquième ordre sont celles qui contiennent les asymptotes de l'indicatrice relative au point où la tangente considérée perce

Pour simplifier les calculs relatifs à l'étude de cette dernière question, j'ai cherché quelle est la forme la plus réduite à laquelle on puisse ramener l'équation de la surface dans le voisinage d'un point simple, en employant la transformation homographique la plus générale. La solution de cette dernière question m'a permis d'énoncer quelques propositions relativement au contact le plus intime que peut avoir en un point une surface du second degré avec une surface donnée.

I.

Considérons une surface quelconque (S) et un point simple O de cette surface. Si l'on choisit pour plan des xy le plan tangent en O, on pourra développer le z d'un point de la surface suffisamment voisin du point O suivant les puissances entières de x et de y, ce qui donnera une série de la forme suivante,

$$(1) \qquad z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots,$$

où φ_2, φ_3, ... sont des fonctions homogènes de x et de y d'un degré égal à leur indice. J'examinerai d'abord une question intéressante dont la solution nous sera utile dans la suite de ce travail : *Quelle est la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener le développement* (1) *en remplaçant la surface par sa transformée homographique la plus générale, ou, ce qui est la même chose, en rapportant la surface donnée, non plus à des coordonnées homogènes ordinaires, mais à des coordonnées tétraédriques quelconques?*

Analytiquement, ce double problème se formule de la manière suivante :

Quelle est la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener

---

de nouveau la surface. On peut ajouter que le plan tangent en ce dernier point contient la courbe d'intersection de la surface osculatrice formée par toutes ces coniques avec la polaire du deuxième degré du point A par rapport à la surface du troisième ordre donnée.

» Ces derniers énoncés ont besoin de quelques modifications pour s'étendre aux surfaces algébriques de degré quelconque, mais ce n'est pas le lieu d'insister sur ce point. »

le développement (1) *en employant la substitution*

$$(2)\qquad \begin{cases} z = \dfrac{Z}{1 + aX + bY + cZ}, \\ x = \dfrac{a'X + b'Y + c'Z}{1 + aX + bY + cZ}, \\ y = \dfrac{a''X + b''Y + c''Z}{1 + aX + bY + cZ}, \end{cases}$$

dans laquelle figurent quatre fonctions linéaires dont le détermi-nant $(a'b'' - b'a'')$ *doit être différent de zéro?*

Si, au lieu de prendre d'abord les variables X, Y, on choisit leurs combinaisons linéaires $a'X + b'X$, $a''Y + b''Y$, on voit que la substitution (2) peut être remplacée par la suivante,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{X + hZ}{1 + u_1 + u_0 Z}, \\ y = \dfrac{Y + kZ}{1 + u_1 + u_0 Z}, \\ z = \dfrac{Z}{1 + u_1 + u_0 Z}, \end{cases}$$

u_1 désignant une fonction linéaire de X, Y, et u_0 une constante, cette substitution pouvant être suivie d'une autre substitution linéaire effectuée sur les seules variables X, Y.

Si l'on porte les valeurs de x, y, z tirées des formules (3) dans le développement (1), on aura

$$Z = \frac{\varphi_2(X + hZ, Y + kZ)}{1 + u_1 + u_0 Z} + \frac{\varphi_3(X + hZ, Y + kZ)}{(1 + u_1 + u_0 Z)^2} + \ldots.$$

Désignons par le symbole Δ l'opération

$$h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y};$$

posons, pour abréger,

$$\varphi_2(h, k) = \varphi_0,$$

et développons les différents termes en nous arrêtant au quatrième ordre. Le développement de Z suivant les puissances de X, Y sera

évidemment de la forme

$$Z = \varphi_2(X, Y) + U_3 + U_4 + \ldots,$$

et l'on devra avoir

$$U_3 + U_4 + \ldots = \varphi_2(X, Y)(-u_1 - u_0 Z + u_1^2) + (-u_1) Z \Delta\varphi_2 + \varphi_0 Z^2 \\ + \varphi_3(X, Y)(1 - 2u_1) + Z\Delta\varphi_3 + \varphi_4(X, Y) + \ldots.$$

En remplaçant Z par son développement et égalant dans les deux membres les termes du même degré, on aura

$$U_3 = -u_1\varphi_2 + \varphi_2\Delta\varphi_2 + \varphi_3,$$
$$U_4 = (\varphi_0 - u_0)\varphi_2^2 + u_1^2\varphi_2 + U_3\Delta\varphi_2 - u_1\varphi_2\Delta\varphi_2 - 2u_1\varphi_3 + \varphi_2\Delta\varphi_3 + \varphi_4,$$

ou plus simplement, si l'on pose

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_2 - u_1 = v_1, \\ \varphi_0 - u_0 = v_0, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} U_3 = \varphi_3 + v_1\varphi_2, \\ U_4 = \varphi_4 + 2v_1\varphi_3 + \varphi_2^2 v_1^2 + \varphi_2\Delta\varphi_3 - \varphi_3\Delta\varphi_2 + \varphi_0\varphi_2^2. \end{cases}$$

Les formules (4) montrent que la fonction linéaire ν_1 et la constante ν_0 sont absolument arbitraires. En ajoutant h et k, on voit que l'on a cinq constantes dont on peut disposer pour donner une forme simple aux nouveaux termes du troisième et du quatrième ordre.

Supposons d'abord que le point O de la surface (S) ne soit pas un point à indicatrice parabolique. On peut admettre alors que $\varphi_2(x, y)$ a d'abord été ramené à la forme

$$\varphi_2(x, y) = xy,$$

et l'on pourra disposer des deux constantes contenues dans v_1 pour faire disparaitre dans U_3 les termes en X^2Y, XY^2, et ramener par conséquent U_3 à la forme

$$U_3 = AX^3 + DY^3.$$

Tant que $\varphi_2(x, y)$ et $\varphi_3(x, y)$ n'auront pas de diviseur commun, c'est-à-dire tant qu'aucune des tangentes asymptotiques ne coupera

la surface en quatre points confondus en O, les constantes A et D seront différentes de zéro.

Cela posé, et pour faciliter la discussion suivante, supposons que l'on ait fait une première transformation homographique dans laquelle on se soit contenté d'amener U_3 à la forme précédente. On aura donc

$$\varphi_2 = xy, \quad \varphi_3 = Ax^3 + Dy^3,$$

et, si l'on applique la substitution (3), il faudra que, pour maintenir à U_3 la valeur

$$U_3 = AX^3 + DY^3,$$

on fasse $v_1 = 0$. Alors l'expression de U_4 sera

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} U_4 = \varphi_4(X, Y) + XY(3AX^2h + 3DY^2k) \\ \qquad - (AX^3 + DY^3)(Xk + Yh) + \varphi_0 X^2Y^2. \end{array} \right.$$

On voit donc que, au moins tant que A et D ne seront pas nuls, on pourra disposer des constantes h, k, φ_0 de manière à faire disparaître soit les termes en X^4, Y^4, X^2Y^2, soit les termes en X^3Y, X^2Y^2, XY^3. On pourra donc donner à U_4 l'une des deux formes

$$U_4 = XY(BX^2 + CY^2),$$
$$U_4 = BX^4 + CY^4.$$

Choisissons, par exemple, la première; nous obtenons, pour le développement de Z,

$$Z = XY + AX^3 + DY^3 + XY(BX^2 + CY^2) + \ldots.$$

Nous examinerons à part le cas d'exception où l'un des coefficients A, D serait nul (¹).

(¹) La même méthode s'applique à une fonction quelconque de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Supposons, en effet, que l'on ait obtenu le développement de cette fonction sous la forme

$$y = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots,$$

φ_k désignant une fonction homogène d'ordre k des variables $x_1, \ldots, x_n$. En effectuant d'abord la substitution

$$y = \varphi_1 + z,$$

on aura

$$z = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots.$$

On peut maintenant remarquer que la substitution homographique la plus géné-

Mais auparavant nous allons montrer que, dans le cas où A et D ne sont pas nuls et où l'on n'a pas à se préoccuper d'introduire des irrationnelles, on peut ramener A et D à être égaux à l'unité.

---

rale peut se ramener à la suivante,

$$z = \frac{Z}{1 + u_1 + u_0 Z},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$x_i = \frac{X_i + h_i Z}{1 + u_1 + u_0 Z},$$

où u_0 est une constante, u_1 une fonction linéaire et homogène des variables X_i, suivie d'une seule substitution linéaire effectuée sur les seules variables X_i. En cherchant le développement de Z suivant les puissances de $X_1, \dots, X_n$, on trouvera, comme dans le texte,

$$Z = \varphi_2(X_1, \dots, X_n) + U_3 + U_4 + \dots,$$

U_3, U_4 ayant les valeurs définies par les formules

$$U_3 = \varphi_3 + v_1 \varphi_2,$$
$$U_4 = \varphi_4 + 2 v_1 \varphi_3 + \varphi_2^2 v_1^2 + \varphi_2 \Delta\varphi_3 - \varphi_3 \Delta\varphi_2 + \varphi_0 \varphi_2^2,$$
$$v_1 = \Delta\varphi_2 - u_1,$$
$$\varphi_0 = \varphi_2(h_1, \dots, h_n) - u_0.$$

Voyons comment on pourra disposer des constantes contenues dans v_1, de $h_1, \dots, h_n$, φ_0 pour obtenir une forme réduite du développement.

Posons, suivant les notations de la théorie des formes,

$$\varphi_2 = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2,$$
$$U_3 = \alpha_x^3 = \beta_x^3,$$
$$U_4 = A_x^4.$$

On disposera des constantes contenues dans v_1 de manière à annuler le covariant linéaire

$$(\alpha a b)^2 \alpha_x,$$

puis des constantes $h_1, h_2, \dots, h_n, u_0$ de manière à annuler à la fois l'invariant

$$(A a b)^2 (A c d)^2$$

et le covariant linéaire

$$(A a b)^2 (A \alpha c)^2 \alpha_x.$$

Ces conditions ne sont pas impossibles, en général, et conduisent à un développement parfaitement défini. Il suffit maintenant de substituer aux variables n covariants linéaires des formes φ_2, U_3, U_4, ... pour obtenir un développement dont tous les coefficients sont des invariants par rapport à toutes les substitutions homographiques auxquelles on peut soumettre les variables; ou bien, si l'on ne veut pas changer de variables, les invariants sont ceux du système de formes φ_2, U_3, U_4, ...

Nous touchons ici à cette question des invariants différentiels, qui a été l'objet des

bstitution

$$\ldots bz,\quad X = ax,\quad Y = by;$$

dra

$$\ldots + \frac{Db^2}{a} y^3 + xy(B'x^2 + C'y^2) + \ldots .$$

a et b par les équations

$$\ldots a^2 = b,\quad Db^2 = a,$$

$$\ldots,\quad b^3 = \frac{1}{AD^2},\quad ab = \frac{1}{AD},$$

t

$$\ldots + y^3 + xy(ax^2 + by^2) + \ldots .$$

plus simple que la forme (6); mais elle subsistera si l'on remplace x, y respecti- nt une racine cubique de l'unité.

asymptotiques coupe la surface en quatre supposer qu'une première transformation né φ_3 à la forme Ax^3, ou plus simple-

$$\ldots h - X^3(Xk + Yh) + \varphi_0 X^2 Y^2.$$

, φ_0 de manière à réduire à zéro les coeffi- La forme réduite du développement sera

$$\ldots X^3 + aY^3X + bY^4 + \ldots$$

u b n'est pas nulle, on pourra même la

---

lphen, en ce qui concerne les courbes planes et ir *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, et *ls des courbes planes*); je me contenterai des de- , qui étaient indispensables pour la suite de ce

Si en chaque point de la surface une tangente asymptotique coupe en quatre points confondus, la surface est réglée et la forme (8) convient pour chaque point de la surface. Mais alors elle est beaucoup trop générale. Si nous exprimons, en effet, que la valeur (8) de Z satisfait à l'équation aux dérivées partielles des surfaces gauches, qui est, comme on sait, en désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les dérivées du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\delta^2 r^3 + \alpha^2 t^3 + 3t^2 r(3\beta^2 - 2\alpha\gamma) + 3tr^2(3\gamma^2 - 2\beta\delta) \\ + 6rst(\alpha\delta - 3\beta\gamma) + 12s^2 t\alpha\gamma + 12rs^2\beta\delta \\ - 6\alpha\beta st^2 - 6\gamma\delta sr^2 - 8s^3\alpha\delta = 0,\end{aligned}$$

nous verrons que tous les termes, sauf le dernier, sont au moins du troisième ordre, et, en égalant à zéro les termes de moindre degré, nous obtiendrons la forme réduite

$$(9) \qquad z = xy + x^3 + ax^5 + bx^4 y + cx^3 y^2,$$

où l'on néglige les termes du sixième ordre.

On verra de même que dans le cas d'un point parabolique ordinaire on est conduit à la forme suivante,

$$(10) \qquad z = x^2 + y^3 + ayx^2 + by^4,$$

et, si la surface a tous ses points paraboliques, c'est-à-dire est développable, on trouvera

$$(11) \qquad z = x^2 + yx^2 + u_4 + \ldots,$$

au moins tant qu'un invariant du quatrième ordre ne sera pas nul.

II.

On peut se servir des formules réduites précédentes pour résoudre différentes questions. J'examinerai les deux suivantes.

Supposons d'abord que l'on veuille étudier les surfaces du second degré ayant en O le contact le plus intime avec la surface (S). Soit

$$(12) \qquad z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2) + \ldots$$

le développement de z. Toute surface du second degré (Q) ayant

avec (S) un contact du second ordre sera représentée par une équation de la forme

$$(13)\qquad z = xy + z(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

qui donne, pour le développement de z,

$$(14)\qquad z = xy + xy(\alpha x + \beta y) + xy(\alpha x + \beta y)^2 + \gamma x^2 y^2 + \ldots.$$

La projection de la courbe d'intersection des surfaces (Q) et (S) sur le plan des xy a pour équation

$$\begin{aligned} o = x^3 + y^3 - xy(\alpha x + \beta y) \\ + xy[ax^2 + by^2 - (\alpha x + \beta y)^2 - \gamma xy] + \ldots, \end{aligned}$$

et elle a un point triple à l'origine, quels que soient α et β.

On ne peut pas disposer des constantes α et β de manière à obtenir un contact complet du troisième ordre, mais on peut les choisir de telle manière que les tangentes au point triple soient confondues. On a alors les trois systèmes de solutions

$$\begin{aligned} \alpha &= -3, & \beta &= -3, \\ \alpha &= -3\theta, & \beta &= -3\theta^2, \\ \alpha &= -3\theta^2, & \beta &= -3\theta, \end{aligned}$$

auxquels correspondent les trois faisceaux de surfaces

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} z &= xy - 3z(\ x + \ y) + \gamma z^2, \\ z &= xy - 3z(\theta x + \theta^2 y) + \gamma z^2, \\ z &= xy - 3z(\theta^2 x + \theta y) + \gamma z^2. \end{aligned} \right.$$

Il y a dans les résultats obtenus un fait qu'il importe de signaler : les surfaces (Q) ayant avec la surface (S) un contact du second ordre dépendent de trois constantes arbitraires α, β, γ. Il semblerait donc qu'on pourra disposer des constantes α, β, γ, non seulement de telle manière que les tangentes en O au point triple de la courbe d'intersection coïncident, mais encore qu'elles coïncident avec une tangente quelconque donnée à l'avance. Ces conditions, qui pourraient, en effet, être satisfaites si l'on avait au lieu d'une surface du second degré (Q) une surface quelconque à neuf paramètres, ne peuvent pas l'être dans le cas actuel. Quand les tangentes au point triple sont confondues, elles le sont nécessairement

avec l'une des trois tangentes définies par l'équation

$$x^3 + y^3 = 0, \tag{16}$$

et il y a une infinité de surfaces du second degré pour lesquelles les tangentes au point triple se confondent avec l'une de ces tangentes : ce sont les surfaces définies par les équations (15).

Ces trois directions jouent le même rôle que les directions principales relativement au contact d'une sphère et de la surface (S), et l'on voit que la théorie du contact des surfaces du second degré avec une surface quelconque (S) nous conduit aussi à un système de lignes courbes tracées sur la surface : ce sont celles dont la tangente en chaque point serait définie par l'équation (16). Nous pouvons appeler les tangentes *tangentes d'osculation quadrique* et les lignes correspondantes *lignes d'osculation quadrique*. Elles sont définies par une équation différentielle du troisième ordre, qu'il est aisé de former dans tous les cas.

On l'obtiendra en exprimant que la fonction de $\frac{dy}{dx}$,

$$\delta \frac{dy^3}{dx^3} + 3\gamma \frac{dy^2}{dx^2} + 3\beta \frac{dy}{dx} + \alpha + \left(m \frac{dy}{dx} + n\right)\left(r \frac{dy^2}{dx^2} + 2s \frac{dy}{dx} + t\right),$$

est un cube parfait, ce qui conduit aux trois équations

$$3(mr + \delta) \frac{dy}{dx} + 3\gamma + nr + 2ms = 0,$$

$$(3\gamma + nr + 2ms) \frac{dy}{dx} + 3\beta + mt + 2ns = 0,$$

$$(3\beta + mt + 2ns) \frac{dy}{dx} + 3(\alpha + nt) = 0,$$

entre lesquelles il y aura à éliminer m, n. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\left[3r^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6rs\frac{dy}{dx} + 4s^2 - rt\right] \\ &\quad + \beta\left[3r^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 9rt\frac{dy}{dx} - 6st\right] \\ &\quad + \gamma\left[3t^2 - 9rt\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6rs\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] \\ &\quad + \delta\left[(4s^2 - rt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6st\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3t^2\frac{dy}{dx}\right] = 0, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

dentiquement vérifiée dans le cas des surfaces du second
›mme cela était évident *a priori*.

uxième application que j'aie à indiquer des formules
consiste dans la détermination de la surface de Steiner
O un contact du quatrième ordre avec la surface (S). La
le Steiner dépendant de quinze constantes, il y a au plus
ace de Steiner ayant en un point un contact du quatrième
ec une surface donnée. La question est seulement de savoir
urface existe effectivement.

effet, je fais toujours usage du développement (12), et je
ontrer que, si l'on prend la surface de Steiner définie par
ules

$$x = \frac{\alpha + v_2}{1 + u_2}, \quad y = \frac{\beta + w_2}{1 + u_2}, \quad z = \frac{\alpha\beta}{1 + u_2},$$

, w_2 sont des fonctions homogènes et du second degré des
res α, β, on peut disposer des constantes contenues dans
v_2 de manière à obtenir le contact du quatrième ordre de
rface avec la proposée. Pour cela je substitue les expres-
écédentes dans la formule (12) et j'écris que tous les termes
sent jusqu'au quatrième degré. On obtient ainsi sans diffi-
valeurs

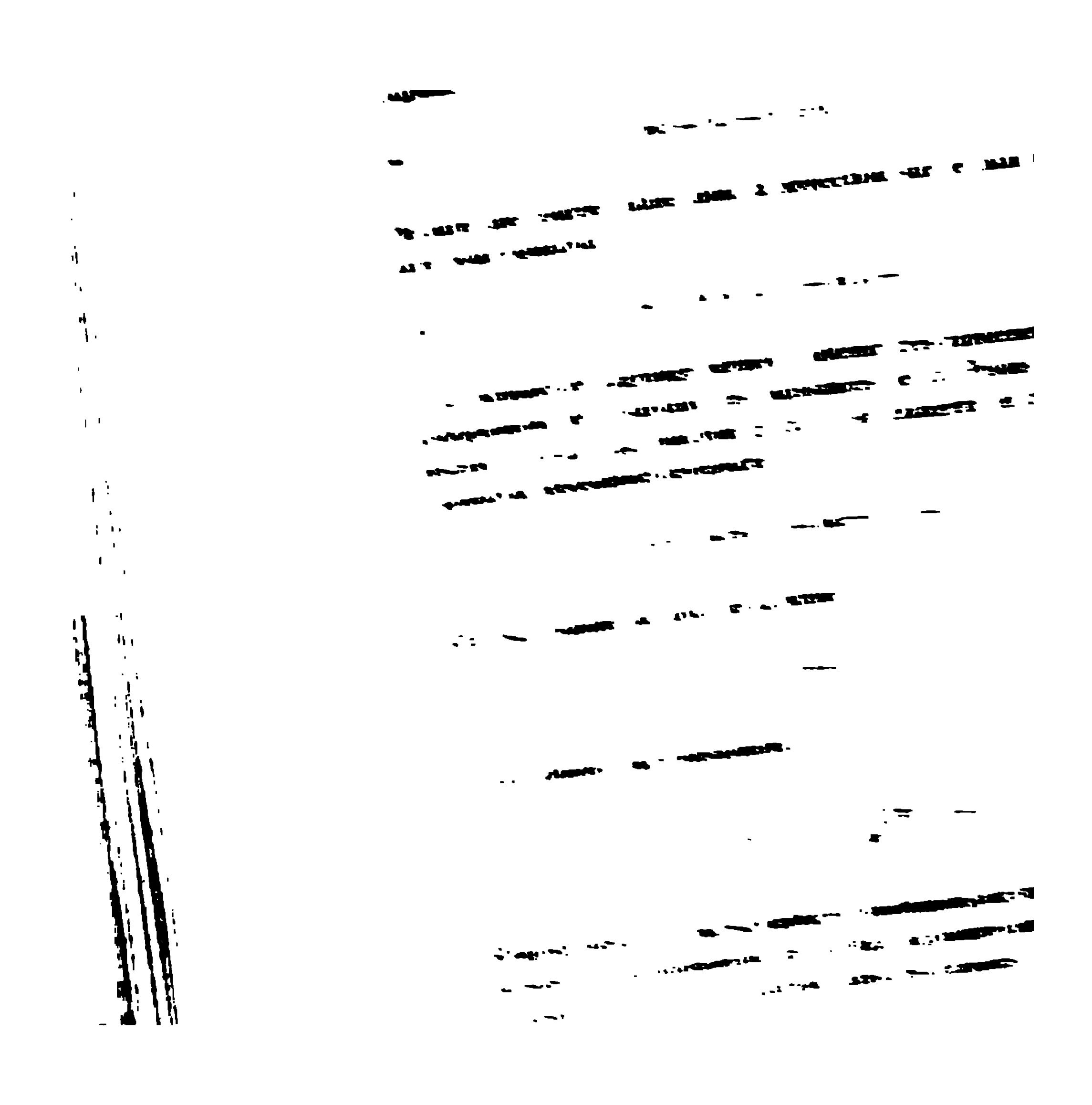
$$\begin{aligned} u_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta, \\ v_2 &= -\beta^2, \\ w_2 &= -\alpha^2, \end{aligned}$$

que la surface de Steiner cherchée est définie par les for-

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\alpha - \beta^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}, \\ y &= \frac{\beta - \alpha^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}, \\ z &= \frac{\alpha\beta}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}. \end{aligned} \right.$$

III.

allons maintenant commencer l'étude des différents pro-
elatifs au contact d'une conique et de la surface (S). Sup-



aleurs de a_2, a_3, ... étant données par les formules suivantes,

$$\left\{\begin{aligned}
a_2 &= \varphi_2,\\
a_3 &= \varphi_3 + m\varphi_2\varphi_2',\\
a_4 &= \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)' + \frac{m^2}{6}(\varphi_2^3)'',\\
a_5 &= \varphi_5 + m\left(\varphi_2\varphi_4 + \frac{\varphi_3^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_3)'' + \frac{m^3}{24}(\varphi_2^4)''',\\
a_6 &= \varphi_6 + m(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_4 + \varphi_2\varphi_3^2)''\\
&\quad + \frac{m^3}{6}(\varphi_2^3\varphi_3)''' + \frac{m^4}{120}(\varphi_2^5)^{\text{IV}},\\
a_7 &= \varphi_7 + m\left(\varphi_2\varphi_6 + \varphi_3\varphi_5 + \frac{\varphi_4^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{6}(3\varphi_2^2\varphi_5 + 6\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_3^3)''\\
&\quad + \frac{m^3}{12}(2\varphi_2^3\varphi_4 + 3\varphi_2^2\varphi_3^2)''' + \frac{m^4}{24}(\varphi_2^4\varphi_3)^{\text{IV}} + \frac{m^5}{720}(\varphi_2^6)^{\text{V}},
\end{aligned}\right.$$

φ_i désigne la fonction $\varphi_i(x, y)$, dans laquelle on a remplacé x 1, y par n, et où les accents supérieurs indiquent des dériva- s à effectuer. Au moyen de ces formules, auxquelles, on le voit, s sommes conduits presque sans calcul, nous allons résoudre les stions que nous avons en vue.

ommençons par étudier les coniques osculatrices, c'est-à-dire coniques ayant cinq points d'intersection avec la surface con- dus au point O. Soit

$$) \qquad z = \varphi_2(x, y) + z(\alpha x + \beta y) + \gamma z^2$$

uation de l'une des surfaces du second degré qui sont oscula- es à (S) et qui contiennent cette conique. Le développement de oordonnée z d'un point de cette surface nous donnera, en posant $= \alpha x + \beta y$,

$$) \qquad \left\{\begin{aligned} z = {}& \varphi_2(x, y) + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \gamma\varphi_2^2 + \varphi_1^3\varphi_2 + 3\gamma\varphi_1\varphi_2^2\\ &+ \varphi_1^4\varphi_2 + 6\gamma\varphi_1^2\varphi_2 + 2\gamma^2\varphi_2^3,\end{aligned}\right.$$

termes négligés étant du septième ordre au moins. La conique ion de cette surface par le plan (P),

$$mz + nx - y = 0,$$

aura pour projection sur le plan des xy la conique dont l'équation est

$$y - nx = mb_2x^2 + mb_3x^3 + \ldots,$$

et b_2, b_3, ... seront définis par les formules (24), où l'on remplacera φ_2, φ_3, ... par les valeurs qui conviennent à la surface du second degré, valeurs définies par le développement (26). Posons, pour abréger,

$$u_1 = \alpha + \beta n;$$

on aura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} b_2 &= \varphi_2, \\ b_3 &= u_1\varphi_2 + m\varphi_2\varphi_2', \\ b_4 &= u_1^2\varphi_2 + \gamma\varphi_2^2 + m(u_1\varphi_2^2)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^3)'', \\ b_5 &= u_1^3\varphi_2 + 3\gamma u_1\varphi_2^2 + m\left(\frac{3}{2}u_1^2\varphi_2^2 + \gamma\varphi_2^3\right) \\ &\quad + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^3 u_1)'' + \frac{m^3}{6}(\varphi_2^4)''', \\ b_6 &= u_1^4\varphi_2 + 6\gamma u_1^2\varphi_2 + 2\gamma^2\varphi_2^3 + m(2u_1^3\varphi_2^2 + 3\gamma u_1\varphi_2^3)' \\ &\quad + \frac{m^2}{2}(2u_1^2\varphi_2^3 + \gamma\varphi_2^4)'' + \frac{m^3}{6}(u_1\varphi_2^4)' + \frac{m^4}{120}(\varphi_2^5)^{\text{IV}}. \end{aligned}\right.$$

Écrivons que la conique est osculatrice à la section plane de (S). Nous aurons les équations

$$(28)\qquad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = b_4,$$

dont la première est identiquement satisfaite. Les deux dernières nous donnent

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} u_1\varphi_2 &= \varphi_0, \\ u_1^2\varphi_2 + u_0\varphi_2^2 + m(u_1\varphi_2^2)' &= \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)'. \end{aligned}\right.$$

Supposons que le plan sécant (P) soit donné, c'est-à-dire que l'on connaisse m et n. Les équations précédentes contiennent les arbitraires α, β, u_0 ; elles ne suffisent donc pas à déterminer ces trois arbitraires. Il y a, en effet, une infinité de surfaces du second degré contenant la conique osculatrice de la section et données par un

juation de la forme (25). Elles ont pour équation

$$z = \varphi_2(x, y) + z(\alpha x + \beta y + \gamma z) + kz(mz + nx - y),$$

à k est arbitraire.

Mais nous pouvons achever de déterminer la surface du second egré cherchée en ajoutant une équation nouvelle aux deux équaons (29), par exemple en exigeant que dans la seconde de ces équaons les coefficients de m soient égaux dans les deux membres. lors on est conduit au système

$$(30)\quad \begin{cases} \varphi_3 = \varphi_2(\alpha + \beta n), \\ \varphi'_3 = \beta\varphi_2 + (\alpha + \beta n)\varphi'_2, \\ \varphi_4 = \gamma\varphi_2^2 + (\alpha + \beta n)^2\varphi_2, \end{cases}$$

ui donne, nous allons le voir, des valeurs parfaitement déterminées pour α, β, γ.

On en déduit en effet

$$(31)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2}{\varphi_2^2}, \\ \alpha = \dfrac{\varphi_3}{\varphi_2} - n\,\dfrac{\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2}{\varphi_2^3}, \\ \gamma = \dfrac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}, \end{cases}$$

'équation de la surface du second degré correspondante est

$$\begin{cases} [z - \varphi_2(x, y)]\varphi_2^3 \\ \quad = zx\varphi_3\varphi_2^2 + z(y - nx)(\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2) + (\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)z^2. \end{cases}$$

is alors nous sommes conduits à une importante conséquence : tion précédente ne contient pas m; elle représente donc le s coniques osculatrices des sections par les plans sécants

$$mz + nx - y = 0,$$

t variable, c'est-à-dire des sections dont les plans passent même tangente. Nous avons donc le théorème suivant :

s une surface on considère toutes les sections planes pas- une même tangente, le lieu des coniques osculatrices de

ces sections à leur point de contact commun avec la tangente est une surface du second degré ayant un contact du second ordre avec la surface proposée.

Ce théorème est tout à fait analogue à celui de Meusnier sur les cercles osculateurs des sections planes passant par une même tangente.

Pour étudier plus complètement les surfaces du second ordre représentées par l'équation (32), prenons pour le développement de z la forme réduite

$$z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2);$$

l'équation (32) deviendra

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} (z - xy)n^3 &= zx(2n^2 - n^5) + zy(2n^4 - n) \\ &\quad + z^2[an^2 + bn^4 - (1 + n^3)^2]. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'il passe six surfaces de ce système par un point quelconque de l'espace. Il passe donc par chaque point de l'espace six coniques osculatrices en un point déterminé d'une surface quelconque (S).

Dans son Mémoire de 1841, M. Transon a établi que le lieu des axes de déviation des sections planes passant par une même tangente est un plan. Cette proposition est une conséquence du théorème fondamental établi plus haut, car on sait que les axes de déviation sont les diamètres des coniques osculatrices passant au point de contact. Ces coniques se trouvant sur une surface du second ordre, le lieu de leurs diamètres sera le plan diamétral de cette surface conjugué à la direction de la tangente. Ce plan diamétral est représenté par l'équation

$$f'_x + nf'_y = 0$$

ou

$$ny + n^2x + (1 + n^3)z = 0.$$

On voit donc qu'il y a trois de ces plans passant en un point de l'espace. En d'autres termes, il y a trois sections planes dont l'axe de déviation coïncide avec une droite donnée passant par le point de contact.

Il est intéressant de rechercher quelle est la nature du contact

des surfaces du second degré contenant les coniques osculatrices avec la surface (S). Le développement de la valeur de z tirée de l'équation (33) est

$$
\begin{aligned}
z = xy + xy & \left[\frac{x(2-n^3)}{n} + \frac{y(2n^3-1)}{n^2}\right] \\
+ xy & \left[\frac{x(2-n^3)}{n} + \frac{y(2n^3-1)}{n^2}\right]^2 \\
+ x^2y^2 & \left[\frac{a+bn^2}{n} - \frac{(1+n^3)^2}{n^3}\right],
\end{aligned}
$$

et, par suite, la projection de la courbe d'intersection de la surface du second degré et de la surface (S) sur le plan des xy aura pour équation

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{x}{n^2} + y\right)(y - nx)^2 \\
& \quad + xy(y-nx)\left[by - \frac{ax}{n} + \frac{y(2n^3-1)^2}{n^4} - \frac{x(2-n^3)^2}{n^3}\right] + \dots
\end{aligned}
$$

On voit que deux tangentes au point triple de la courbe d'intersection seront confondues, et, en outre, la tangente double coupera la courbe d'intersection en cinq points confondus.

Pour les trois valeurs de n correspondantes aux tangentes d'osculation, on aura les trois surfaces du second degré que nous considérons comme ayant le contact le plus intime avec la surface.

IV.

Après avoir étudié les coniques osculatrices, c'est-à-dire les coniques coupant la surface (S) en cinq points confondus en O, cherchons les coniques surosculatrices, c'est-à-dire les coniques coupant la surface en six points confondus. Pour cela, il faudra joindre aux équations (28) la suivante,

$$a_5 = b_5,$$

ou, en tenant compte des valeurs déjà données pour a_5, b_5,

$$
\begin{aligned}
& u_1^2\varphi_2 + 3u_1\gamma\varphi_2^2 + m\left(\frac{3}{2}u_1^2\varphi_2^2 + \gamma\varphi^3\right)' + \frac{m^2}{3}(\varphi_2^3 u_1)'' \\
& \quad = \varphi_5 + m\left(\varphi_2\varphi_4 + \frac{\varphi_3^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_3)''.
\end{aligned}
$$

Si l'on considère la valeur de n comme connue, u_1 et γ seront donnés par les équations (31), et l'équation précédente fera connaître m. Comme elle est du second degré, on voit que *chacune des surfaces du second ordre qui contiennent les coniques osculatrices des sections menées par une même tangente contiendra deux coniques surosculatrices*. Remplaçons dans l'équation précédente u_1, γ par leurs valeurs; nous serons conduits à la relation suivante entre m et n,

$$(34) \qquad A + Bm\varphi_2 + Cm^2\varphi_2^2 = 0,$$

où A, B, C ont pour valeurs

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 2\varphi_3^3 - 3\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2^2\varphi_5, \\ B &= \varphi_2^4 \frac{d}{dn}\left(\frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}\right) = 3\varphi_3^2\varphi_2' - 2\varphi_2\varphi_4\varphi_2' + \varphi_2^2\varphi_4' - 2\varphi_2\varphi_3\varphi_3'. \\ C &= \varphi_3\varphi_2'^2 - \varphi_2\varphi_3'\varphi_2' - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_3\varphi_2'' + \frac{1}{2}\varphi_2^2\varphi_3'' = \frac{1}{2}\varphi_2^3\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette équation (34) donne la condition pour que le plan

$$mz + nx - y = 0$$

détermine dans la surface une section surosculée en O par une conique.

Il est aisé de reconnaître que les fonctions A, B, C sont respectivement des degrés 9, 6, 3. L'équation (34) représente donc un cône de neuvième classe; mais, comme elle est du second degré en m, on voit que le plan tangent est un plan septuple de ce cône. Ainsi :

Par une droite quelconque passant au point de contact on peut mener neuf sections surosculées par une conique au point de contact; mais, si la droite est une tangente de la surface, on ne peut plus en mener que deux.

Je ferai remarquer en outre que les génératrices de contact du cône et du plan tangent sont les tangentes asymptotiques, qu'il faut compter chacune deux fois, et les droites que nous avons appelées *tangentes d'osculation quadrique*.

On peut se servir de l'équation de ce cône pour résoudre une

connaît, en dehors des surfaces du second par chacun des points desquelles passent c'est ce qui a lieu pour la surface de Steiner, -nous de rechercher toutes les surfaces priété. Ce problème, qui paraît au premier peut être résolu d'une manière très simple à suivante.

rd qu'il n'y a pas de surface autre que les surté dont la section par un plan quelconque se une une conique. Il est aisé, en effet, de démonsuivante :

coupe une surface algébrique en des points qui et si les plans passant par cette droite coupent ent une section comprenant toujours au moins surface se décompose et contient au moins une nd degré.

est impossible que des plans quelconques déterminent face indécomposable, d'un degré supérieur au second, comprenant chacune une conique. D'autre part si, le supposons ici, il y a une infinité de tels plans, pasque point de la surface, il faut qu'ils enveloppent une développable : je dis que cette surface est la surface

, il y a, par hypothèse, une infinité de plans tangents du coupant la surface suivant une conique. Si donc le cône décomposable, tous les plans de ce cône devront jouir de propriété. Il suit de là que le cône (34) devrait être le ommet O circonscrit à la surface enveloppe des plans courface (S) suivant une section conique. Or un des plans de ce cône coïncide avec le plan tangent en O. On voit la surface enveloppe des plans déterminant dans (S) des oniques ne peut être que la surface (S) elle-même, et, par nt, le cône (34) ne serait autre chose que le cône de somconscrit à la surface (S).

dis que cela ne peut être. De même que la section par un gent en un point simple a seulement un point double au contact, les tangentes en ce point double étant les tan-

gentes asymptotiques, de même le cône circonscrit à une surface ayant son sommet en un point simple admet seulement le plan tangent pour plan tangent double, les génératrices de contact de ce plan tangent double étant les tangentes asymptotiques. Or le cône (34) admet le plan tangent pour plan tangent septuple. Donc, tant qu'il sera indécomposable, les sections par ses plans tangents ne pourront être des coniques.

Il faut donc que le cône se décompose. Cela ne peut arriver que de deux manières différentes : ou bien il y aura un facteur, fonction de n, qui sera commun à A, $B\varphi_2$, $C\varphi_2^2$; ou bien l'équation du second degré en m admettra deux racines rationnelles.

La première supposition est impossible. Pour que la suppression d'un facteur commun réduisît le cône à admettre le plan tangent au plus comme plan tangent double, les génératrices de contact étant les tangentes asymptotiques, il faudrait que C fût nul ou que $C\varphi_2$ divisât A, c'est-à-dire, si l'on se reporte à l'expression de C et de A, que φ_2 divisât φ_3. Mais, si C est nul, il résulte de la dernière des formules (35) que φ_3 est encore divisible par φ_2. Cette condition devant avoir lieu pour tous les points de la surface (S), celle-ci serait du second degré, car ses tangentes asymptotiques la couperaient constamment en quatre points confondus.

Il reste donc à examiner le cas où les deux valeurs de m données par la formule (34) sont rationnelles. On aura alors

$$B^2 - 4AC = K^2,$$

K désignant un polynôme du sixième degré, et l'on aura pour m les deux valeurs

$$m\varphi_2 = -\frac{B+K}{2C}, \quad m\varphi_2 = -\frac{B-K}{2C}.$$

Les deux cônes correspondants à ces deux valeurs de m admettent tous les deux le plan tangent de (S) au moins pour plan tangent double, car nous avons déjà vu sur l'équation (34) que φ_2 ne saurait disparaître comme facteur commun à A, B, C. Donc, dans tous les cas, l'enveloppe des plans déterminant dans (S) des sections coniques ne peut être que la surface (S) elle-même, ou du moins elle comprend cette surface.

Les deux cônes précédents ne peuvent d'ailleurs être admis si-

multanément, leur ensemble constituant un cône qui admet le plan tangent à (S) au moins comme plan quadruple. Chacun d'eux, d'ailleurs, devra être rejeté tant que le numérateur de l'expression correspondante de $m\varphi_2$ ne sera pas exactement divisible par le dénominateur C, car il admettrait alors le plan tangent à (S) au moins comme plan tangent triple, ce qui est généralement impossible. Si le numérateur est exactement divisible par le dénominateur, et seulement dans ce cas, le cône peut être admis ; mais alors il est de la troisième classe. On voit donc que, dans tous les cas, le cône de sommet O circonscrit à la surface (S) sera de troisième classe. On déduit facilement de cette proposition la solution complète de la question proposée.

La polaire réciproque (S') de (S) sera en effet du troisième ordre et, comme la surface (S) est coupée par chacun de ses plans tangents suivant une conique au moins, il faudra que le cône du quatrième ordre circonscrit à (S') et ayant son sommet en un point de (S') se décompose et contienne un cône du second degré. Il devra donc se réduire à deux cônes du second degré, et, par conséquent, la section complète de (S) par son plan tangent devra se composer de deux coniques : on reconnaît la surface de Steiner.

Dans la discussion précédente, nous avons omis le cas où la surface est réglée. Si l'on se sert alors de la forme réduite (9) donnée plus haut, on trouvera que l'équation du cône (34) devient

$$n^2m^2 + 3nm + 2 + an^2 + an^3 + cn^4 = 0.$$

Pour qu'il se décompose, il faudra que

$$9 - 4(2 + an^2 + bn^3 + cn^4)$$

soit un carré parfait,

$$(1 - 2an^2)^2,$$

et alors on aura les deux cônes partiels

$$2nm = -3 \pm (1 - 2an^2).$$

Quel que soit celui de ces cônes que l'on prenne (et l'on ne peut prendre les deux à la fois), on voit qu'il est du second degré. Donc

la surface réciproque de la surface cherchée devra être coupée par son plan tangent suivant une droite et une conique : ce sera la surface réglée du troisième degré.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

En dehors des surfaces du second ordre, il n'y a que la surface de Steiner, la surface réglée du troisième ordre et leurs variétés qui contiennent une infinité de coniques passant par chaque point de la surface.

V.

Après avoir considéré les coniques qui coupent la surface en six points confondus, et qui sont en nombre illimité, cherchons combien il y a de coniques coupant la surface (S) en sept points consécutifs. Pour cela il faudra ajouter aux équations déjà données la suivante :

$$a_6 = b_6.$$

En y remplaçant α, β, γ par leurs valeurs, on trouve l'équation suivante,

$$(36) \qquad A' + B' m\varphi_2 + C' m^2 \varphi_2^2 + D' m^3 \varphi_2^3 = 0,$$

où l'on a

$$A' = 2\varphi_6\varphi_2^3 - 4\varphi_3^2\varphi_2\varphi_4 - 4\varphi_2^2\varphi_4^2 + 6\varphi_3^4,$$

$$B' = 2\varphi_2^3\varphi'_5 + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi'_4 - 6\varphi_4\varphi_2^2\varphi'_3 - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi'_3 + 2\varphi_2^2\varphi_5\varphi'_2 + 20\varphi_3^3\varphi'_2 - 16\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi'_2,$$

$$C' = \varphi_2^3\varphi''_4 + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi''_3 - 2\varphi_2^2\varphi_4\varphi''_2 - \varphi_3^2\varphi_2\varphi''_2 + 4\varphi_2^2\varphi'_2\varphi'_4 - 12\varphi_3\varphi_2\varphi'_2\varphi'_3 - 10\varphi_2\varphi_4\varphi_2'^2 + 20\varphi_3^2\varphi_2'^2 - 2\varphi_2^2\varphi_3'^2,$$

$$D' = \tfrac{1}{3}\varphi_2^3\varphi'''_3 + 3\varphi_2^2\varphi'_2\varphi''_3 - \varphi_2^2\varphi'_3\varphi''_2 - 6\varphi_2\varphi'_3\varphi_2'^2 - 2\varphi_2\varphi_3\varphi'_2\varphi''_2 + 6\varphi_3\varphi_2'^3.$$

Au lieu de l'équation (36) nous prendrons celle que l'on obtient en en retranchant l'équation (34) multipliée par $7m\varphi_2\varphi'_2$, et nous aurons ainsi

$$(37) \qquad A'' + B'' m\varphi_2 + C'' m^2\varphi_2^2 + D'' m^3\varphi_3^2 = 0,$$

où A'', B'', C'', D'' ont les valeurs suivantes

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned} A'' &= 2\varphi_6\varphi_2^3 - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4 - 4\varphi_2^2\varphi_4^2 + 6\varphi_3^4,\\ B'' &= 2\varphi_2^3\varphi_5' - 5\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_5 + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_4' - 6\varphi_4\varphi_2^2\varphi_3' + 5\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_2'\\ &\quad - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi_3' + 6\varphi_3^3\varphi_2',\\ C'' &= \varphi_2^3\varphi_4'' - 2\varphi_2^2\varphi_4\varphi_2'' + 4\varphi_2\varphi_4\varphi_2'^2 - 3\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_4' + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_3''\\ &\quad - \varphi_3^2\varphi_2\varphi_2'' + 2\varphi_2\varphi_3\varphi_2'\varphi_3' - \varphi_3^2\varphi_2'^2 - 2\varphi_2^2\varphi_3'^2,\\ D'' &= \tfrac{1}{3}\varphi_2^3\varphi_3''' - \tfrac{1}{2}\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_3'' - \varphi_2^2\varphi_3'\varphi_2'' + \varphi_2\varphi_3'\varphi_2'^2\\ &\quad + \tfrac{3}{2}\varphi_2\varphi_3\varphi_2'\varphi_2'' - \varphi_3\varphi_2'^3. \end{aligned}\right.$$

On peut encore indiquer ces expressions abrégées,

$$C'' = \varphi_2^4\frac{d}{dn}\varphi_2\frac{d}{dn}\frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3} + 4\varphi_2^3\varphi_3\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right),$$

$$D'' = \frac{1}{3}\varphi_2^4\frac{d^3}{dn^3}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right) + \frac{1}{2}\varphi_2^3\varphi_2'\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right),$$

qui montrent presque immédiatement, par la décomposition en fractions rationnelles, que C'', D'' sont respectivement du sixième et du troisième degré. On verra facilement que B'' est du neuvième degré.

Si donc l'on pose

$$m\varphi_2 = u,$$

on aura à éliminer u entre les deux équations

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned} A + Bu + Cu^2 &= 0,\\ A'' + B''u + C''u^2 + D''u^3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

où les degrés des coefficients par rapport à n sont en progression arithmétique dans les deux équations : 9, 6, 3 pour la première, 12, 9, 6, 3 pour la seconde. Donc, d'après les règles connues, on sera conduit à une équation finale en n qui sera du trente-troisième degré. Mais je vais montrer que cette équation admet le facteur étranger φ_2^3 et qu'elle se réduit, par conséquent, à une équation du vingt-septième degré après la suppression de ce facteur.

Considérons en effet, dans les équations (38), u et φ_2 comme les seules variables, et traitons pour un instant toutes les autres fonctions φ_3, φ_2', ... comme des constantes. Il est aisé de reconnaître

que pour $\varphi_2 = 0$ les équations ont une racine commune. En effet, pour $\varphi_2 = 0$, elles se réduisent aux suivantes,

$$2\varphi_3^3 + 3\varphi_3^2\varphi_2' u + \varphi_3\varphi_2'^2 u^2 = 0,$$
$$6\varphi_3^4 + 6\varphi_3^3\varphi_2' u - \varphi_3^2\varphi_2'^2 u^2 - \varphi_3\varphi_2'^3 - u^3 = 0,$$

qui admettent la racine commune

$$\varphi_2' u = -\varphi_3.$$

La résultante des équations (38) admettra donc φ_2 en facteur. Mais, si l'on forme la combinaison

$$\left(3u\varphi_2' - 2\varphi_3 + \varphi_2\frac{2\varphi_3\varphi_3' - 4\varphi_4\varphi_2'}{\varphi_3\varphi_2'}\right)(A + Bu + Cu^2)$$
$$+ A'' + B''u + C''u^2 + D''u^3 = 0,$$

on reconnaîtra aisément que cette équation, si l'on y considère u et φ_2 comme les coordonnées d'un point, représente une courbe ayant un point triple déterminé par les valeurs

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' u = -\varphi_3.$$

Il suit de là que, dans la résultante, φ_2^3 doit se trouver en facteur. Il est aisé de démontrer que la résultante n'est pas divisible par une plus haute puissance de φ_2 (¹). Donc, elle se réduira exactement au vingt-septième degré. Ainsi :

Il y a, en général, vingt-sept coniques qui coupent une surface quelconque en sept points confondus en un point simple de cette surface.

(¹) On peut suivre pour cela deux voies différentes : soit montrer qu'aucune combinaison linéaire des deux équations (38) ne peut conduire à une équation qui représente une courbe ayant un point quadruple correspondant aux valeurs

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' u = -\varphi_3.$$

soit montrer que les tangentes au point triple de la courbe considérée dans le texte sont distinctes de la tangente à l'une des courbes représentées par l'équation (38) au même point.

J'ai encore calculé un exemple numérique dans lequel l'équation ne contient pas φ_2 à une puissance supérieure à la troisième.

le cas des surfaces du troisième degré, ces vingt-sept
s sont celles qui sont tout entières sur la surface et qui
par le point considéré. On peut donc déduire du théorème
cède la démonstration de l'existence de vingt-sept séries de
s ou de vingt-sept droites sur la surface du troisième ordre.
ce résultat particulier on n'aurait pu conclure le théorème
nt, car nous avons employé les termes des six premiers
lu développement de z, et il n'existe pas de surface cubique
n un point avec une surface donnée un contact du sixième

VI.

s avoir traité le cas des coniques quelconques, nous allons
er en particulier les cercles et étudier les questions relatives
act des cercles et de la surface (S).
ıt

$$mz + nx = y, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

ations d'un cercle tangent à la surface. En combinant la pre-
ıe ces équations avec celle de la surface, on a les développe-
léjà donnés

$$\left\{ \begin{aligned} y &= nx + ma_2x^2 + ma_3x^3 + \ldots, \\ z &= a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

avoir l'équation qui définit les points d'intersection du
et de la surface, il faut porter ces valeurs de y et z dans la
des équations (39), qui peut s'écrire

$$x^2(1 + n^2) + 2mnxz + z^2(1 + m^2) - 2Rz = 0.$$

donc

$$\begin{aligned} x^2(1 + n^2 - 2Ra_1) + (2mna_2 - 2Ra_3)x^3 \\ + x^4[(1 + m^2)a_2^2 + 2mna_3 - 2Ra_4] + \ldots = 0. \end{aligned}$$

que le cercle soit osculateur, il faut que l'on ait

$$1 + n^2 = 2Ra_2,$$

et cette équation, donnant une valeur de R indépendante de m, établit le théorème de Meusnier.

Pour que le cercle ait un contact du troisième ordre, il faut que l'on ait

$$1 + n^2 = 2 R a_2,$$
$$mna_2 = R a_3.$$

Éliminons R, et remplaçons a_2, a_3 par leurs valeurs; nous obtiendrons l'équation

$$(41) \qquad 2mn\varphi_2^2 = (\varphi_3 + m\varphi_2\varphi_2')(1 + n^2).$$

Cette équation, établissant une relation entre m et n, définit tous les plans coupant la surface suivant des courbes ayant *un sommet* à l'origine. On peut l'écrire

$$(42) \qquad m\varphi_2[2n\varphi_2 - (1 + n^2)\varphi_2'] - \varphi_3(1 + n^2) = 0.$$

Sous cette forme on voit facilement que le coefficient de $m\varphi_2$ est du second degré seulement. L'équation représente donc un cône de cinquième classe ayant le plan tangent pour plan quadruple. Ainsi :

Les plans qui coupent la surface suivant des sections surosculées par des cercles au point O *enveloppent un cône de cinquième classe admettant le plan tangent pour plan quadruple. En d'autres termes, il en passe cinq par un point quelconque de l'espace et un seul par une des tangentes de la surface.*

On peut écrire l'équation du cône en rétablissant l'homogénéité. Remplaçons n par $\frac{y}{x}$, m par $\frac{z}{x}$; l'équation du plan sécant deviendra

$$(43) \qquad zZ + yX - xY = 0,$$

et l'équation (42) prendra la forme

$$(44) \qquad z\varphi_2(x, y)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) = \varphi_3(x, y)(x^2 + y^2).$$

Sous cette forme on voit que les quatre génératrices de contact du cône et du plan tangent sont les deux tangentes asymptotiques et les deux tangentes principales.

cas des surfaces enveloppes de sphères, $\varphi_3(x, y)$ admet
· une des directions principales et le cône se réduit à la
classe. Pour la cyclide de Dupin, le cône se réduit à
ie classe, les deux directions principales étant en facteur
:, y). Il en est de même dans le cas des surfaces du second
is pour une raison différente, φ_3 étant divisible par φ_2.
sé de voir que le lieu des normales aux cercles situés dans
is sera en général un cône du quatrième ordre, dont
sera

$$z\varphi_3(y, -x) = \varphi_2(y, -x)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right).$$

de ce cône s'abaissera dans les mêmes cas et de la même
que la classe du cône précédent.
herchons le lieu de tous les cercles surosculateurs, et pour
supposerons qu'on ait pris pour axes des x et des y les
principales; alors

$$\varphi_2(n) = \alpha + \beta n^2,$$
$$\varphi_3(n) = a + bn + cn^2 + dn^3,$$

ıtions du cercle seront

$$\left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - z\frac{1 + n^2}{\alpha + \beta n^2} = 0, \\ & \frac{\varphi_3(1 + n^2)}{2\varphi_2 n(\alpha - \beta)} z + nx - y = 0. \end{aligned}\right.$$

es équations il faudra éliminer n, ce qui se fait sans diffi-

pour abréger,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\mathrm{U} = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) - z,$$
$$\mathrm{V} = \beta(x^2 + y^2 + z^2) - z.$$

ıations

$$\mathrm{U} = 0, \quad \mathrm{V} = 0$$

:ront les sphères principales, et l'on aura

$$n^2 = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}.$$

La seconde des équations (45) peut s'écrire

$$(a + cn^2)\rho^2 + 2(\alpha - \beta)n^2 x = n[2y(\alpha = \beta) - b - dn^2].$$

Si l'on y remplace n par sa valeur, on aura

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{l} [(a\mathrm{V} - c\mathrm{U})\rho^2 - 2(\alpha - \beta)x\mathrm{U}]^2\mathrm{V} \\ \quad + \mathrm{U}[d\mathrm{U} - b\mathrm{V} - 2y\mathrm{V}(\beta - \alpha)]^2 = 0, \end{array}\right.$$

équation du dixième degré qui représente une surface ayant pour ligne triple la courbe

$$\mathrm{U} = 0, \quad \mathrm{V} = 0$$

ou

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 0,$$

et pour ligne double la courbe (K) du sixième ordre représentée par les équations

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a\mathrm{V} - c\mathrm{U})\rho^2 + 2(\beta - \alpha)x\mathrm{U} = 0, \\ (d\mathrm{U} - b\mathrm{V})\rho^2 + 2(\alpha - \beta)y\mathrm{V} = 0, \end{array}\right.$$

la solution $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$ étant exclue.

Cette surface est évidemment unicursale, et elle est la transformée par rayons vecteurs réciproques, par rapport au point O, d'une surface réglée du cinquième ordre.

Mais c'est surtout la ligne double qu'il est intéressant d'étudier; elle est définie par les équations (47), qui montrent sans difficulté qu'elle est la réciproque d'une cubique gauche par rapport au point O.

En effet, si l'on emploie les formules

$$\frac{x}{\rho^2} = kx', \quad \frac{y}{\rho^2} = ky', \quad \frac{z}{\rho^2} = kz',$$

ces équations deviennent

$$a(\beta - kz') - c(\alpha - kz') + 2(\beta - \alpha)(a - kz')x' = 0,$$
$$d(\alpha - kz') - b(\beta - kz') + 2(\alpha - \beta)(\beta - kz')y' = 0.$$

Voici quelle est l'origine de cette courbe. Prenons une sphère quelconque tangente en O à la surface. Cette sphère coupera la surface (S) suivant une courbe ayant en O deux tangentes symétriques par rapport aux directions principales. Les sections déterminées par les

passant par ces deux tangentes auront leurs cercles oscula-
sur la sphère considérée. Il y en aura deux, une pour chaque
nte, qui seront surosculées par leurs cercles osculateurs; ces
cercles se coupent au point O et en un autre point qui décrit
ne double précédente.

résulte de là une propriété remarquable de cette ligne
le (K) : par chaque point de cette courbe il passe deux cercles
ınt la surface en quatre points confondus. Si donc on trans-
: la surface par rayons vecteurs réciproques en prenant,
pòle un point de la courbe double, ces deux cercles se trans-
›ront en droites tangentes qui couperont la surface en quatre
s confondus. En d'autres termes, les tangentes asymptotiques
surface transformée la couperont en quatre points confondus;
e qui est la même chose, il y aura des surfaces du second degré
t avec la transformée un contact complet du troisième ordre.
i :

: lieu des pôles des inversions qui transforment une sur-
(S) *en une autre ayant au point homologue d'un point déter-*
: O *de* (S) *un contact du troisième ordre avec une surface du*
ıd degré est une courbe du sixième ordre qui est l'inverse,
rapport au point O, *d'une cubique gauche.*

est là un résultat intéressant et dont nous aurons à faire usage.
ıns le cas où le point O est un ombilic, l'équation du cône (42)
duit à

$$\varphi_3(1+n^2)=0.$$

s, tous les plans passant par une des droites représentées par
ation

$$\varphi_3=0$$

eront effectivement l'unique sphère principale ayant avec la
ce un contact du second ordre, suivant des cercles coupant la
ce en quatre points consécutifs.

ıant aux plans passant par les droites de coefficient angulaire
ils ne peuvent donner de véritable cercle et ils doivent être
és.

VII.

Cherchons maintenant les cercles qui coupent la surface au point O, en cinq points consécutifs. Pour cela, il faudra joindre aux deux équations déjà obtenues la suivante :

$$2mna_3+(m^2+1)a_2^2=2Ra_4.$$

Éliminant R et réduisant, nous avons

$$(48)\quad (1+m^2)\varphi_2^4=(1+n^2)\left[\varphi_2\varphi_4-\varphi_3^2+m\varphi_2(\varphi_2\varphi_3'-\varphi_3\varphi_2')+\frac{m^2}{2}\varphi_2^2\varphi_2''\right].$$

Si l'on élimine m entre cette équation et l'équation (42), on arrive à un résultat qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(48\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &[\varphi_2^3-(1+n^2)\varphi_4][2n\varphi_2-(1+n^2)\varphi_2']^2\\ &\quad+[3n\varphi_3-(1+n^2)\varphi_3'][2n\varphi_2-(1+n^2)\varphi_2']\varphi_3(1+n^2)\\ &\quad+\varphi_3^2(1+n^2)\Big[\varphi_2(1-n^2)-\frac{\varphi_2''}{2}(1+n^2)^2\\ &\qquad\qquad\qquad+n\varphi_2'(1+n^2)\Big]=0.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que cette équation est du dixième degré. En introduisant l'homogénéité et remplaçant n par $\frac{y}{x}$, elle devient

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &[\varphi_2^3(x,y)-(x^2+y^2)\varphi_4]\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2\\ &\quad+\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)(x^2+y^2)\varphi_3\\ &\quad+(x^2+y^2)\varphi_3^2(x,y)\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)(x^2-y^2)\right.\\ &\qquad\qquad\qquad\left.+2xy\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, il y a dix cercles surosculateurs passant en un point simple de la surface. Leurs traces sur le plan tangent sont déterminées par l'équation précédente.

Je dis qu'il ne saurait y en avoir davantage si le point n'est pas

ı ombilic. En effet, pour que l'équation précédente soit vérifiée entiquement, il faut que le seul terme de cette équation qui ne ntienne pas le facteur x^2+y^2,

$$\varphi_2^3(x, y)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right),$$

it exactement divisible par x^2+y^2. Le second facteur, égalé à ro, donne les directions principales, nécessairement rectangu-ires; il ne peut admettre le diviseur x^2+y^2. Il faut donc que φ_2^3 ı φ_2 soit divisible par x^2+y^2, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi_2 = k(x^2+y^2),$$

qui exprime que le point est un ombilic.

Mais alors, nous l'avons vu, l'équation du cône (42) se réduit à

$$\varphi_3(1+n^2) = 0,$$

, en supprimant le facteur $(1+n^2) = 0$, qui ne donne aucune ritable solution, à

$$\varphi_3 = 0.$$

L'équation (48) se réduit alors à la suivante,

$$\varphi_4 - k^3(1+n^2)^2 = mk(1+n^2)\varphi_3',$$

i, jointe à l'équation

$$\varphi_3 = 0,$$

termine les véritables cercles coupant la surface en cinq points afondus; ces cercles sont, en général, au nombre de trois, cepté dans les cas suivants :

Si une racine de φ_3 est double et si la valeur correspondante de m indéterminée, il y aura une infinité de cercles correspondants à te racine, c'est-à-dire ayant la même trace sur le plan tangent.

En second lieu, si φ_3 est identiquement nul, c'est-à-dire si la face a un contact du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé se une sphère, il pourra évidemment y avoir une infinité de cles, tous situés sur cette sphère et coupant la surface en cinq plus de cinq points consécutifs.

Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Si en un point simple d'une surface il passe plus de dix cercles coupant la surface en cinq points consécutifs réunis en ce point, ce point est un ombilic.

Il n'existe pas de surface admettant plus de dix séries de sections circulaires.

Car tous les points d'une telle surface devraient être des ombilics.

On peut ajouter que, si une surface contient dix séries distinctes de sections circulaires, elle ne saurait être une surface enveloppe de sphères, car alors φ_3 et $x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ auraient un facteur commun, et l'équation (49) aurait une racine double correspondante à ce facteur. Par la même raison, on voit qu'aucun des cercles ne sera tangent à une section principale.

VII.

Nous pouvons maintenant démontrer que toute surface qui admet dix séries de sections circulaires est nécessairement une cyclide. En effet, si les dix cercles définis par l'équation (48 *bis*) appartiennent à la surface, ils pourront être considérés comme la coupant au moins en six points confondus en O, et, par conséquent, la valeur de m qui leur correspond, et qui est définie par l'équation (42), devra satisfaire aussi à l'équation (34), qui exprime que la conique de section par le plan

$$mz + nx - y = 0,$$

conique qui, ici, est un cercle, coupe en six points confondus au point O. On est ainsi conduit à l'équation

$$(50)\quad \begin{cases} A[2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2]^2 \\ \quad + B\varphi_3(1+n^2)[2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2] + C\varphi_3^2(1+n^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation du treizième ordre devra admettre toutes les racines de l'équation du dixième ordre (48 *bis*). Au lieu d'effectuer le calcul auquel on serait ainsi conduit, je vais employer l'artifice suivant.

Considérons la sphère contenant l'un des cercles (C) et tangente
ı O à la surface. La section de la surface par cette sphère aura
ı point double en O. L'une des tangentes en ce point double sera
tangente au cercle (C). L'autre tangente, symétrique de la pre-
ière par rapport aux directions principales, en sera nécessaire-
ent distincte, et par cette tangente il passera un cercle (C') cou-
ınt la surface en cinq points confondus. Ce cercle sera évidemment
:ué sur la même sphère que le cercle (C), et il coupera ce cercle
:) en un point M différent du point O, et qui appartiendra à la
urbe (K), considérée au § V. Si donc on transforme la sur-
ce proposée (S) par inversion, en prenant ce point M pour pôle
: l'inversion, elle se transformera en une surface (S') qui contiendra
aintenant une de ses tangentes asymptotiques, et pour laquelle
sera divisible par φ_2.

Nous allons introduire cette double hypothèse dans les équations
ɔonsidérer.

Supposons que l'on prenne pour axe des y cette tangente asym-
otique, qui fait partie de la surface; on aura

$$\varphi_2 = A(hx^2 + xy),$$
$$\varphi_3 = \varphi_1 \varphi_2.$$

'uant à φ_4, φ_5, ils seront divisibles par x. Donc, quand on rempla-
:ra x par 1, y par n, la fonction φ_i sera de degré $i - 1$ en n. On
ıra

$$\varphi_2(n) = A(n + h).$$

n peut même, en prenant une surface semblable à la proposée,
:mplacer A par l'unité et poser

$$\varphi_2(n) = n + h.$$

n aura

$$\varphi_3 = \varphi_2(\alpha + \beta n) = \varphi_2 u_1,$$

il résulte de l'expression (35) de C que C sera nul.

Mais alors l'équation (48 *bis*) se réduira à une équation du
:uvième degré, la racine qui devient infinie correspondant au
rcle changé en tangente asymptotique; quant à l'équation (50),
ı l'on peut supprimer le facteur

$$2n\varphi_2 - (1 + n^2)\varphi'_2,$$

qui définit les directions principales, elle se réduira à la suivante,

$$(51) \qquad A[2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2] + B\varphi_3(1+n^2) = 0,$$

qui n'est plus que du huitième degré et qui, devant admettre toutes les racines de l'équation (48 *bis*), *devra avoir lieu identiquement*.

Par suite, le facteur $2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2$ devra diviser

$$B\varphi_3(1+n^2).$$

Comme il ne peut, nous l'avons vu, diviser $(1+n^2)$ ni φ_3 tant que la surface n'est pas une enveloppe de sphères, il faudra qu'il divise B.

Or on a

$$B = \varphi_2^4 \frac{d}{dn} \frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}$$

ou, en remplaçant φ_3 par sa valeur,

$$B = \varphi_2^4 \frac{d}{dn} \frac{\varphi_4 - u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}.$$

D'ailleurs,

$$2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2 = n^2 + 2nh - 1 = \varphi_2^2 - 1 - h^2.$$

On devra donc avoir identiquement

$$\varphi_2^4 \frac{d}{dn}\left(\frac{\varphi_4 - u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right) = (\varphi_2^2 - 1 - h^2)(l\varphi_2^2 + l'\varphi_2 + l''),$$

ou encore

$$\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{\varphi_4 - u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right) = l + \frac{l'}{\varphi_2} + \frac{l'' - l(1+h^2)}{\varphi_2^2} - \frac{(1+h^2)l'}{\varphi_2^3} - \frac{(1+h^2)l''}{\varphi_2^4}.$$

Le premier membre contiendra en dénominateur au plus la troisième puissance de φ_2. Il faut donc que l'on ait

$$l'' = 0.$$

D'ailleurs, le second membre étant la dérivée d'une fonction algébrique de φ_2, il faut aussi que l' soit nul. Il restera donc

$$\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{\varphi_4 - u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right) = l - \frac{l(1+h^2)}{\varphi_2^2},$$

et en intégrant on voit tout de suite que φ_4 doit être divisible par φ_2.

Si maintenant nous nous reportons à l'équation (51), nous voyons que tous les termes de cette équation, sauf $\varphi_2^2\varphi_5$, sont divisibles par φ_2^3. Il faut donc également que φ_5 soit divisible par φ_2.

On voit donc que la seconde tangente asymptotique, comme la première, coupera la surface en six points confondus en O, et, par conséquent, elle sera l'un des dix cercles qui coupent la surface en six points confondus : c'est d'ailleurs ce que montre bien aussi l'équation (48 *bis*), dont le premier membre devient divisible par la première puissance de φ_2.

En nous reportant à la surface (S) nous voyons que tout cercle passant au point O sera coupé en deux points par un des neuf autres cercles qui passent au même point; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Quand une surface admet dix séries de sections circulaires, chacun des cercles passant en un point O *est coupé en deux points par un autre cercle de la surface passant au même point.*

Cette proposition va nous dispenser de toutes les intégrations qu'il y aurait à faire pour trouver la surface (S), ou du moins elle va nous permettre de les faire sous une forme géométrique.

Considérons, en effet, un cercle (C) de la surface et tous les cercles (Γ), (Γ′), ... qui le rencontrent en deux points. Il est clair que, lorsque le cercle (C) se déplacera d'une manière continue sur la surface, il ne cessera pas de rencontrer (Γ), (Γ′), ... En effet, considérons l'un quelconque des cercles (Γ). Il est coupé par le cercle (C) en deux points M, M′. Le cercle qui le coupera en deux points, dont l'un sera très voisin de M, ne pourra être que très voisin du cercle (C), et, par conséquent, il constituera une position nouvelle du cercle (C), qui se déplace et se déforme en restant sur la surface.

La surface contient donc deux séries de cercles (C), (C′), ... et (Γ), (Γ′), ... telles que tout cercle de la première série coupe en deux points tout cercle de la seconde.

Or, quand un cercle rencontre deux autres cercles (Γ), (Γ′), par exemple en deux points, il est nécessairement orthogonal à la sphère unique qui coupe ces deux cercles à angle droit. Les cercles (C),

(C′), ... seront donc tous orthogonaux à une même sphère (θ), et il en sera de même des cercles de l'autre série. Les sphères qui contiendront l'un des cercles (C) et l'un des cercles (Γ) seront orthogonales à (θ).

Il suit de là que la surface cherchée est l'enveloppe d'une série de sphères (V) qui coupent à angle droit une sphère fixe (θ), et, comme elle contient deux séries de cercles orthogonaux à (θ), il faut que la surface lieu des centres des sphères (V) admette un double système de génératrices rectilignes correspondantes à toutes les sphères qui passent soit par un cercle (C), soit par un cercle (Γ). Le lieu des centres des sphères (V), devant être doublement réglé, sera donc du second degré, et la surface cherchée sera l'enveloppe des sphères coupant orthogonalement une sphère fixe et ayant leurs centres sur une surface du second degré; en d'autres termes, ce sera une cyclide générale.

Dans les raisonnements qui précèdent, nous n'avons considéré que les termes des cinq premiers ordres. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une surface admet en un point simple dix cercles la coupant en six points confondus, elle a avec une cyclide un contact du cinquième ordre.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

:HITZ (R.). — LEHRBUCH DER ANALYSIS. Erster Band. GRUNDLAGEN DER ALYSIS, 1877. 1 vol. in-8°, 594 pages.

ans ce Volume, l'auteur traite de l'Arithmétique et des élé-ts de l'Algèbre; nous indiquons ci-dessous l'ordre qui a été i, et nous terminons en résumant l'intéressante démonstration iée par M. Lipschitz du principe fondamental de la théorie des itions.

:CTION I : *Calcul des nombres déterminés.*

hapitre I : Éléments de la science des nombres entiers (p. 1- Notion du nombre entier; opérations fondamentales; nombres iiers, nombres composés; plus grand commun diviseur; bres premiers entre eux; décomposition en facteurs premiers; ieurs d'un nombre; nombres premiers à un nombre donné nférieurs à lui. Addition, soustraction, multiplication des bres entiers positifs ou négatifs.

hapitre II : Calcul des fractions (p. 23-27).

hapitre III : Calcul des puissances des nombres entiers et frac-naires; nombres rationnels et irrationnels (p. 28-60). Puis-es d'une fraction donnée; racine $n^{\text{ième}}$ arithmétique; valeurs tes; limites d'une somme, d'un produit, etc.; définition des bres rationnels et irrationnels; signification unique de la ne $n^{\text{ième}}$ arithmétique; calcul des radicaux; généralisation de la on d'exposant.

:CTION II : *Éléments d'Algèbre.*

hapitre I : Expressions entières et rationnelles; grandeurs itantes et variables (p. 61-66).

hapitre II : Fonctions rationnelles entières d'une seule va-le; équations algébriques à une seule inconnue (p. 66-295). ctions entières du premier et du second degré à une variable; ations du premier, du second degré. Introduction et calcul des ntités imaginaires; décomposition du trinôme du second degré

en facteurs du premier degré. Équations binômes; résolution de ces équations; propriétés de leurs racines; division du cercle en n parties égales; représentation géométrique des quantités imaginaires. Racines d'une équation; décomposition d'une fonction entière en facteurs du premier degré; application aux équations binômes; transformation d'une fonction entière par le changement de la variable; dérivées des fonctions entières. Équations du troisième et du quatrième degré; équations résolvantes. Fonctions symétriques; produit des carrés des différences des racines d'une équation. Démonstration de ce que toute équation algébrique entière à une inconnue admet une racine réelle ou imaginaire.

Décomposition d'une fonction entière en facteurs; plus grand commun diviseur algébrique; fractions continues arithmétiques et algébriques.

Chapitre III : Fonctions rationnelles entières à plusieurs variables (p. 296-299).

Chapitre IV : Systèmes de n fonctions linéaires à n inconnues; résolution de n équations du premier degré à n inconnues; déterminants (p. 300-350).

Chapitre V : Fonctions homogènes entières à deux variables (p. 351-359).

Chapitre VI : Formes quadratiques (p. 360-450). Formes positives à deux variables; leur représentation dans le plan d'après Gauss; leur transformation; réduction d'une forme quadratique dont le déterminant est nul à un moindre nombre de variables; formes adjointes; décomposition en carrés; formes quadratiques ternaires positives; leur représentation dans l'espace d'après Gauss. Inertie des formes quadratiques.

Section III : *De la division poursuivie indéfiniment.*

Chapitre I : Suites récurrentes (p. 451-475). Division de deux fonctions entières; progressions géométriques; division au moyen des coefficients indéterminés; suites récurrentes; décomposition d'une fraction rationnelle en fractions élémentaires; décomposition d'une série récurrente en séries élémentaires; somme des puissances semblables des racines d'une équation. Formule d'interpolation. Développements de $(1+x)^m$ en série dans le cas de m entier négatif. Sommation d'une série récurrente indéfinie.

SECTION IV : *Fonctions exponentielle, logarithmique, trigonométrique directes et inverses* (p. 476-501).

SECTION V : *Séries et produits infinis.*

Chapitre I : Propriétés générales des séries et des produits infinis (p. 502-546). Séries; convergence. Continuité d'une fonction. Addition, soustraction, multiplication des séries. Convergence des produits infinis; applications.

Chapitre II : Séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable qui représentent les fonctions fondamentales de l'Analyse (p. 547-591).

Voici maintenant, dans ses principaux traits, la démonstration donnée par M. Lipschitz du principe fondamental de la théorie des équations.

Non seulement cette démonstration prouve l'existence d'une racine pour toute équation entière, mais elle permet de construire une suite de nombres qui aient cette racine pour limite; la *méthode d'approximation,* qui constitue en quelque sorte la substance de cette démonstration, ne diffère pas, au fond, de la méthode donnée par Newton pour approcher de plus en plus d'une racine réelle; mais, si cette méthode se présentait naturellement à l'esprit, il y avait une difficulté réelle dans le choix du point de départ, de la première valeur imaginaire à laquelle on voulait appliquer la méthode pour former une suite de nombres ayant réellement une racine pour limite.

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation entière du degré n; soient

$$L_1, \ L_2, \ \ldots, \ L_n$$

les modules des coefficients

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n.$$

On fera d'abord les remarques suivantes.

Si l'on détermine un nombre R qui satisfasse aux inégalités

$$\begin{aligned} R &> (n+1)L_1, \\ R^2 &> (n+1)L_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R^n &> (n+1)L_n, \end{aligned}$$

et si l'on décrit de l'origine comme centre un cercle (R) avec le rayon R, pour un point x situé à l'extérieur de ce cercle, le module de $f(x)$ est supérieur à $\frac{R^n}{n+1}$ et celui de la fonction dérivée $f'(x)$ est supérieur à $\frac{n(n+3)}{2(n+1)}R^{n-1}$, en sorte que les racines des équations $f(x)=0, f'(x)=0$ ne peuvent être situées qu'à l'intérieur de ce cercle. On trouve tout aussi aisément des limites supérieures, dépendant de R, pour les modules des valeurs que peuvent prendre, à l'intérieur du cercle, les fonctions $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Nous désignerons dans la suite ces limites par $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Admettant maintenant que la proposition qu'il s'agit de démontrer soit vraie pour les équations de degré $n-1$, en particulier pour l'équation $f'(x)=0$, il s'agit d'établir qu'elle subsiste pour l'équation de degré $n, f(x)=0$; il suffit évidemment d'examiner le cas où aucune des racines $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ de l'équation dérivée n'annule $f(x)$; on choisira une de ces racines, η_1, telle que le module de $f(\eta_1)$ soit inférieur ou égal aux modules des quantités $f(\eta_2), f(\eta_3), \ldots, f(\eta_{n-1})$, et c'est cette racine η_1 qui constitue le premier point de départ de M. Lipschitz.

On sait depuis longtemps déduire de la quantité η_1 une autre quantité z_1 telle que le module de $f(z_1)$ soit inférieur au module de $f(\eta_1)$; il est clair qu'en procédant de cette façon l'on ne tombera jamais sur aucune des racines $\eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ de l'équation dérivée, à cause de la façon dont on a choisi η_1; M. Lipschitz précise d'ailleurs comme il suit la façon dont on déduira z_1 de η_1.

Posant $z_1 = \eta_1 + \xi$, on aura

$$f(\eta_1+\xi) = f(\eta_1) + \xi f'(\eta_1) + \frac{\xi^2}{1.2}f''(\eta_1) + \ldots + \frac{\xi^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1).$$

Le terme en $f'(\eta_1)$ est nul; plusieurs des termes suivants peuvent s'annuler aussi. Soit $f^i(\eta_1)$ la première dérivée qui n'est pas nulle; on aura

$$f(\eta_1+\xi) = f(\eta_1) + \frac{\xi^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1) + \ldots + \frac{\xi^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1).$$

Désignant maintenant par h une quantité réelle et comprise entre 0 et 1 (on restreindra davantage dans un instant les valeurs qu'on

peut attribuer à h), on déterminera ξ par l'équation binôme

$$hf(\eta_1) + \frac{\xi^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1) = 0.$$

Si ζ désigne une quelconque des racines de l'équation binôme

$$f(\eta_1) + \frac{\xi^i}{1.2\ldots i}f^i(\eta_1) = 0,$$

on aura

$$\xi = \zeta h^{\frac{1}{p}},$$

le symbole $h^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{h}$ ayant le sens arithmétique; on aura alors

$$f(\eta_1 + \xi) = f(\eta_1)(1 - h) + \lambda + i\mu,$$

$\lambda + i\mu$ étant une quantité imaginaire dont le module sera inférieur à

$$\mathrm{P}\left(h^{\frac{i+1}{i}} + h^{\frac{i+2}{i}} + \ldots + h^{\frac{n}{i}}\right),$$

où P désigne un nombre réel quelconque supérieur aux modules des quantités

$$\frac{\zeta^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}f^{i+1}(\eta_1), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta^n}{1.2\ldots n}f^n(\eta_1);$$

le module de $\lambda + i\mu$ sera donc inférieur à

$$(n - i)\mathrm{P}h^{1+\frac{1}{i}}.$$

Si donc on astreint h à satisfaire à l'inégalité

$$|f(\eta_1)| - (n - i)\mathrm{P}-h^{\frac{1}{i}} > 0 \quad (^1),$$

on aura

$$|f(\eta_1 + \xi)| < |f(\eta_1)|(1 - h) + (n - i)\mathrm{P}h^{1+\frac{1}{i}}$$

ou

$$< |f(\eta_1)| - h\left[|f(\eta_1)| - (n - i)\mathrm{P}h^{\frac{1}{i}}\right],$$

---

(1) Ici et plus loin $|a|$ désigne le module de a.

et le module de $f(z_1)$, où

$$z_1 = \eta_1 + \zeta h^{\frac{1}{i}}$$

sera bien inférieur à celui de $f(\eta_1)$. On partira maintenant de la valeur z_1 et on la traitera de la même façon; seulement il faut remarquer que l'équation binôme qu'on a à résoudre est maintenant du premier degré et que, si l'on continue de la même façon, il en sera toujours ainsi. Si donc on pose

$$z_2 = z_1 + \zeta_1,$$
$$\zeta_1 = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)},$$

et si l'on désigne par h_1 une quantité réelle comprise entre o et 1, satisfaisant en outre à l'inégalité

$$|f(z_1)| - (n-1)P_1 h_1 > 0,$$

P_1 désignant un nombre réel quelconque supérieur aux modules des quantités

$$\frac{\zeta_1^2}{1.2} f''(z_1), \quad \frac{\zeta_1^3}{1.2.3} f'''(z_1), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_1^n}{1.2\ldots n} f^n(z_1),$$

on aura

$$|f(z_1+\zeta_1)| < |f(z_1)| - h_1[|f(z_1)| - (n-1)P_1 h_1],$$

et le module de $f(z_2)$ sera bien inférieur à celui de $f(z_1)$; on continuera de la même façon, et l'on obtiendra ainsi une suite de quantités

$$z_2, \ \zeta_2, \ h_2, \ P_2,$$
$$z_3, \ \zeta_3, \ h_3, \ P_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

analogues à z_1, ζ_1, h_1, P_1. Nous montrerons tout à l'heure que les quantités P_1, P_2, P_3, ... peuvent être prises inférieures à un nombre positif Q, convenablement déterminé; rien n'empêche dès lors de prendre toutes ces quantités égales à Q. Si maintenant on désigne par δ_1, δ_2, δ_3, ... les modules des quantités $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$, ..., et si l'on prend

$$h_1 = \frac{\delta_1}{2(n-1)Q}, \quad h_2 = \frac{\delta_2}{2(n-1)Q}, \quad \ldots,$$

on aura

$$\delta_2 = \delta_1 \left[1 - \frac{\delta_1}{4(n-1)Q} \right],$$

$$\delta_3 = \delta_2 \left[1 - \frac{\delta_2}{4(n-1)Q} \right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

d'où

$$\delta_m = \delta_1 \left[1 - \frac{\delta_1}{4(n-1)Q} \right] \left[1 - \frac{\delta_2}{4(n-1)Q} \right] \cdots \left[1 - \frac{\delta_{m-1}}{4(n-1)Q} \right],$$

et l'on en conclut de suite qu'on peut prendre l'indice m assez grand pour que, pour cet indice et les indices supérieurs, on ait

$$\delta_m < \delta,$$

quelque petit que soit le nombre δ.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, les quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}$, qui forment une suite décroissante, seraient toutes supérieures à δ, en sorte que l'on aurait

$$\delta_m < \delta_1 \left[1 - \frac{\delta}{4(n-1)Q} \right]^{m-1}.$$

Or le second membre, lorsque m augmente indéfiniment, tend vers zéro.

Lors donc que m augmente indéfiniment, il est certain que le module de $f(z_m)$ tend vers zéro.

Il reste à prouver ce qui a été admis relativement aux nombres $P_1, P_2, \ldots$, à savoir qu'ils peuvent être regardés comme inférieurs à un nombre déterminé Q; P_m, par exemple, est assujetti à être plus grand que le plus grand des modules des quantités

$$\frac{\zeta_m^2}{1.2} f''(z_m), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_m^n}{1.2\ldots n} f^{n}(z_m).$$

Or, d'une part, les modules des quantités

$$f''(z_m), \quad \ldots, \quad f^n(z_m)$$

restent inférieurs aux quantités

$$\varphi'', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)},$$

et cela quel que soit l'indice m, puisque les points $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ restent toujours à l'intérieur du cercle (R); d'un autre côté,

$$\zeta_m = -\frac{f(z_{m-1})}{f'(z_{m-1})}$$

a un module qui reste inférieur à une quantité déterminée : d'une part, en effet, le module du numérateur est inférieur à φ; de l'autre, on peut décrire des points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ comme centres, avec des rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ suffisamment petits, des cercles tels que les points $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ ne se trouvent jamais à l'intérieur de l'un de ces cercles; ces rayons, en effet, peuvent être pris assez petits pour que, dans l'intérieur du cercle décrit de η_k comme centre, par exemple, le module de $f(z)$ diffère aussi peu qu'on le veut du module de $f(\eta_k)$, et, en particulier, en diffère d'une quantité moindre que

$$|f(\eta_1)| - |f(z_1)|,$$

quantité qui, elle-même, est moindre que

$$|f(\eta_k)| - |f(z_m)|.$$

Le point z_m sera donc à l'extérieur de ce cercle; il en résulte que le module de $f'(z_{m-1})$ ou de $n(z_{m-1}-\eta_1)(z_{m-1}-\eta_2)\ldots(z_{m-1}-\eta_n)$ est inférieur à

$$n\rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1} = \psi,$$

et par conséquent, enfin, les modules des quantités

$$\frac{\zeta_m^2}{1.2}f''(z_m), \quad \ldots, \quad \frac{\zeta_m^n}{1.2\ldots n}f^n(z_m)$$

restent toujours inférieurs à un nombre déterminé Q.

La suite des égalités

$$\zeta_1 = -\frac{f(z_1)}{f'(z_1)},$$
$$\zeta_2 = -\frac{f(z_2)}{f'(z_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\zeta_m = -\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}$$

prouvent que les modules des quantités $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_m$, tendent vers

zéro avec $\frac{1}{m}$, puisqu'il en est ainsi des modules des quantités

$$f(z_1),\ f(z_2),\ \ldots,\ f(z_m),\ \ldots$$

et que les modules des quantités

$$f'(z_1),\ f(z_2),\ \ldots,\ f'(z_m),\ \ldots$$

restent supérieurs à ψ.

On peut enfin remarquer qu'on peut pousser les opérations assez loin pour que, à partir d'un certain moment, on puisse prendre toujours les quantités h égales à l'unité; à partir de ce moment, on applique réellement la méthode d'approximation de Newton.

Si, en effet, on se reporte à l'égalité

$$f(z_p + \xi_p) = f(z_p) + \xi_p f'(z_p) + \frac{\xi_p^2}{1.2} f''(z_p) + \ldots + \frac{\xi_p^n}{1.2\ldots n} f^n(z_p),$$

on voit qu'on pourra prendre

$$\xi_p = \zeta_p = -\frac{f(z_p)}{f'(z_p)},$$

pourvu que le module de

$$\frac{\zeta_p^2}{1.2} f''(z_p) + \ldots + \frac{\zeta_p^n}{1.2\ldots n} f^n(z_p)$$

soit inférieur au module δ_p de $f(z_p)$. Or, puisque les quantités δ_p décroissent constamment et indéfiniment avec $\frac{1}{p}$, on peut prendre l'indice p assez grand pour que l'on ait

$$\left(\frac{\delta_p}{\psi}\right) \frac{\varphi''}{1.2} + \ldots + \left(\frac{\delta_p}{\psi}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{(n)}}{1.2\ldots n} < c\psi,$$

c étant un nombre réel quelconque compris entre 0 et 1; s'il en est ainsi, on aura

$$|f(z_p + \zeta_p)| < c\psi|\zeta| < c|f(z_p)|,$$

et cette inégalité subsistera pour les valeurs de l'indice supérieures à p.

Si donc on prend $z_{p+1} = z_p + \zeta_p + \ldots$, on aura

$$\delta_{p+1} < c\delta_p,$$
$$\delta_{p+2} < c\delta_{p+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on déduit immédiatement que les quantités

$$\delta_{p+1},\ \delta_{p+2},\ \delta_{p+3},\ \ldots$$

tendent vers zéro quand l'indice augmente indéfiniment.

Maintenant on a

$$z_{p+m} = z_p + \zeta_p + \zeta_{p+1} + \ldots + \zeta_{p+m};$$

d'ailleurs,

$$|\zeta_{p+1}| < \frac{\delta_p}{\psi},$$
$$|\zeta_{p+2}| < \frac{\delta_{p+1}}{\psi} < \frac{c\delta_p}{\psi},$$
$$|\zeta_{p+3}| < \frac{c^2\delta_p}{\psi},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|\zeta_{p+m}| < \frac{c^{m-1}\delta_p}{\psi},$$
$$|\zeta_p + \zeta_{p+1} + \ldots + \zeta_{p+m}| < \frac{\delta_p}{\psi}\,\frac{1}{1-c},$$

et l'on voit qu'on peut toujours prendre p assez grand pour que le module de la différence $z_{p+m} - z_p$ soit, quelque grand que soit m, inférieur à une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Les termes de la suite

$$z_p,\ z_{p+1},\ \ldots,\ z_{p+m},\ \ldots$$

tendent donc, quand l'indice augmente indéfiniment, vers une certaine limite z, et il est clair que le module de $f(z)$ est nul. La proposition est donc démontrée.

C. SCHILLING. — SUR LA SURFACE MINIMA DE CINQUIÈME CLASSE (¹).

Dans le Mémoire *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich null ist*, M. Weierstrass s'est occupé de ce problème : *Trouver toutes les surfaces minima qui sont algébriques et d'une classe déterminée* (²).

Ce problème, dans le cas où la classe de la surface est un nombre premier ou le double d'un nombre premier, a été résolu par M. Sophus Lie dans deux Mémoires où la méthode employée diffère dans une certaine mesure de celle de M. Weierstrass (³).

Dans le cours de ses recherches, M. Lie donne une preuve nouvelle du théorème établi par M. Henneberg (⁴), relativement à la non-existence de surfaces minima réelles de classe inférieure à la cinquième.

M. Weierstrass a annoncé oralement l'existence d'une surface minima de la cinquième classe, et fait cette remarque, que l'on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.

M. Henneberg est parvenu à la même surface (⁵) en cherchant à déterminer la surface minima qui admet pour lignes géodésiques les développées de la parabole. Il a montré plus tard qu'elle était de la cinquième classe (⁶). Il a démontré ensuite de deux façons différentes que cette surface est du dix-septième ordre. M. Lie a donné au contraire le nombre 15 pour l'ordre de cette surface : la suite de ce travail confirme cette détermination.

Dans ce qui suit, on se propose d'établir les points principaux des recherches de M. Lie, en modifiant d'ailleurs la méthode d'exposition, et l'on s'occupe particulièrement de la recherche de la surface minima de la cinquième classe.

(¹) Ce qui suit a été, pour la majeure partie, traduit du Mémoire de M. Schilling; plusieurs passages ont été abrégés ou légèrement modifiés.

(²) *Monatsberichte der Berl. Akad. d. Wissenschaften*, p. 612-619; 1866.

(³) *Mathem. Annalen*, t. XIV, p. 331-416, et t. XV, p. 463-506.

(⁴) *Annali di Matem.*, 2ᵉ série, t. IX, p. 54-57; *Bestimmung der niedrigsten Klassenzahl der algebraischen Minimalflächen.*

(⁵) *Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene Curve zur geodätischen Linie haben.* Zurich, 1875.

(⁶) *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellsch. in Zürich*, Jahrg. 21, p. 66-70 : *Ueber diejenige Minimalfläche*, etc.

ÉTABLISSEMENT DE QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES ; LEMMES CONCERNANT LES SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES.

I. *Recherches générales ; définition des courbes minima.* — Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point, t une variable réelle, et

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t)$$

les équations d'une courbe, où φ, ψ, χ désignent des fonctions analytiques de t ; soient de même

$$x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau), \quad z = \chi_2(\tau)$$

les équations d'une seconde courbe ; les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau), \\ y &= \psi_1(t) + \psi_2(\tau), \\ z &= \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{aligned} \right.$$

représenteront une surface engendrée par le mouvement de translation de l'une des deux courbes le long de l'autre.

Dans le cas où t et τ désignent des variables imaginaires, M. Lie conserve le nom de *surface* à la figure analytique définie par les équations (1).

Une suite de restrictions convenables permet de réduire cette *surface* à une surface minima réelle.

On suppose d'abord que l'on a

$$[\varphi'_1(t)]^2 + [\psi'_1(t)]^2 + [\chi'_1(t)]^2 = 0,$$
$$[\varphi'_2(\tau)]^2 + [\psi'_2(\tau)]^2 + [\chi'_2(\tau)]^2 = 0,$$

et l'on obtient alors une *surface analytique* qui satisfait aux équations qui, d'après Monge, définissent les surfaces minima.

M. Lie désigne sous le nom de *courbes minima* les courbes pour lesquelles on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

La seconde restriction consiste à prendre pour t et τ des valeurs conjuguées et pour les fonctions φ_2, ψ_2, χ_2 les fonctions conjuguées

de φ_1, ψ_1, χ_1; les équations de M. Lie coïncident alors avec les équations données par M. Weierstrass et représentent toutes les surfaces minima réelles.

Les équations (1), dont la signification est ainsi restreinte, correspondent aux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int (1-s^2)\,\mathrm{F}(s)\,ds + \int (1-s_1^2)\,\mathrm{F}_1(s_1)\,ds_1, \\ y = i\displaystyle\int (1+s^2)\,\mathrm{F}(s)\,ds - i\int (1+s_1^2)\,\mathrm{F}_1(s_1)\,ds_1, \\ z = \displaystyle\int 2s\,\mathrm{F}(s)\,ds \qquad + \int 2s_1\,\mathrm{F}_1(s_1)\,ds_1, \end{cases}$$

écrites avec les notations de M. Weierstrass et où, comme dans le Mémoire de ce dernier, $\mathrm{F}(s)$ désigne une fonction analytique de s et $\mathrm{F}_1(s_1)$ la fonction conjuguée de la variable conjuguée s_1.

Les recherches de M. Weierstrass ont montré que, pour obtenir une surface minima algébrique, il était nécessaire et suffisant de prendre pour $\mathrm{F}(s)$ la dérivée troisième d'une fonction algébrique de s; $\mathrm{F}_1(s_1)$ a, par suite, une détermination analogue. On parvient aussi, par une voie semblable, en partant des équations (1), aux surfaces minima algébriques, en prenant pour φ_1, ψ_1, χ_1 comme pour φ_2, ψ_2, χ_2 des fonctions algébriques des variables.

II. *Fondements des recherches de M. Lie. Définition et nature des surfaces doubles.* — L'idée fondamentale des recherches de M. Lie consiste à effectuer analytiquement, en quelque sorte, dans le cas où les variables t et τ sont imaginaires, les opérations qui, comme la translation d'une courbe, la génération d'une surface par la translation d'une courbe le long d'une autre courbe, n'ont de sens géométrique que dans le cas où l'on a affaire à des variables réelles.

Soit donc

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \chi_1(t)$$

une courbe minima; la translation (au sens analytique) de cette courbe le long d'une autre courbe minima

$$x = \varphi_2(\tau), \quad y = \psi_2(\tau), \quad z = \chi_2(\tau)$$

engendrera la surface minima réelle.

Avec les notations de M. Weierstrass, les équations d'une courbe minima sont

$$x = \int (1 - s^2) F(s)\, ds,$$

$$y = i \int (1 + s^2) F(s)\, ds,$$

$$z = \int 2s\, F(s)\, ds.$$

En donnant aux trois intégrales une même limite inférieure s_0, on obtient une courbe spéciale du faisceau, qui peut être regardée comme le type de toutes les courbes de ce faisceau.

Dans ce mode de représentation, par chaque point d'une courbe minima de première espèce passe une courbe minima de seconde espèce. En général, on doit concevoir les deux faisceaux de courbes comme distincts et comme constituant, pour ainsi dire, un réseau uniforme sur la surface; mais il peut se faire que la translation des courbes d'un faisceau le long d'une courbe de l'autre fasse coïncider les deux faisceaux, en sorte que chaque courbe minima d'un faisceau coïncide avec une courbe minima de l'autre faisceau et que les deux faisceaux n'en fassent plus, en réalité, qu'un seul. Les surfaces minima de cette nature ont reçu de M. Lie la dénomination de *surfaces doubles*.

Si l'on se trouve dans ce cas, on doit pouvoir, en désignant par t_0 et τ'_0 des valeurs convenablement choisies des deux systèmes de variables, faire correspondre ces variables de façon que l'on ait

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(\tau'_0) = \varphi_1(t_0) + \varphi_2(\tau'),$$
$$\psi_1(t) + \psi_2(\tau'_0) = \psi_1(t_0) + \psi_2(\tau'),$$
$$\chi_1(t) + \chi_2(\tau'_0) = \chi_1(t_0) + \chi_2(\tau'),$$

d'où

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(t) - \varphi_2(\tau') &= C_1, \\ \psi_1(t) - \psi_2(\tau') &= C_2, \\ \chi_1(t) - \chi_2(\tau') &= C_3, \end{aligned} \right.$$

où C_1, C_2, C_3 sont des quantités indépendantes des variables t et τ'. (La dernière de ces variables a été affectée d'un accent, parce que, dans le mode de correspondance qui nous occupe, les variables t et τ' ne sont plus conjuguées.)

En revenant aux formules de M. Weierstrass, on trouve, pour les mêmes conditions,

$$(4)\qquad \begin{cases} (1-s^2)\,F(s)\,ds = \quad (1-s_1'^2)\,F_1(s_1')\,ds_1', \\ (1+s^2)\,F(s)\,ds = -(1+s_1'^2)\,F_1(s_1')\,ds_1', \\ \qquad 2s\,F(s)\,ds = 2s_1'\,F_1(s_1')\,ds_1', \end{cases}$$

d'où

$$(5)\qquad \begin{cases} s = -\dfrac{1}{s_1'}, \\ \dfrac{1}{s^2}\,F_1\left(-\dfrac{1}{s}\right) = -s^2\,F(s). \end{cases}$$

En satisfaisant à ces conditions, on obtiendra une surface double.

Aux points s et $-\frac{1}{s}$ (ou s_1') du plan (s) correspond, sur la sphère qui est la projection stéréographique de ce plan, deux points diamétralement opposés; mais, si l'on se reporte à la relation uniforme qui lie chaque point de la surface à un point correspondant de la sphère (ayant pour coordonnées les cosinus directeurs de la normale au point de la surface minima), on voit que des normales de directions opposées correspondent au point de la surface déterminé par la valeur s de la première variable (et la valeur conjuguée s_1 de la seconde variable) et au point de la surface déterminé par la valeur $s_1' = -\frac{1}{s}$ de la seconde variable $\left(\text{et la valeur conjuguée } s' = -\frac{1}{s_1} \text{ de la première variable}\right)$; mais il résulte des conditions précédentes que les portions de surfaces qui correspondent aux domaines de ces deux points peuvent être amenées l'une sur l'autre par une translation; si elles ne coïncidaient pas effectivement, la surface serait périodique et par conséquent transcendante, cas que nous excluons. Ainsi, ces deux portions de surface (pour lesquelles les directions des normales sont opposées) coïncident, mais doivent être regardées comme appartenant à des faces opposées de la surface minima; par suite :

De toute surface double minima algébrique on peut détacher une portion finie telle qu'on puisse passer par un chemin continu d'une face à l'autre, sans traverser le contour.

... de la réalité de ces f

... équations algébriques.

...

... minima quelconque une

... par tous les points d

... courbes minima qui passe

... passent par un même po

...

... un point quelcon

... par ce point toutes les tang

... forme le cône ou cylind

... mené du point π tang

... classe de la surface sera la classe

... aussi tangente à une courbe m

... une courbe minima du secon

... le plan tangent en un point quelc

... coupera le cercle imaginaire à l'inf

... correspondent les deux tangentes aux

... par ce point de la surface.

... l'ensemble des surfaces formées p

... minima K, du premier faisceau; soit

... imaginaire à l'infini pour l'une quelconq

... pourra mener M tangentes parall

... faisceau. Si l'on effectue mainten

---

mouvement de translation qui a été expliqué au début, on voit que, par ce mouvement, chacune de ces tangentes engendre un cône (ou cylindre) circonscrit à la surface minima le long d'une courbe du second faisceau; le nombre de ces cônes circonscrits est ainsi M; à ces M cônes correspondent M′ cônes circonscrits à la surface le long des courbes du premier faisceau, en désignant par M′ le degré de multiplicité du cercle imaginaire à l'infini pour une surface engendrée par les tangentes à une courbe du second faisceau.

La classe d'un cône pris isolément est égale au nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par une droite passant par le sommet du cône non singulière; elle est ainsi égale, dans ce cas, au rang de la courbe minima (c'est-à-dire au degré de la surface des tangentes à cette courbe), diminué de la multiplicité du point π, relativement à la surface des tangentes.

Soient donc R et R′ les rangs des courbes des deux faisceaux; on a M cônes de la classe R′ — M′ et M′ cônes de la classe R — M.

La classe de la surface minima est

$$M'(R - M) + M(R' - M').$$

Si la surface minima est réelle, les deux faisceaux de courbes minima sont conjugués et l'on a

$$R = R', \quad M = M';$$

la classe est $2M(R - M)$.

Si, en particulier, la surface minima est une surface double, on parviendra par un raisonnement analogue à M cônes circonscrits de la classe R — M; la classe de la surface est donc $M(R - M)$.

Il suit de là que les surfaces minima algébriques dont la classe est impaire, et en particulier un nombre premier, sont des surfaces doubles.

Puisqu'il n'existe pas de courbe dont le rang soit inférieur à 4 et que les surfaces minima de classes 3 et 4 sont toujours imaginaires, comme l'a montré M. Lie, on voit que la classe la moins élevée possible pour les surfaces minima réelles est 5.

L'ordre d'une surface minima déterminée par les équations

$$(6)\quad \begin{cases} x = \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau), \\ y = \psi_1(t) + \psi_2(\tau), \\ z = \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{cases}$$

A chaqu... ...rsection... la
détermin...
concevo...
nation ...

III. ...ant des va... ...ordres de... ...ima.
classe ... la surface ...
ce qu...
géom...
tant
(...) ... communs aux deux ... situés

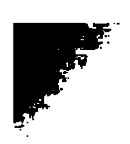
... $m_1 = m_2 = m$ et l'ordre est
... surface double, il est

... être regardé comme
... nima dont les con-
...

... classe des courbes
... ne fournit
... général les
... donné un

... les coor-
... suite aussi
... de ... in-
... point
... valeur

... sales.
... fonc-



Si C_n, où $n > 0$, est différent de zéro, x, y, z sont infinis en même temps que s, et la valeur $s = \infty$ appartient aux valeurs singulières; on évite cette circonstance par une rotation convenable du système d'axes coordonnés. En général, les formules n'entraînent aucune particularisation, quand on y suppose tous les C nuls et que, par suite, on augmente q d'une unité.

Les coordonnées x, y, z devant être des fonctions rationnelles de s, il doit en être de même des trois premières intégrales de $F(s)$, au moyen desquelles x, y, z s'expriment rationnellement; il en résulte que pour toutes les valeurs de k on doit avoir

$$A_1^k = 0, \quad A_2^k = 0, \quad A_3^k = 0.$$

Ainsi, la fonction $F(s)$ doit, pour les valeurs de s qui la rendent infinie, être infinie du quatrième ordre au moins.

En remplaçant maintenant $m_\iota - 3$ par m_ι, on obtient la fonction $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{\iota=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_\iota} \frac{A_\iota^k}{(s - a_\iota)^{k+3}};$$

inversement, toute fonction $F(s)$ de cette forme fournit une courbe minima qui satisfait aux conditions énoncées et qui est déterminée par les équations

$$x = \int (1 - s^2) F(s)\, ds,$$

$$y = i \int (1 + s^2) F(s)\, ds,$$

$$z = \int 2sF(s)\, ds.$$

Sous ces suppositions, on peut déterminer aisément l'ordre, le rang et la classe de la courbe minima.

L'ordre du numérateur de la fonction $F(s)$ est

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q - 4,$$

et celui du dénominateur

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe minima dépendent donc, en vertu de ce qui précède, de la quantité s par des équations entières du degré

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 2q.$$

Tel est donc l'ordre m de la courbe minima.

Les coordonnées x, y, z sont infinies en même temps que $F(s)$, à savoir pour $s = a_k$; le plan à l'infini rencontre ainsi la courbe en q points, tous situés sur le cercle imaginaire à l'infini et dont celui qui correspond à la valeur $s = a_k$ doit compter pour $m_k + 2$ points d'intersection.

Les points pour lesquels $F(s)$ est nul sont, en général, des points singuliers d'une courbe minima quelconque, puisque l'on a pour ces points $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = 0$, $\frac{dz}{ds} = 0$; ce sont des rebroussements, et leur nombre est

$$p = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 3q - 4.$$

Quant au rang r d'une telle courbe (nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée quelconque), à sa classe c (nombre des plans osculateurs qu'on peut lui mener sur un point donné quelconque), leur détermination s'effectue en cherchant le degré de certaines équations entières en s qu'il est aisé de former; on trouve ainsi

$$r = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + q + 2,$$
$$c = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + 2.$$

Ces divers nombres p, r, c sont liés par les relations

$$p + c + 2 = m + r - 2,$$
$$m + c - 2r + 2 = 0.$$

V. *Détermination de l'ordre d'une surface minima algébrique sous la supposition* $M = 1$. — Cette détermination s'effectue facilement dans ce cas, en s'appuyant sur ce que les courbes minima sont unicursales; si l'on désigne par m leur degré, on voit de suite que l'ordre de la surface est en général m^2, diminué du nombre de points à l'infini communs à deux courbes minima de faisceaux dif-

férents. Cet ordre est donc au plus égal à m^2 et, en excluant les singularités particulières, au plus égal à $m^2 - m$. Dans le cas des surfaces doubles, le nombre des points à l'infini communs aux deux courbes est évidemment égal à m, et, puisqu'à chaque point de la surface correspondent deux couples de valeurs pour s, s_1, l'ordre est $\frac{m^2 - m}{2}$.

En vertu de ce qui précède, on voit que, si l'on se donne la classe ou l'ordre d'une surface minima sous la supposition $M = 1$, la détermination de la fonction $F(s)$ dépend de la résolution en nombres entiers d'un certain nombre d'équations; les valeurs de q, m_1, $m_2, \ldots, m_q$ étant ainsi trouvées, on obtient une fonction $F(s)$ correspondante, dans laquelle les quantités $A^{(k)}$, a_k restent arbitraires, et l'on en déduit les équations d'une surface minima qui, en général, n'est pas une surface double.

VI. *Surfaces doubles.* — Pour que la surface minima soit double, il doit exister certaines relations entre les $A^{(k)}$ et les a_k.

Pour une telle surface, les points qui correspondent aux deux valeurs s et $-\frac{1}{s_1}$ de la première variable (où s_1 désigne la quantité conjuguée de s) doivent coïncider; cette circonstance doit avoir lieu encore lorsque la valeur s correspond à un point à l'infini; il suit de là que, si a_k est un infini de $F(s)$, il doit en être de même de la valeur

$$\mathfrak{a}_k = -\frac{1}{\bar{a}_k},$$

où $\bar{a}_k$ désigne la quantité conjuguée de a_k; par suite, le nombre q doit être pair et peut être représenté par $2g$, et les infinis de $F'(s)$ peuvent être séparés en deux groupes correspondants

$$a_1, a_2, \ldots, a_g,$$
$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_g,$$

en sorte qu'on puisse écrire $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{A_\lambda^{(k)}}{(s - a_k)^{\lambda+1}} + \frac{\mathfrak{A}_\lambda^{(k)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^{\lambda+1}} \right].$$

La détermination des quantités $\mathcal{A}^{(k)}$ et $\mathfrak{a}_k$ résulte de la condition établie plus haut pour la surface double, à savoir que l'on ait

$$\frac{1}{s^4} F_1\left(-\frac{1}{s}\right) = -F(s).$$

En désignant par $\bar{a}_k$, $\bar{\mathfrak{a}}_k$, $\bar{A}^{(k)}$, $\bar{\mathcal{A}}^{(k)}$ les valeurs conjuguées de a_k, $\mathfrak{a}_k$, $A^{(k)}$, $\mathcal{A}^{(k)}$, on trouve

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_k = -\dfrac{1}{\bar{a}_k}, \\[2ex] \dfrac{1}{s^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{\bar{A}_\lambda^{(k)}}{\left(-\frac{1}{s} - \bar{a}_k\right)^{\lambda+3}} + \frac{\bar{\mathcal{A}}_\lambda^{(k)}}{\left(-\frac{1}{s} - \bar{\mathfrak{a}}_k\right)^{\lambda+3}} \right] \\[2ex] \qquad = -\displaystyle\sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{A_\lambda^{(k)}}{(s - a_k)^{\lambda+3}} + \frac{\mathcal{A}_\lambda^{(k)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^{\lambda+3}} \right]. \end{cases}$$

Ces équations contiennent les relations cherchées entre a_k, $A^{(k)}$, $\mathcal{A}^{(k)}$.

En particulier, si $m_k = 1$, on doit avoir

$$\frac{\bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4}}{\left(s + \frac{1}{\bar{a}_k}\right)^4} + \frac{\bar{\mathcal{A}}^{(k)}(\bar{\mathfrak{a}}_k)^{-4}}{\left(s + \frac{1}{\bar{\mathfrak{a}}_k}\right)^4} = -\frac{A^{(k)}}{(s - a_k)^4} - \frac{\mathcal{A}^{(k)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^4},$$

d'où

$$(9)\quad \begin{cases} \bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4} = -\mathcal{A}^{(k)}, \quad \bar{\mathcal{A}}^{(k)}(\bar{\mathfrak{a}}_k)^{-4} = -A^{(k)}, \\[2ex] F(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{g} \left[\frac{A^{(k)}}{(s - a_k)^4} + \frac{\bar{A}^{(k)}(\bar{a}_k)^{-4}}{\left(s + \frac{1}{\bar{a}_k}\right)^4} \right]. \end{cases}$$

Si l'on pose maintenant

$$A^{(k)} = R_k e^{i\mathfrak{D}_k}, \qquad a_k = \mathfrak{r}_k e^{i\mathfrak{d}_k},$$
$$\mathcal{A}^{(k)} = \mathfrak{R}_k e^{i\mathcal{D}_k}, \qquad \mathfrak{a}_k = r_k e^{id_k},$$

il résulte de la relation

$$\mathfrak{a}_k = -\frac{1}{\bar{a}_k}$$

que l'on a

$$(10^a) \qquad r_k = -\frac{1}{\rho_k}, \quad d_k = -\delta_k + 2n\pi;$$

puis des autres relations on tire

$$R_k \rho_k^{-4} e^{i(-D_k + 4\delta_k)} = -\mathfrak{R}_k e^{i\mathfrak{D}_k},$$

$$\mathfrak{R}_k r_k^{-4} e^{i(-\mathfrak{D}_k + 4d_k)} = -R_k e^{iD_k},$$

d'où

$$(10^b) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_k = -D_k + 4\delta_k + 2n\pi, \\ \mathfrak{R}_k = -R_k r_k^{-4}. \end{cases}$$

En résumé, on a pour ces surfaces le Tableau suivant :

	Courbe minima.	Surface.
Ordre.	$m = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 4g$	$O = \frac{m(m-1)}{2}$.
Rang.	$r = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 2g + 2$	
Classe.	$c = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 2$	$C = r - 1 = \frac{m+c}{2}$.
Nombre des rebroussements.	$p = 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) + 6g + 4$	

$$F(s) = \sum_{k=1}^{g} \sum_{\lambda=1}^{m_k} \left[\frac{A_\lambda^{(k)}}{(s - a_k)^{\lambda+3}} + \frac{\mathfrak{A}_\lambda^{(k)}}{(s - \mathfrak{a}_k)^{\lambda+3}} \right].$$

Aux valeurs de $m = 6, 8, 10, \ldots$ correspondent respectivement les valeurs de

$$\begin{aligned} r &= 6, \ 8, \ 12, \ \ldots, \\ c &= 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \\ p &= 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \\ C &= 5, \ 7, \ 9, \ \ldots, \\ O &= 15, \ 28, \ 45, \ \ldots. \end{aligned}$$

SURFACE MINIMA DE CINQUIÈME CLASSE.

VII. *Développement de la fonction* F(*s*) *pour cette surface : démonstration de ce que toutes les surfaces minima de cinquième*

classe sont semblables. — Le cas le plus simple est celui où la surface est de la classe 5 et de l'ordre 15; on a alors $g = 1$, $m_1 = 1$.

$$F(s) = \frac{A}{(s - a)^4} + \frac{\mathfrak{A}}{(s - \mathfrak{a})^4},$$

et les résultats précédents montrent qu'il faut prendre

$$F(s) = R\left[\frac{e^{Bi}}{(s - re^{\alpha i})^4} - \frac{e^{-Bi-4\alpha i}}{(sr + e^{-\alpha i})^4}\right].$$

Les deux valeurs de s pour lesquelles $F(s)$ est infini correspondent à deux points diamétralement opposés sur la sphère, qui fournit la représentation conforme de la surface minima; l'un de ces deux points est arbitraire; nous ferons $r = 0$; $F(s)$ prend alors la forme

$$F(s) = R\left(\frac{e^{Bi}}{s^4} - e^{-Bi}\right),$$

et une rotation autour de l'axe des z permet de faire

$$F(s) = \frac{1}{s^4} - 1,$$

en supposant en outre qu'on a pris R pour unité de longueur. On voit ainsi que toutes les surfaces minima de cinquième classe sont semblables.

VIII. *Courbes minima.* — Les équations d'une courbe minima sont, en remplaçant partout $F(s)$ par $-3F(s)$,

$$x = \frac{(1 - s^2)^3}{s^3}, \quad y = \frac{i(1 + s^2)^3}{s^3}, \quad z = \frac{3(1 + s^4)}{s^2}.$$

La classe de cette courbe est 4, son ordre 6, son rang 6; elle possède quatre rebroussements qui correspondent aux quatre valeurs de s qui annulent $F(s)$, savoir

$$s = +1, \quad -1, \quad +i, \quad -i;$$

par la translation qui engendre la surface minima, ces quatre rebroussements engendrent quatre courbes de rebroussement (*Rückkehrcurve*) du sixième ordre. En engendrant la surface minima par

la translation de la courbe minima dont les équations sont

$$x = \frac{(1 - s_1^2)^3}{s_1^3}, \quad y = -\frac{i(1 + s_1^2)^3}{s_1^3}, \quad z = \frac{3(1 + s_1^4)}{s_1^2},$$

les quatre rebroussements correspondants engendrent les mêmes courbes de rebroussement, en sorte que la surface minima possède quatre courbes de rebroussement du sixième ordre.

La courbe minima est située sur les cylindres suivants, dont les génératrices sont parallèles aux axes,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = -4,$$

$$y = 3x^{\frac{2}{3}} + 6,$$

$$z = 3y^{\frac{2}{3}} - 6,$$

et qui rencontrent les plans coordonnés suivant une astroïde imaginaire et deux paraboles de Neil.

IX. *Équations de la surface minima.* — La surface minima elle-même est déterminée par les équations suivantes :

$$x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3(s + s_1) - (s^3 + s_1^3),$$

$$y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3(s - s_1) + (s^3 - s_1^3)\right],$$

$$z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3(s^2 + s_1^2),$$

ou, en coordonnées polaires, en faisant

$$s = re^{qi}, \quad s_1 = re^{-qi},$$

$$x = 2\left(\frac{1}{r^3} - r^3\right)\cos 3q - 6\left(\frac{1}{r} - r\right)\cos q,$$

$$y = 2\left(\frac{1}{r^3} - r^3\right)\sin 3q + 6\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin q,$$

$$z = 2\left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\cos 2q.$$

Ces équations montrent bien qu'aux couples de valeurs s, s_1

d'une part, $-\frac{1}{s_1}$, $-\frac{1}{s}$ de l'autre, correspondent le même point, que la surface est double et qu'on peut en détacher une portion finie telle qu'on puisse passer d'une face à l'autre sans traverser le contour.

Cette surface est du quinzième ordre; puisque l'on a $g = 1$, $m_1 = 1$, on voit que le plan à l'infini rencontre la courbe minima génératrice en deux points situés sur le cercle imaginaire à l'infini et qui correspondent aux valeurs $s = 0$, $s = \infty$; en chacun de ces points sont confondus $m_1 + 2 = 3$ points d'intersection de la courbe et du plan à l'infini, en sorte que ce plan est osculateur en deux points à la courbe; les formules montrent que ces points sont situés sur la droite de l'infini du plan des xy, qui doit être regardée comme une droite triple de la surface.

Ainsi qu'on l'a dit, on ne peut pas, des formules précédentes, déduire inversement des formules qui expriment uniformément les deux variables s, s_1 au moyen de x, y, z (supposés liés par l'équation de la surface); au contraire, à chaque point de cette surface correspondent pour s, s_1 deux couples de valeurs.

Cette circonstance ne se présente plus quand on change convenablement les variables; mais la propriété de la représentation précédente de la surface sur le plan, à savoir la conservation de la similitude pour les parties infiniment petites, n'a plus lieu.

Le choix des nouvelles variables est tout indiqué; on posera

$$\sigma = s - \frac{1}{s_1}, \quad \sigma_1 = s_1 - \frac{1}{s},$$

d'où

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{s}{s_1},$$

$$s = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma\sigma_1}}\right), \quad s_1 = \frac{\sigma_1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma\sigma_1}}\right).$$

On obtient alors

$$x = \quad (\sigma^3 + \sigma_1^3) + 3(\sigma^2 + \sigma_1^2)\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_1}\right),$$

$$y = i\left[(\sigma^3 - \sigma_1^3) + 3(\sigma^2 - \sigma_1^2)\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma_1}\right)\right],$$

$$z = 3(\sigma^2 + \sigma_1^2) + \frac{6}{\sigma\sigma_1}(\sigma^2 + \sigma_1^2),$$

et, en faisant

$$\tau = \rho e^{\varphi i}, \quad \tau_1 = \rho e^{-\varphi i},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} x &= 2\rho\cos\varphi[4(\rho^2+3)\cos^2\varphi - 3(\rho^2+4)], \\ y &= 2\rho\sin\varphi[4(\rho^2+3)\sin^2\varphi - 3(\rho^2+4)], \\ z &= 6(\rho^2+2)\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

X. *Intersection de la surface par les plans de coordonnées et par le plan de l'infini.* — Partant de ces équations, on voit de suite les plans des xz et des yz sont des plans de symétrie de la surface et que l'intersection de cette dernière par le plan $z = 0$ se compose des deux droites $x \pm y = 0$, qui doivent être regardées comme des droites triples d'intersection de la courbe imaginaire du sixième ordre

$$\left(\frac{x^2+y^2}{96} + \frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{x^2-y^2}{32}\right)^2 = 0,$$

et enfin de la droite à l'infini, qui doit être comptée pour 3; de même, en cherchant l'intersection par le plan $x = 0$, on voit que l'axe des z doit être regardé comme une droite double de la surface; la portion qui s'étend depuis le point $z = -12$ jusqu'au point $z = 12$ est l'intersection de deux nappes réelles; les deux autres portions indéfinies de l'axe des z doivent être regardées comme isolées; cette intersection comprend en outre une parabole de Neil,

$$\left(\frac{z}{6} + 2\right)^3 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0,$$

dont le rebroussement est situé sur l'axe des z au point $z = -12$, et une courbe double de la surface unicursale et du cinquième ordre

$$y = \frac{3(\tau^4 - 9)}{\tau}, \quad z = \frac{3(\tau^4 - 2\tau^2 - 3)}{\tau^2}, \quad (\tau^2 = \rho^2 + 3).$$

On a, pour cette courbe,

$$\frac{dy}{dz} = -\tau;$$

de ses six points doubles, deux sont réels ($z = 12$, $y = 0$) et

($z=0, y=0$); les quatre autres, qui correspondent aux valeurs

$$z^2 = \pm i\sqrt{3},$$

sont des points de rebroussement. Cette courbe double est isolée à partir du point $z = -12$.

Enfin le plan de l'infini rencontre la surface suivant la droite, triple dans la surface, située à l'infini dans le plan des xy, laquelle, dans l'intersection, doit compter pour neuf droites, et suivant deux autres droites aussi triples dans la surface et situées dans les plans $x + yi = 0$, $x - yi = 0$. Ces résultats sont conformes avec la théorie, qui veut que les lignes analytiques d'une surface minima qui sont situées dans le plan à l'infini soient des droites.

XI. *Sur les faisceaux de cylindres circonscrits du sixième ordre.* — Aux grands cercles de la sphère qui donne la représentation conforme de la surface minima correspondent des courbes du sixième ordre tracées sur la surface.

L'équation d'un de ces grands cercles est

$$ss_1 - as - a_1 s_1 = 1,$$

où a et a_1 désignent des quantités conjuguées; on en déduit

$$s_1 = \frac{1 + as}{s - a_1}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations de la surface, donnent pour x, y, z des expressions du douzième degré en s; mais aux valeurs

$$s \quad \text{et} \quad -\frac{s - a_1}{1 + as}$$

correspondent deux points confondus de la courbe qui, ainsi, est du sixième degré. A la double infinité des grands cercles de la sphère correspond une double infinité de courbes du sixième ordre sur la surface; les normales à la surface le long d'une de ces courbes sont parallèles à un même plan, en sorte que le cylindre dont cette courbe est la directrice et dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan est circonscrit à la surface.

A ces courbes du sixième ordre appartiennent, comme cas limite,

les lignes du troisième ordre qui correspondent aux méridiens de la sphère. Ces courbes sont les paraboles cubiques trouvées par M. Henneberg.

A la fin du travail de M. Schilling, on trouvera une vue stéréoscopique de la surface ou plutôt du quart de cette surface, dont on reproduira aisément les autres parties à cause de la symétrie par rapport aux deux plans des xz et des yz.

LECORNU. — SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES (¹).

M. Lecornu, après avoir rappelé les propositions de la Géométrie des surfaces dont il aura l'occasion de se servir dans la suite de son travail, cherche les équations d'équilibre d'une surface flexible et inextensible soumise à des forces extérieures quelconques, comparables toutefois aux éléments superficiels auxquels elles sont appliquées, en sorte qu'on peut toujours supposer ces forces rapportées à l'unité de surface.

Si dans une telle surface, supposée en équilibre, on découpe un contour fermé quelconque, la portion de surface détachée restera en équilibre si l'on applique sur le contour des forces *de tension* convenablement choisies, situées dans le plan tangent; on supposera ces forces de tension rapportées à l'unité de longueur. La force de tension qui s'exerce sur un élément de contour a une composante normale (force d'arrachement) et une composante tangentielle (force de cisaillement). On aperçoit de suite que les forces de cisaillement développées en un point donné sur deux éléments linéaires qui se coupent à angle droit sont égales; on reconnaît aussi aisément que, si en un point quelconque de la surface on considère dans le plan tangent deux directions rectangulaires, et que l'on désigne par n_1, n_2 les forces d'arrachement relatives à ces deux directions et par t la force commune de cisaillement, la conique qui, étant rapportée à ces deux directions comme axes coor-

(¹) Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 10 novembre 1880.

donnés, a pour équation

$$n_1 x^2 + 2t xy + n_2 y^2 = 1,$$

jouit de cette propriété que, si l'on considère la force de tension relative à la direction d'un quelconque de ses diamètres, cette force de tension est dirigée suivant le diamètre conjugué; M. Lecornu donne à cette conique le nom d'*indicatrice des tensions*.

Supposant ensuite la surface rapportée à des coordonnées orthogonales quelconques λ, μ, et désignant par $L\,d\lambda$, $M\,d\mu$ les différentielles des arcs des courbes coordonnées qui passent par le point (λ, μ), l'auteur écrit que le petit élément de surface $LM\,d\lambda\,d\mu$, que l'on peut assimiler à un petit rectangle, est en équilibre sous l'influence des forces de tension relatives à son contour et des forces extérieures dont les composantes suivant les arêtes du trièdre trirectangle formé par les tangentes aux courbes coordonnées et la normale à la surface sont F_1, F_2, Φ, et à son contour. En désignant par n_1, n_2 les forces d'arrachement relatives aux directions des tangentes, par t la force commune de cisaillement, par R_1, R_2 les rayons de courbure des sections normales de la surface suivant les deux tangentes, par T le rayon de courbure géodésique, enfin par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure géodésique des deux courbes coordonnées, en sorte que, x, y, z étant les coordonnées rectangulaires du point (λ, μ) et X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale en ce point, on ait

$$\frac{L^2 M}{\rho_1} = \sum \frac{\partial x}{\partial \mu}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \qquad \frac{LM^2}{\rho_2} = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2},$$

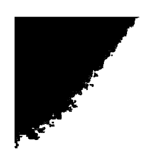
$$\frac{L^2}{R_1} = \sum X\,\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \qquad \frac{M^2}{R_2} = \sum X\,\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}, \qquad \frac{LM}{T} = \sum X\,\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\,\partial \mu},$$

M. Lecornu, par une application habilement faite du principe des vitesses virtuelles, parvient aux équations suivantes :

$$\frac{1}{L}\,\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\,\frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = F_1,$$

$$\frac{1}{M}\,\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{1}{4}\,\frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_2} = F_2,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi.$$



Une première remarque consiste en ce que le nombre des inconnues n_1, n_2, t est égal au nombre des équations, en sorte que F_1, F_2, Φ ne sont assujettis à aucune condition, ce qui montre combien le problème traité par l'auteur diffère du problème de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.

De plus, ces équations ne diffèrent que par les seconds membres et par le nom des inconnues n_1, n_2, t des équations qu'on rencontre dans la théorie de la déformation infiniment petite des surfaces flexibles et inextensibles. Dans ces dernières équations, les variations l, m, θ des quantités $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{T}$ remplacent n_1, n_2, t.

Les équations étant linéaires, on voit que l'intégration des équations d'équilibre, en supposant traité le problème de la déformation, revient à trouver seulement une solution particulière. Dans le cas où la surface n'est pas développable, on voit aisément qu'on peut, par un changement de variable simple, changer les équations d'équilibre en d'autres semblables où le terme Φ n'existe plus; on a alors affaire à deux équations linéaires en n_1, n_2, dont l'auteur fait une étude particulière. Dans cette étude, les lignes asymptotiques jouent, comme dans la théorie de la déformation, un rôle capital : leurs tangentes en un point de la surface sont conjuguées par rapport à l'indicatrice des tensions; ce sont des fonctions arbitraires des paramètres de ces lignes qui figurent dans les expressions les plus générales de n_1, n_2, t qui satisfassent aux équations d'équilibre.

Enfin M. Lecornu donne de ces principes une suite d'applications, dont la plus importante concerne les surfaces réglées; il rencontre, chemin faisant, plusieurs propositions géométriques intéressantes.

MÉLANGES.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE, ET SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Désignons par u et v deux fonctions uniformes d'une variable z, liées par la relation algébrique irréductible de degré m

$$F(u, v) = 0. \tag{1}$$

Je me propose de montrer, dans ce travail, comment on peut trouver les formes possibles des deux fonctions u et v, et il résultera tout naturellement de cette recherche que le nombre caractéristique, ordinairement désigné par p, relatif à l'équation (1) ne peut être que zéro ou l'unité. Tel est l'objet de la première Partie de cette étude, auquel on peut encore donner la forme géométrique suivante.

Une courbe étant définie par une relation telle que (1) entre les coordonnées u et v d'un quelconque de ses points, deux cas particulièrement intéressants et bien connus sont ceux où le genre p de la courbe est égal à zéro ou à l'unité. On sait que dans le premier cas u et v peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre, et dans le second cas on peut les regarder comme des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes d'un paramètre z. On peut donc, dans ces deux cas, mettre u et v sous la forme

$$u = P(z), \quad v = Q(z),$$

P et Q étant des fonctions uniformes de z n'ayant d'autres points singuliers que des pôles. On est amené tout naturellement à se poser alors la question suivante : Existe-t-il d'autres courbes algébriques que celles du genre 0 et 1, dont les coordonnées soient susceptibles de s'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre à discontinuités exclusivement polaires? L'étude analytique dont j'ai annoncé plus haut le résultat montre qu'il n'existe pas d'autres

courbes algébriques que celles du genre 0 ou 1, jouissant de cette propriété.

La seconde Partie de ce travail est consacrée à quelques applications des résultats précédemment obtenus. Je fais notamment une étude détaillée de l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0,$$

où F est un polynôme, en me proposant de reconnaître si cette équation admet ou non des intégrales uniformes.

I.

1. Examinons d'abord le cas où la courbe représentée par l'équation (1) serait unicursale. On peut alors exprimer rationnellement u et v au moyen d'un paramètre, et cela de telle manière qu'à un système de valeurs de u et v ne corresponde qu'une seule valeur de ce paramètre (pour ce dernier point, *voir* Lüroth, *Math. Ann.*, t. IX).

Soient, par exemple,

$$u = \varphi(\lambda), \quad v = \varphi_1(\lambda),$$

et l'on pourra tirer de ces deux équations $\lambda = f(u, v)$, f étant une fonction rationnelle de u et v. Or, si u et v sont des fonctions uniformes à discontinuités exclusivement polaires, λ sera une fonction de même nature, que nous désignerons par $R(z)$, et l'on aura, par suite,

$$u = \varphi\,[R(z)],$$
$$v = \varphi_1[R(z)].$$

Telle est donc la forme des fonctions u et v dans le cas où le nombre p, relatif à l'équation (1), a la valeur zéro.

2. Abordons maintenant le cas général. Nous supposerons, comme on le fait dans la théorie des fonctions abéliennes, que l'équation (1) contienne un terme de degré m par rapport à v et que le rapport $\frac{v}{u}$ ait m valeurs finies et distinctes pour $u = \infty$.

Soit

$$\int \frac{f(u, v)\, du}{F'_v(u, v)} \tag{2}$$

une intégrale abélienne de première espèce relative à l'équation (1), $f(u, v)$ désignant un polynôme convenable de degré $m-3$. J'envisage l'expression

$$\frac{f(u, v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u, v)},$$

qui est manifestement, comme u et v, une fonction uniforme de z; mais je veux montrer de plus que cette fonction est une fonction entière, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de pôles.

Examinons d'abord ce qu'elle devient pour un pôle $z = \alpha$ de u. Dans le voisinage de u infini, on aura, puisque l'intégrale considérée est de première espèce,

$$\frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)} = \frac{P\left(\dfrac{1}{u}\right)}{u^m},$$

$P\left(\dfrac{1}{u}\right)$ représentant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\dfrac{1}{u}$ et prenant une valeur différente de zéro pour $u = \infty$, et m étant un entier égal ou supérieur à 2. Désignons par n le degré de multiplicité du pôle α; on aura

$$\frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)} = (z-\alpha)^{mn} P(z-\alpha),$$

$P(z-\alpha)$ représentant d'une manière générale une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z-\alpha$, et par suite

$$\frac{f(u, v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u, v)} = (z-\alpha)^{(m-1)n-1} P(z-\alpha).$$

Or on a certainement

$$(m-1)n \geqq 1,$$

puisque n n'est pas nul et que l'entier m est égal ou supérieur à 2; par suite, l'expression (2) garde une valeur finie pour $z = \alpha$.

Soit, maintenant, z_0 une valeur de z telle que la valeur correspondante u_0 de u soit un point critique de la fonction algébrique de u, définie par l'équation (1), et désignons par v_0 la valeur de v pour $z = z_0$. A une valeur de z voisine de z_0 correspondent une valeur de u et une valeur de v. Supposons que cette dernière fasse partie d'un certain système circulaire de racines de l'équation (1), relatif au point critique u_0, et soit p le degré de ce système circulaire. Je suppose que ce degré soit réduit autant que possible, c'est-à-dire que ce ne puisse être qu'après un nombre de tours égal à un multiple de p de la variable u autour de u_0, que la fonction algébrique v reprenne la même valeur. Il est facile de voir que dans ces conditions $z = z_0$ devra être une racine de l'équation $u = u_0$, avec un degré de multiplicité égal à p ou à un multiple λp de p. En effet, soit q ce degré de multiplicité; z ayant tourné une fois autour de z_0, u a tourné q fois autour de u_0 et v a nécessairement repris la même valeur; donc q doit être un multiple de p.

On a nécessairement d'ailleurs, dans le voisinage de $u = u_0$,

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)} = \frac{M(u)}{(u-u_0)^{\frac{q}{p}}},$$

$M(u)$ prenant une valeur finie et différente de zéro pour $u = u_0$, et l'entier positif ou négatif q satisfaisant à l'inégalité $q < p$. Cela résulte immédiatement de ce que l'intégrale

$$\int^u \frac{f(u,v)\,du}{F'_u(u,v)} = \int^u \frac{M(u)\,du}{(u-u_0)^{\frac{q}{p}}}$$

doit rester finie quand u tend vers zéro.

$u - u_0$ contenant d'autre part en facteur $(z-z_0)^{\lambda p}$, et, par suite, $\frac{du}{dz}$ contenant le facteur $(z-z_0)^{\lambda p - 1}$, on aura manifestement

$$\frac{f(u,v)\frac{du}{dz}}{F'_v(u,v)} = (z-z_0)^{\lambda(p-q)-1}\,P,$$

P prenant une valeur finie et différente de zéro pour $z = z_0$. Mais

on a

$$\lambda(p-q) \geqq 1,$$

puisque $p - q > 0$ et que l'entier λ est au moins égal à 1.

Par suite, l'expression (2) garde une valeur finie pour $z = z_0$.

Il peut arriver que $F'_v(u, v)$ s'annule pour un système de valeurs u_0, v_0 et que, dans le voisinage de u_0, la racine considérée v soit une fonction holomorphe de u. Il est évident que dans ce cas le quotient

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)}$$

est holomorphe dans le voisinage de u_0, et la conclusion précédente subsiste.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)} = G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière. On en déduit par l'intégration, en désignant par u_0 la valeur de u correspondant à une valeur z_0 de z,

$$(3) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = \int_{z_0}^{z} G(z)\,dz = G_1(z),$$

$G_1(z)$ étant, comme $G(z)$, une fonction entière.

Nous allons montrer que la relation entre les deux fonctions uniformes u et G_1 est impossible si le nombre p relatif à l'équation $F(u, v) = 0$ est supérieur à l'unité. Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi. Dans ce cas, nous pouvons supposer que l'intégrale

$$(4) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)}$$

a au moins trois périodes distinctes. Une intégrale déterminée de première espèce, relative à une fonction algébrique d'un genre p supérieur à l'unité, peut bien avoir moins de trois périodes; mais on sait que la même chose ne peut arriver pour une intégrale quelconque, comme l'est l'intégrale (4). Cela posé, revenons à la relation (3); elle montre qu'à une valeur donnée de u correspondent

deux valeurs de $G_1(z)$ différant d'aussi peu qu'on voudra, puisqu'on peut ajouter à l'intégrale une somme des multiples des périodes, et, celles-ci étant en nombre au moins égal à trois, on sait que cette somme peut être rendue moindre que toute quantité donnée; mais à deux valeurs très voisines de $G_1(z)$ correspondent évidemment deux valeurs de z, elles-mêmes très voisines, et nous arrivons, par suite, à cette conclusion inadmissible, qu'à une valeur de u correspondent deux valeurs de z dont la différence a un module aussi petit qu'on voudra. La seule hypothèse que nous puissions faire est donc que $p = 1$.

Dans ce cas, la relation (3) montre de suite que u est une fonction doublement périodique $F[G_1(z)]$ de la fonction entière $G_1(z)$.

A cause de la relation

$$F'_u\, du + F'_v\, dv = 0$$

ou

$$\frac{du}{F'_v(u,v)} = -\frac{dv}{F'_u(u,v)},$$

on aura

$$\int_{v_0}^{v} \frac{f(u,v)\,dv}{F'_u(u,v)} = -\int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = -G_1(z),$$

et, par suite, v sera, comme u, une fonction doublement périodique aux mêmes périodes de $G_1(z)$.

Ainsi, en résumé, le genre de la relation algébrique

$$F(u,v) = 0$$

doit être égal à zéro ou à l'unité. Dans le premier cas, on a

$$u = \varphi[R(z)], \quad v = \varphi_1[R(z)],$$

φ et φ_1 étant des fonctions rationnelles de $R(z)$, qui est une fonction uniforme, quelconque d'ailleurs, à discontinuités exclusivement polaires, et l'on a dans le second

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

F et F_1 étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes, et $G_1(z)$ une fonction entière, qui peut d'ailleurs être quelconque.

on a

$$\lambda(p-q) \geqq 1,$$

puisque $p-q>0$ et que l'entier λ est au moins égal à 1.

Par suite, l'expression (2) garde une valeur finie pour $z = z_0$.

Il peut arriver que $F'_v(u, v)$ s'annule pour un système de valeurs u_0, v_0 et que, dans le voisinage de u_0, la racine considérée v soit une fonction holomorphe de u. Il est évident que dans ce cas le quotient

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)}$$

est holomorphe dans le voisinage de u_0, et la conclusion précédente subsiste.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)} = G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière. On en déduit par l'intégration, en désignant par u_0 la valeur de u correspondant à une valeur z_1 de z,

$$(3) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = \int_{z}^{z} G(z)\,dz = G_1(z),$$

$G_1(z)$ étant, comme $G(z)$, une fonction entière.

Nous allons montrer que la relation entre les deux fonctions uniformes u et G_1 est impossible si le nombre p relatif à l'équation $F(u,v)=0$ est supérieur à l'unité. Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi. Dans ce cas, nous pouvons supposer que l'intégrale

$$(4) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)}$$

a au moins trois périodes distinctes. Une intégrale déterminée de première espèce, relative à une fonction algébrique d'un genre p supérieur à l'unité, peut bien avoir moins de trois périodes; mais on sait que la même chose ne peut arriver pour une intégrale quelconque, comme l'est l'intégrale (4). Cela posé, revenons à la relation (3); elle montre qu'à une valeur donnée de u correspondent

deux valeurs de $G_1(z)$ différant d'aussi peu qu'on voudra, puisqu'on peut ajouter à l'intégrale une somme des multiples des périodes, et, celles-ci étant en nombre au moins égal à trois, on sait que cette somme peut être rendue moindre que toute quantité donnée; mais à deux valeurs très voisines de $G_1(z)$ correspondent évidemment deux valeurs de z, elles-mêmes très voisines, et nous arrivons, par suite, à cette conclusion inadmissible, qu'à une valeur de u correspondent deux valeurs de z dont la différence a un module aussi petit qu'on voudra. La seule hypothèse que nous puissions faire est donc que $p = 1$.

Dans ce cas, la relation (3) montre de suite que u est une fonction doublement périodique $F[G_1(z)]$ de la fonction entière $G_1(z)$.

A cause de la relation

$$F'_u\,du + F'_v\,dv = 0$$

ou

$$\frac{du}{F'_v(u, v)} = -\frac{dv}{F'_u(u, v)},$$

on aura

$$\int_{v_0}^{v} \frac{f(u, v)\,dv}{F'_u(u, v)} = -\int_{u_0}^{u} \frac{f(u, v)\,du}{F'_v(u, v)} = -G_1(z),$$

et, par suite, v sera, comme u, une fonction doublement périodique aux mêmes périodes de $G_1(z)$.

Ainsi, en résumé, le genre de la relation algébrique

$$F(u, v) = 0$$

doit être égal à zéro ou à l'unité. Dans le premier cas, on a

$$u = \varphi[R(z)], \quad v = \varphi_1[R(z)],$$

φ et φ_1 étant des fonctions rationnelles de $R(z)$, qui est une fonction uniforme, quelconque d'ailleurs, à discontinuités exclusivement polaires, et l'on a dans le second

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

F et F_1 étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes, et $G_1(z)$ une fonction entière, qui peut d'ailleurs être quelconque.

II.

Je me propose d'indiquer maintenant quelques applications de la proposition précédente, et j'ai surtout en vue l'intégration d'une classe d'équations différentielles.

1. Nous allons déduire immédiatement du théorème précédent la démonstration de la proposition suivante. On ne peut satisfaire à l'équation de Fermat,

$$X^n + Y^n + Z^n = 0,$$

en prenant pour X, Y et Z des fonctions uniformes à discontinuités uniquement polaires, que si l'entier n est au plus égal à 3. Si l'on pose, en effet, $\frac{X}{Z} = u$ et $\frac{Y}{Z} = v$, on a la relation

$$u^n + v^n + 1 = 0,$$

et, si n n'est pas égal à 1, 2 ou 3, le nombre p relatif à cette équation est supérieur à l'unité. Si $n = 3$, on a $p = 1$ et u et v sont alors des fonctions doublement périodiques d'une fonction entière.

2. Considérons encore, avant d'aborder la classe d'équations qui fait le principal objet de cette étude, les équations

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0, \tag{1}$$

en se proposant de chercher dans quels cas on peut y satisfaire par des fonctions uniformes de z. C'est le problème que se sont posé MM. Briot et Bouquet dans leur mémorable travail sur l'intégration de certaines équations différentielles, au moyen des fonctions elliptiques.

Tout d'abord le genre de la relation algébrique (1) doit être égal à zéro ou à l'unité. Cela posé, étant donnée la relation

$$F(u, v) = 0,$$

dont le genre est, par hypothèse, zéro ou l'unité, on peut, dans le

premier cas, exprimer rationnellement u et v au moyen d'un paramètre λ,

$$u = \varphi(\lambda), \quad v = \varphi_1(\lambda);$$

dans le second, exprimer u et v par des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes de λ, pour lesquelles nous garderons les mêmes notations, et nous pouvons regarder dans l'un et l'autre cas les fonctions φ et φ_1 comme déterminées.

Soit d'abord $p = 0$; on devra avoir alors

$$u = \varphi[\mathrm{R}(z)], \quad \frac{du}{dz} = \varphi_1[\mathrm{R}(z)],$$

$\mathrm{R}(z)$ étant une fonction uniforme.

On en conclut que

$$\varphi'(\mathrm{R})\mathrm{R}' = \varphi_1(\mathrm{R}) \tag{2}$$

ou

$$\frac{d\mathrm{R}}{dz} = \psi(\mathrm{R}),$$

ψ étant une fonction rationnelle de R.

Mais il est bien aisé de voir qu'une pareille équation ne peut avoir d'intégrale uniforme que si $\psi(\mathrm{R})$ se réduit à un polynôme du second degré $\mathrm{AR}^2 + \mathrm{BR} + \mathrm{C}$.

On doit donc avoir

$$\varphi_1(\mathrm{R}) = \varphi'(\mathrm{R})(\mathrm{AR}^2 + \mathrm{BR} + \mathrm{C}),$$

A, B et C étant trois constantes.

Si p est égal à 1, on voit que l'équation (2) ne pourra avoir d'intégrales uniformes que si φ_1 et φ' sont dans un rapport constant, et dans ce cas $\mathrm{R}(z)$ se réduit à $\mathrm{A}z + \mathrm{B}$, A et B étant deux constantes.

3. J'envisage maintenant les équations différentielles de la forme

$$\mathrm{F}\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0,$$

F étant un polynôme, en me proposant de rechercher dans quels cas elle admettra des intégrales uniformes. Le genre de la relation précédente doit être tout d'abord égal à zéro ou à l'unité; plaçons-

... hypothèse, et nous pouvons écri

$$\ldots \; R \ldots,$$

... rationnelles que l'on peut considér ... égalité donne de suite

$$\ldots = \ldots R \; R' - \varphi' R \; R'';$$

$$\ldots = \ldots R \; R' - \varphi' \; R \; R'',$$

... on peut satisfaire à cette équation pa ... R. Or posons $R' = p$; cette équatio

$$\ldots = \ldots R \; p - \varphi \; R \; p\frac{dp}{dR},$$

$$\ldots = \ldots R \; P - \varphi' \; R \; \frac{dP}{dR},$$

$$\frac{R}{\ldots} = \frac{\ldots \int \varphi_1 \; R \; \varphi \; R \; dR}{\varphi' \; R^2}.$$

... rechercher dans quels cas une pareill ... pourra être satisfaite par une fonction uni-

... intégrale $\int \varphi_1 \varphi' \, dR$ ne contienne pa ... sera, dans ce cas, une fonction ra- ... voir dans quels cas l'équatio

$$\ldots = F \; R$$

... uniforme, F étant une fonction rationnell

... les recherches de MM. Briot et Bou-

quet que $F(R)$ ne peut être qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Nous aurons donc à rechercher si l'on peut déterminer la constante entrant dans l'intégrale

$$\int \varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR$$

de manière que le quotient $\dfrac{2\int\varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2}$ soit un polynôme d'un degré inférieur ou au plus égal à 4. Il est manifeste que trois cas pourront se présenter : il pourra en être ainsi soit pour toute valeur de la constante, et alors toutes les intégrales de l'équation seront uniformes, soit pour une seule valeur de cette constante, et alors l'équation proposée aura une première intégrale uniforme, et par suite toutes celles qu'on obtient en remplaçant dans celle-ci z par z plus une constante; il pourra enfin arriver, et ce sera le cas général, que l'on ne puisse pas déterminer d'une manière convenable la constante d'intégration.

5. Abordons maintenant le cas où l'intégrale $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ donnerait naissance à des termes logarithmiques. Soit $A\log(R-a)$ un pareil terme, A étant nécessairement une constante. Montrons d'abord que l'équation $R(z)=a$ ne pourra avoir de racine. Supposons, en effet, que $R(z_0)=a$; on aura

$$R(z)-a=(z-z_0)^m P(z),$$

$P(z)$ désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z-z_0$ et ne s'annulant pas pour $z=z_0$.

Donc $A\log(R-a)$ sera égal à $mA\log(z-z_0)+A\log P(z)$.

Si donc nous considérons l'égalité

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2=\frac{2\int\varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2},$$

on voit que le second membre n'est pas une fonction uniforme de z autour de z_0, puisque par une rotation autour de ce point son numérateur augmente de $2mA\pi i$; le premier membre, au contraire, est une fonction uniforme de z, dans le voisinage de z_0; l'égalité précédente est donc impossible.

Nous pouvons maintenant établir que l'intégrale $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ ne pourra

pas, si l'intégrale de l'équation (I) est, comme nous le supposons, uniforme, contenir plus de deux termes logarithmiques. On sait, en effet, comme je l'ai montré dans mon Mémoire sur les fonctions entières (*Annales de l'École Normale*, 1880), qu'il ne peut y avoir plus de deux valeurs a et b pour lesquelles les équations $R(z) = a$ et $R(z) = b$ n'aient pas de racines, $R(z)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan à discontinuités exclusivement polaires.

6. Supposons d'abord qu'il n'y ait dans l'intégrale qu'un terme logarithmique. Notre équation (I) aura la forme

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R) + f(R)\log(R - a),$$

F et f étant des fonctions rationnelles de R, et f n'étant pas identiquement nul.

Je dis qu'une fonction uniforme intégrale de cette équation ne peut être qu'une fonction entière, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de pôles. Soit, en effet, z_0 un pôle de R; on aura dans le voisinage de ce point

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^m},$$

$P(z_0)$ étant différent de zéro, et l'on voit que le second membre de (I), contenant le terme non uniforme

$$-mf\left[\frac{P(z)}{(z - z_0)^m}\right]\log(z - z_0),$$

ne serait pas, comme le premier, uniforme dans le voisinage de z_0.

D'autre part, $\frac{dR}{dz}$ ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de R, car, en posant $\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \psi(R)$, on a de suite

$$z - z_0 = \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\psi(R)}},$$

et z a une valeur déterminée z_1 quand R tend vers une valeur α

rendant $\psi(R)$ infini ; donc, pour une valeur z_1 de z, R prend une valeur α et $\frac{dR}{dz}$ est infini, ce qui est impossible. Cela montre de suite que $F(R)$ et $f(R)$ doivent être nécessairement des polynômes. On voit ensuite que l'expression

$$F(R)+f(R)\log(R-a)$$

doit s'annuler pour $R=a$. Sinon, on pourrait certainement trouver une valeur finie de z pour laquelle R serait égal à a, et nous savons que cela ne peut être. Les deux polynômes F et f doivent donc s'annuler pour $R=a$.

Montrons maintenant que leur degré ne peut surpasser le second. J'envisage, à cet effet, l'intégrale

$$\text{(II)} \qquad z-z_0=\int_{R_0}^{R}\frac{dR}{\sqrt{F(R)+f(R)\log(R-a)}},$$

R_0 désignant la valeur de R pour une valeur arbitraire z_0 de z.

Soient m le degré de $F(R)$ et n celui de $f(R)$. Pour R infini, l'expression

$$F(R)+f(R)\log(R-a)$$

est comparable à R^m ou à $R^n\log R$, suivant que $m>n$ ou $m\leqq n$.

On voit de suite que, dans le premier cas, l'intégrale (II) tendra vers une limite quand R augmentera indéfiniment, si m est supérieur à 2 ; m et par suite n ne peuvent donc dépasser 2.

Dans le second cas, l'intégrale est comparable à $\int_{R_0}^{R'}\frac{dR}{\sqrt{R^n\log R}}$, intégrale qui, en posant $R=z^{\frac{2}{2-n}}$, devient, à un facteur constant près, $\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\log z}}$, et, si n est supérieur à 2, z tend vers zéro quand R augmente indéfiniment; par suite, cette dernière intégrale a évidemment une limite. L'intégrale (II) tend donc encore vers une limite quand R augmente indéfiniment. On voit donc que, si les degrés de F et f dépassent 2, la fonction R aura au moins un pôle, ce que nous savons être impossible.

Montrons enfin que $F(R)$ et $f(R)$ contiendront $(R-a)^2$ en

intégrale uniforme, $f_1(\mathrm{R})$ et $f_2(\mathrm{R})$ ne pouvant ni l'un ni l'autre être identiquement nuls.

Une étude toute semblable à celle qui a été faite dans le n° 6 montre que F, f_1 et f_2 doivent être des polynômes, et que, de plus, ils doivent tous trois contenir en facteur $(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2$.

Cela posé, remarquons maintenant que la fonction $\mathrm{R}(z)$, ne pouvant, pour une valeur finie de z, devenir égale à a et b, aura nécessairement des pôles, et de là on conclut immédiatement que

$$f_1(\mathrm{R})+f_2(\mathrm{R})=0,$$

condition nécessaire pour que $\mathrm{R}=\infty$ ne soit pas un point critique, de nature logarithmique, du second membre, et l'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)^2=\mathrm{F}(\mathrm{R})+f_1(\mathrm{R})\log\frac{\mathrm{R}-a}{\mathrm{R}-b};$$

la fonction $\dfrac{\mathrm{R}-a}{\mathrm{R}-b}$ sera une fonction entière, ne devenant jamais nulle. Désignons-la par u, d'où

$$\mathrm{R}=\frac{a-bu}{1-u},$$

et l'équation précédente devient

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2=\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}\mathrm{F}\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)+\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}f_1\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)\log u.$$

Cette dernière équation a la forme de celle qui a été étudiée dans le numéro précédent. En nous reportant aux résultats précédemment trouvés, on voit que l'on doit avoir, pour que l'intégrale u puisse être uniforme,

$$\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}f_1\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)=\mathrm{A}u^2,$$

A étant une constante, et cette relation montre immédiatement que le degré du polynôme f_1 ne peut dépasser le quatrième; il en est de même de F. Mais nous avons vu que F et f_1 devaient admettre le diviseur $(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2$. Il suit de là qu'on ne peut avoir que

$$\mathrm{F}=\mathrm{A}(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2,\quad f_1=\mathrm{B}(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2,$$

A et B étant deux constantes, et il est facile de voir qu'effectivement, dans ce cas, l'intégrale de l'équation

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R) + f_1(R)\log\frac{R-a}{R-b}$$

est uniforme.

Revenons maintenant à l'équation (I),

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int\varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2(R)},$$

où l'intégrale, dans le second membre, est supposée conduire à deux termes logarithmiques $\log(R-a)$ et $\log(R-b)$.

On devra nécessairement avoir

$$\frac{1}{\varphi'^2} = A(R-a)^2(R-b)^2,$$

A étant une constante, ou

$$\frac{d\varphi}{dR} = \frac{1}{\sqrt{A}}\,\frac{1}{(R-a)(R-b)},$$

et il est manifeste que φ ainsi défini ne peut être une fonction rationnelle de R.

8. Nous arrivons donc à cette conclusion : l'équation différentielle

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int\varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR}{\varphi'^2(R)}$$

ne peut admettre d'intégrale uniforme si l'expression $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ contient des termes logarithmiques. A la vérité, j'ai seulement examiné, dans les numéros précédents, les cas où elle contiendrait un ou deux termes de cette nature; mais j'ai dit plus haut pourquoi il n'y avait pas lieu d'examiner les cas où il y aurait plus de deux logarithmes.

9. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le nombre p

relatif à l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0$$

était égal à zéro; supposons maintenant que l'on ait $p = 1$.

u et $\frac{d^2u}{dz^2}$ devront avoir cette fois les formes $\varphi(R)$ et $\varphi_1(R)$, φ et φ_1 désignant deux fonctions doublement périodiques, et R une fonction uniforme entière de z. On voit, comme précédemment, que

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int \varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR}{\varphi'^2(R)},$$

équation que nous avons maintenant à discuter, en supposant que φ et φ_1 soient des fonctions doublement périodiques.

Si l'intégrale $\int \varphi_1 \varphi'\,dR$ est une fonction doublement périodique de R, on aura

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R),$$

F étant une fonction uniforme doublement périodique.

Si F ne se réduit pas à une constante, cette équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme, car, soit $R = a$ un pôle de $F(R)$, $\frac{dR}{dz}$ serait infini, R prenant une valeur finie a. Si donc on peut disposer de la constante d'intégration dans $\int \varphi_1 \varphi'\,dR$ de manière que F se réduise à une constante, l'équation admettra, et dans ce cas seulement, des intégrales uniformes. On aura alors

$$2\int \varphi_1 \varphi'\,dR = A^2 \varphi'^2,$$

d'où, en différentiant,

$$\varphi_1 = A^2 \varphi'',$$

et R se réduit à $Az + B$, A et B étant des constantes.

Supposons, en second lieu, que l'intégrale $\int \varphi_1 \varphi'\,dR$ soit uniforme, mais non doublement périodique; le second membre de l'équation (I) sera évidemment encore susceptible de devenir infini pour certaines valeurs de R, et, par suite, l'équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme.



Enfin, si $\int \varphi_1 \varphi' dR$ contient des termes logarithmiques, la même conclusion subsiste encore.

En résumé, quand $p = 1$, le seul cas où il y ait des intégrales uniformes est celui où l'on a

$$\varphi_1 = A^2 \varphi'',$$

A étant une constante. Toutes les intégrales de l'équation proposée ne sont pas, dans ce cas, uniformes; il n'y a que celles que l'on peut déduire d'une première intégrale uniforme par le changement de z en z plus une constante.

Il résulte de toute cette étude que les équations

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0$$

ne peuvent admettre d'autres intégrales uniformes que des fonctions rationnelles de z, des fonctions rationnelles de e^{az}, où a est une constante, et enfin des fonctions doublement périodiques. Nous avons montré comment on pourrait reconnaître s'il en est ainsi et trouvé en même temps la nature spéciale de ces intégrales uniformes.

RS PRONONCÉS AUX FUNÉRAILLES DE M. CHASLES.

DISCOURS DE M. J. BERTRAND.

AU NOM DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

France perd une de ses gloires, les Membres de l'Académie nces un ami excellent, dévoué à chacun et à tous, gardien le, tout ensemble, de la bonne confraternité, dont son souénéré maintiendra parmi nous la tradition plus vivace et te.

n'ai rien à apprendre aux amis, aux admirateurs de sles, qui se pressent si nombreux autour de son cercueil : le à tous, il était pour tous affectueux et confiant; dévoué erve aux belles études qui ont fait sa gloire, il faisait pame égale et active bienveillance pour tous ceux qui, dans ctions les plus diverses, suivaient les grandes voies de la

rdeur communicative de M. Chasles pour la Géométrie se resque dès l'enfance : élève de Mathématiques élémen- Lycée impérial, il communiquait aux élèves des Collèges problèmes et les exercices de chaque semaine, deman- l'exiger, les questions proposées par leurs maitres; dans e de problèmes difficiles et d'élégantes solutions, organisé e lycéen, on peut croire aisément que le futur géomètre nt la meilleure part.

'en 1814 M. Chasles quitta l'École Polytechnique brusenciée, sa première préoccupation fut pour ses cama- l'un, dans son embarras, trouva près de lui plus que eils. Rappelé à Chartres par sa famille, il y offrit l'hosn jeune et brillant condisciple du Lycée impérial, ini, qui, entrainé par lui vers la Géométrie et guidé iers pas, avait assez bien profité de ses leçons et fait s pour lui enlever le prix d'honneur au Concours gémier rang à l'École Polytechnique.

Enfin, si $\int \varphi_1 \varphi' dR$ contient des terme
conclusion subsiste encore.

En résumé, quand $p = 1$, le seul cas o
formes est celui où l'on a

$$\varphi_1 = A^2 \varphi'.$$

A étant une constante. Toutes les inte
ne sont pas, dans ce cas, uniformes; il
déduire d'une première intégrale uni
z en z plus une constante.

Il résulte de toute cette étude que le

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right.$$

ne peuvent admettre d'autres intégral
rationnelles de z, des fonctions rat
constante, et enfin des fonctions d
avons montré comment on pourrait
trouvé en même temps la nature
formes.

d'œuvres originales et célèbres, ses beaux travaux sur l'attraction des ellipsoïdes? Admirés et loués par Poinsot, ils ont eu la fortune d'exciter entre les analystes et les purs géomètres une noble émulation, longtemps prolongée au très grand profit de la Science.

» M. Chasles a poursuivi son œuvre sans interruption depuis sa sortie du Lycée jusqu'à l'âge de quatre-vingt-sept ans. Soixante-huit années séparent la première Note de l'élève Chasles, insérée dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, du dernier Mémoire présenté à l'Académie des Sciences. Tous les géomètres, sans distinction de nationalité ni d'école, se sont inclinés devant ce vénérable vieillard; tous ont admiré sa puissance d'invention, sa fécondité, que l'âge semblait rajeunir, son ardeur et son zèle, continués jusqu'aux derniers jours.

» La vie de M. Chasles a été heureuse et simple; il a trouvé dans la Science, avec les plus grandes joies, une gloire qui sera immortelle, et dans la vive affection de ses amis, dans leur assiduité empressée aux réunions où il les conviait avec une grâce si aimable, dans leur respectueuse déférence en toute circonstance, la consolation de sa vieillesse. »

DISCOURS DE M. BOUQUET,

AU NOM DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

« Au nom de la Faculté des Sciences, je viens rendre un dernier hommage au collègue illustre que nous avons perdu. M. Chasles a été l'honneur des Mathématiques françaises. Ses travaux de Géométrie l'ont placé au premier rang parmi les savants de l'Europe, et, dans le grand développement de cette science à notre époque, ce sont ses découvertes qui ont eu la part la plus importante. L'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* est un Ouvrage capital, écrit avec une admirable clarté, et où l'auteur se montre un érudit en même temps qu'un inventeur de premier ordre. Les mêmes qualités se trouvent dans le *Traité de Géométrie supérieure* et les autres publications de notre collègue, dont l'influence a été si grande et si féconde sur les travaux contemporains.

Avec Dupin, Poncelet, Poinsot, M. Chasles pouvait être considéré comme un des élèves immédiats de Monge et de Carnot; il était parmi nous le dernier représentant de cette période féconde où la Géométrie, négligée depuis Clairaut, a pris un essor nouveau qui devait conduire à la transformation de l'Analyse tout entière. On sait que Lagrange, dans les derniers temps de sa vie, fatigué des recherches d'Analyse et de Mécanique, qui lui assurent pourtant une gloire immortelle, s'était livré à d'autres études et avait abandonné, pendant quelque temps du moins, les Mathématiques pour la Chimie, pour la Physique, pour les spéculations philosophiques. Cet état d'esprit de Lagrange, nous le rencontrons presque toujours à certains moments de la vie des plus grands savants. Les idées nouvelles qu'ils ont contribué à introduire dans la Science leur paraissent suffisamment développées; ils ont rempli leur tâche et éprouvent le besoin de tourner vers des sujets tout nouveaux l'activité de leur esprit. A l'époque de Lagrange, le programme de recherches et de travaux ouvert aux géomètres par la découverte du Calcul infinitésimal paraissait bien près d'être épuisé. Des équations différentielles plus ou moins compliquées à intégrer, quelques Chapitres à ajouter au Calcul intégral, à la Mécanique, et il semblait que l'on allait toucher aux bornes mêmes de la Science tout entière. Poisson, Fourier, Cauchy s'occupaient de créer des voies nouvelles pour les recherches d'Analyse, en étudiant l'application des théories mathématiques à la Physique et à la Mécanique moléculaire.

La Géométrie moderne, et ce sera pour elle un immortel honneur, est venue changer entièrement ces conditions en offrant aux travaux une voie nouvelle, et surtout en nous montrant par des succès éclatants que, même dans le sujet le plus simple, il y a toujours quelque chose à faire pour un esprit ingénieux et inventif. Poncelet, plus âgé et plus ancien que M. Chasles, a eu le mérite de donner l'impulsion et de créer deux méthodes générales, la *théorie des polaires réciproques* et celle des *propriétés projectives des figures*. Mais, après ces découvertes capitales, il a consacré tous ses efforts à l'étude de la Mécanique, où il a laissé des traces ineffaçables. M. Chasles, au contraire, est resté jusqu'à son dernier jour fidèle à l'étude de la Géométrie.

Il a professé pendant longtemps, il est vrai, le Cours de Machines

et d'Astronomie à l'École Polytechnique, et l'on peut dire qu'il a occupé avec éclat une chaire dont il a rappelé l'histoire, mais qu'il n'avait ni sollicitée ni même désirée. M. Chasles aimait à rappeler que l'illustre Dirichlet lui avait demandé un exemplaire de ses Leçons, avec l'intention de les prendre pour guide dans son enseignement. Mais il suffit de parcourir un instant ces feuilles autographiées pour reconnaitre que M. Chasles est resté avant tout un géomètre dans son enseignement. Pour lui, comme pour Poncelet, l'étude des machines a été féconde; seulement cette étude, qui a conduit Poncelet à ses belles découvertes de Mécanique, a sans aucun doute donné à M. Chasles l'idée première de cette suite ininterrompue de beaux travaux géométriques sur le déplacement d'une figure invariable qui constitue un de ses titres de gloire.

Les premiers travaux de M. Chasles sont insérés dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*. Ils ont pour objet des propositions relatives aux surfaces du second degré. Ces théorèmes nous paraissent aujourd'hui fort simples; mais ils avaient alors un réel intérêt, car on n'ignore pas que la théorie des surfaces du second degré venait à peine de naitre et qu'elle est due tout entière aux travaux de Monge et de ses disciples immédiats.

A cette époque, Gergonne dirigeait avec un grand éclat un Recueil qui a aujourd'hui pour l'histoire de la Géométrie un prix inestimable. M. Chasles ne tarda pas à entrer en correspondance avec le créateur des *Annales de Mathématiques* et lui envoya des travaux où il commençait à employer des méthodes purement géométriques. C'est dans les *Annales* que l'on trouve ces Mémoires sur les projections stéréographiques, dont les théorèmes sont devenus classiques et le resteront toujours. Malheureusement Gergonne, médiocrement encouragé et ne pouvant supporter le labeur écrasant d'une publication où il collaborait, bien souvent contre leur gré, avec tous les auteurs de Mémoires, fut obligé de l'interrompre et bientôt de la cesser définitivement.

Le succès qu'il avait obtenu, le goût des recherches qu'il avait contribué à développer avaient produit leur fruit. Quételet venait de créer en Belgique la *Correspondance mathématique;* Crelle faisait paraitre à Berlin les premières feuilles de son Journal, où il publiait les Mémoires d'Abel et de Jacobi. M. Chasles s'adressa à Quételet et continua à publier, soit dans les *Mémoires de l'Acadé-*

mie de Bruxelles, soit dans la *Correspondance mathématique,* les résultats de ses recherches de tous les instants. Ce qui caractérise surtout les travaux du maitre illustre dont nous déplorons la perte, c'est la fécondité, l'abondance vraiment merveilleuse des développements, la multiplicité infinie des faces et des aspects sous lesquels il considère la même proposition, l'habileté surtout avec laquelle, en transformant une proposition comme par degrés insensibles, il sait nous conduire à une proposition nouvelle tout à fait différente de la première.

Parmi les recherches de cette époque, il convient de signaler les admirables théorèmes que M. Chasles nous a fait connaitre sur les foyers et les focales des cônes et des surfaces de révolution du second degré, les Mémoires sur la Statique, sur la transformation parabolique, la Lettre à Quételet sur les coordonnées tangentielles, etc.

Cette longue suite de travaux devait aboutir à un chef-d'œuvre. En 1830, l'Académie de Bruxelles, qui, dans beaucoup d'occasions, a su choisir ses sujets de prix de la manière la plus heureuse, mit au Concours une étude des méthodes déjà célèbres de la Géométrie moderne. M. Chasles envoya son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie,* suivi du *Mémoire sur deux principes généraux de la Science, la dualité et l'homographie.* La première Partie était loin d'avoir le développement qu'elle a pris à l'impression. M. Chasles employa sept ans à achever l'*Aperçu* et à l'enrichir de Notes historiques, véritables modèles de discussion précise qui ne seront jamais dépassés. C'est en vain que Quételet le pressait de renvoyer son manuscrit; l'Académie lui faisait écrire : M. Chasles restait sourd à toutes ces supplications. Il complétait ses études classiques, apprenait les langues orientales pour pouvoir parler avec compétence de la Géométrie des Hindous, de celle des Latins et des Arabes.

Que de fois nous l'avons entendu parler avec un plaisir bien légitime de ce problème, dont la solution se trouve dans la *Géométrie de* Brahmegupta et dont personne n'avait bien compris l'énoncé : *Trouver un quadrilatère inscriptible à un cercle dans lequel l'aire, les diagonales, les perpendiculaires, leurs segments, le diamètre du cercle sont des nombres rationnels.* Tout cela a été éclairci par M. Chasles, et il serait grandement à désirer qu'on n'aban-

donnât pas, en France, l'étude de ces belles questions historiques.

Le temps nous manque non seulement pour apprécier dignement toutes les parties de l'*Aperçu historique*, mais pour indiquer, d'une manière même rapide, les autres découvertes de M. Chasles. Nous nous contenterons de faire remarquer qu'elles peuvent être divisées en deux classes bien distinctes. Les unes ont été consacrées à la constitution d'un corps de doctrine cohérent, pouvant fournir les éléments d'une méthode de nature à rivaliser avec la Géométrie de Descartes; elles ont été coordonnées dans le *Traité de Géométrie supérieure* et dans le *Traité*, malheureusement inachevé, *des Sections coniques*. M. Chasles pensait que la Géométrie doit avoir surtout pour but la recherche de quelque principe général d'où toutes les propositions découlent sans effort, et il a pris pour base la considération si féconde du rapport anharmonique. Tel était l'éclat jeté en France et à l'étranger par les travaux de M. Chasles et de Steiner, que l'on n'a pas accordé aux résultats publiés par quelques géomètres, profonds, mais peu clairs ou trop modestes, l'attention que ces travaux méritaient à bien des égards. Rendons aujourd'hui justice à tout le monde; mais, ne l'oublions pas, M. Chasles et Steiner ont eu et doivent conserver le mérite d'avoir fait aimer la Géométrie, d'avoir appelé à la tâche des légions de travailleurs, parmi lesquels se trouvent ceux-là même qu'il s'agit de replacer en meilleur rang; ils ont été, après Poncelet, les chefs et les conducteurs de ce grand mouvement qui a amené la Géométrie à la situation qu'elle occupe actuellement.

M. Chasles ne s'est pas contenté d'étudier les principes de la Géométrie moderne; la création d'un corps de doctrine nouveau n'a pas suffi à absorber son activité. Des travaux d'un autre genre lui assurent une gloire et une renommée qui dureront éternellement; car il a eu l'honneur de donner la solution définitive de quelques problèmes difficiles, examinés depuis longtemps sous toutes les faces par les géomètres, et aussi d'ouvrir à la Géométrie des voies nouvelles, qui se sont montrées fécondes et seront explorées par ses successeurs. Est-il nécessaire de rappeler les Mémoires sur l'attraction des ellipsoïdes et ces beaux théorèmes se rapportant à l'attraction en général qui figurent sans désavantage à côté des propositions de l'illustre Gauss. Mais, tandis que Gauss fait appel aux ressources les plus profondes du Calcul intégral, M. Chasles emploie

des considérations élémentaires et donne des démonstrations dont la simplicité a quelque chose de merveilleux.

Quand M. Liouville, reprenant en France l'œuvre commencée par Gergonne et brusquement interrompue, fonda son *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, qui a exercé une si heureuse influence sur le développement des études mathématiques dans notre pays, M. Chasles s'empressa de profiter de ce moyen nouveau de publication, et il partagea ses Communications entre ce Journal et les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

Depuis cette époque il a publié successivement les démonstrations relatives aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde, les théorèmes sur le déplacement dans le plan et dans l'espace, le principe de correspondance entre deux objets variables, enfin cette théorie des caractéristiques qui a exercé une si heureuse influence sur le développement de la Géométrie. Tous ces travaux et bien d'autres encore que nous ne pouvons citer, ou qui n'ont pas été publiés, M. Chasles les a faits sans abandonner ces recherches d'érudition, pour lesquelles il avait un goût particulier, accru par l'accueil si favorable qu'avaient reçu l'*Aperçu historique* et, plus tard, le Traité des *Porismes*.

M. Chasles n'avait jamais cessé de travailler; mais il avait continué de suivre sa voie, et il était désagréablement surpris quand on lui présentait, sous le nom de *Géométrie*, des Traités où sont employées les théories les plus élevées de l'Algèbre supérieure. Pourtant cette union de la Synthèse et de l'Analyse s'est montrée féconde, et l'ancienne Géométrie analytique de Descartes a su trouver, au contact des belles découvertes de la Géométrie moderne, une force et une jeunesse nouvelles, qui lui permettront de parcourir un champ vaste et encore inexploré. Quelle que soit l'opinion que nous puissions avoir à ce sujet, M. Chasles nous aura rendu le plus grand des services si nous apprenons à son école à ne jamais nous fier aux méthodes trop générales, à considérer toujours une question en elle-même et à trouver, dans les conditions particulières du problème, soit un chemin vers une solution facile, soit un moyen d'appliquer d'une manière élégante les procédés généraux que toute science digne de ce nom doit avant tout rassembler, si elle ne veut pas se réduire à n'être qu'une collection de faits isolés, sans suite, sans ordre et sans intérêt.

M. Chasles a longtemps professé à la Sorbonne; il y formait d'excellents élèves, et dans son auditoire se trouvaient toujours des étudiants étrangers que sa réputation européenne attirait de toutes parts.

Il remplissait dignement les devoirs de l'hospitalité, et — c'est là une preuve de sa bonté de cœur — il accueillait avec autant d'aménité et de bienveillance le savant illustre qui arrivait dans notre pays précédé d'une réputation méritée et l'étudiant modeste, encore obscur, qui venait simplement y compléter ses études.

G. D.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME QUATRIÈME.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Houël*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

6132 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
CIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IV. — ANNÉE 1880.

(TOME XV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ΞTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ. Helsingforsiæ. — In-4° (¹).

Tome X; 1875.

Nordenskiöld (*N.-K.*). — Sur la variation de température pour vingt-quatre heures à Hammarland (iles d'Åland). (171-190; suéd.).

Gyldén (*H.*). — Exposé succinct d'une nouvelle méthode pour le calcul des perturbations. (211-219; suéd.).

Les méthodes indiquées par Laplace, suffisantes pour le calcul des perturbations des grosses planètes, ne peuvent plus s'appliquer à la plupart des astéroïdes compris entre Mars et Jupiter, ni à plus forte raison aux comètes périodiques. Hansen a, le premier, découvert des méthodes à l'aide desquelles les perturbations des petites planètes peuvent se calculer avec la même précision que celles des anciennes; il a, de plus, fait le premier pas vers la découverte d'un moyen applicable à la détermination des perturbations des comètes périodiques et fondé sur l'idée du

---

(¹) Voir *Bulletin*, I, 274; VI, 108.

partage de l'orbite en régions pour chacune desquelles il emploie des formules différentes. Mais il restait à résoudre certaines difficultés de calcul qui exigeaient l'emploi de procédés mathématiques dont Hansen n'avait pas songé à se servir. M. Gyldén est parvenu à résoudre ce problème par l'introduction des fonctions elliptiques. Il expose dans le présent article un court résumé de sa méthode et termine par un exemple numérique relatif aux perturbations de la comète d'Encke par Jupiter.

Krueger (*A.*). — Recherches sur l'orbite de la planète Thémis, avec une nouvelle détermination de l'attraction de Jupiter. (283-295; all.).

Les calculs ont été faits d'abord par la méthode d'Encke, puis par celle de Hansen, qui ont donné des résultats concordants.

L'auteur en a conclu, par la comparaison avec les observations, la masse de Jupiter égale à $\frac{1}{1047,538 \pm 0,052}$.

Nordenskiöld (*N.-K.*). — Comparaison de la variation diurne de température à Helsingfors d'après les observations du professeur Hällström et d'après celles de l'Observatoire magnétique et météorologique. (299-323; suéd.).

Krueger (*A.*). — Sur la température moyenne à Helsingfors, d'après les observations de l'Observatoire magnétique et météorologique, 1845-1856. (379-388; all.).

Hällstén (*K.*). — Sur les lignes adiabatiques. (451-455; suéd.).

Bonsdorff (*E.*). — Considérations sur la construction des polygones réguliers. (457-464; suéd.).

L'auteur s'occupe, dans cette Note, des polygones réguliers dont la construction dépend de celle des racines d'équations du troisième degré. Il développe les calculs pour les polygones de 19 et de 73 côtés.

Krueger (*A.*). — Éloge de *Friedrich-Wilhelm-August Argelander*, lu dans la séance solennelle de la Société des Sciences de Finlande le 29 avril 1875. (18 p.; suéd.).

Suivi d'un Catalogue des publications d'Argelander.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXIX; 1879, 2e semestre.

N° 14; 6 octobre.

Tisserand. — Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où, les excentricités étant petites, l'inclinaison mutuelle des orbites est quelconque. (585).

Suite du travail important présenté dans les séances des 20 et 27 janvier, 3 février et 16 juin 1879. Nous l'analyserons quand il sera terminé.

Daubrée. — Sur une météorite sporadosidère tombée le 31 janvier 1879 à la Bécasse, commune de Dun-le-Poëlier (Indre). (597).

Perrier. — Extrait d'une Lettre à M. d'Abbadie sur les opérations exécutées pour la jonction de la triangulation de l'Algérie à celle de l'Espagne. (605).

N° 15; 13 octobre.

Laguerre. — Sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques. (635).

Effectuons la division du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$. Soient

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient et $Mx+N$ le reste; soit, de plus,

$$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)} = \frac{B}{x-b} - \frac{A}{x-a};$$

formons la suite

$$A,\ B - bC_0,\ B - b^2 C_1,\ \ldots,\ B - b^{m-1} C_{m-2},\ B.$$

En supposant $b > a > 0$, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre a et b est au plus égal au nombre de variations de cette suite, et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Si l'on considère la suite

$$A_0,\ A_0 a + A_1,\ A_0 a^2 + A_1 a + A_2,\ \ldots$$

des coefficients du quotient du polynôme $f(x)$ par $x - a$, le dernier terme de la suite étant $f(a)$, le nombre des variations de cette suite fournit une limite supérieure du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ plus grandes que a.

Warren de la Rue et *Müller* (*W.*). — Expériences sur la décharge électrique de la pile à chlorure d'argent. (637).

N° 16; 20 octobre.

Peters. — Découverte d'une petite planète. (660).

Henry. — Observation de la planète $\textcircled{\scriptsize 206}$ (Peters), faite à l'Observatoire de Paris. (661).

Bernardière (*de*). — Observations de déclinaison, d'inclinaison et d'intensité horizontale dans le bassin de la Méditerranée. (661).

Picard (*E.*). — Sur les fonctions entières. (662).

G(x) étant une fonction entière (développable en une série procédant suivant les puissances entières positives de x, convergente dans tout le plan), il ne peut y avoir plus d'une valeur finie a pour laquelle l'équation $G(x) = a$ ait un nombre limité de racines, à moins que G(x) ne soit un polynôme.

N° 17; 27 octobre.

Perrier (*F.*). — Détermination des longitudes, latitudes et azimuts terrestres en Algérie. (699).

Violle (*J.*). — Chaleurs spécifiques et points de fusion de divers métaux réfractaires. (704).

N° 18; 3 novembre.

Mouchez. — Admission d'élèves-astronomes à l'Observatoire de Paris. (725).

Mouchez. — Instructions nautiques sur les côtes de l'Algérie. (726).

Caligny (*A. de*). — Expériences sur un siphon renversé à deux branches horizontales, pouvant élever de l'eau à des hauteurs considérables, etc. (727).

Klercker (*de*). — Sur le spectre anormal de la lumière. (734).

Mercadier. — Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure des amplitudes. (736).

Picard (*E.*). — Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel. (745).

M. Weierstrass a montré que dans le voisinage d'un point singulier essentiel A toute fonction uniforme $f(x)$ s'approche autant qu'on le veut de toute valeur donnée. M. Picard complète cette proposition en montrant que, dans ce voisinage, il y a une infinité de valeurs de x pour lesquelles la fonction devient rigoureusement égale à a; il ne peut y avoir d'exception que pour deux valeurs particulières de a.

Soret et *Rilliet*. — Sur les spectres d'absorption ultra-violets des éthers azotiques et azoteux. (747).

Thollon. — Sur un nouveau spectroscope stellaire. (749).

Pauchon. — Sur les tensions de vapeur des solutions salines. (752).

Debrun. — Sur un thermomètre électro-capillaire. (755).

Hall (*A.*). — Les satellites de Mars en 1879. (776).

Léauté. — Détermination de la figure de repos apparent d'une corde inextensible en mouvement dans l'espace; conditions nécessaires pour qu'elle se produise. (778).

L'auteur démontre ce théorème élégant :

« Lorsqu'une corde inextensible en mouvement dans l'espace conserve une figure permanente, la grandeur de la vitesse est à chaque instant la même en tous les points. »

Si de plus les forces extérieures sont indépendantes du temps, la vitesse commune à tous les points est aussi indépendante du temps. Il en est de même de la tension, qui d'ailleurs varie d'un point à un autre.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire quand les forces extérieures ne varient pas avec le temps, la forme permanente de la corde en mouvement est la même que la forme d'équilibre de la corde au repos sous l'action des mêmes forces et ne dépend pas de la grandeur de la vitesse d'entraînement.

Rossetti (*F.*). — Sur les pouvoirs absorbant et émissif thermique des flammes et sur la température de l'arc voltaïque. (781).

N° 20; 17 novembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'astronome

royal, M. G.-B. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1879. (801).

Sainte-Claire Deville (*H.*). — De la température de décomposition des vapeurs. (803).

Cornu (*A.*). — Observation de la limite ultra-violette du spectre solaire à diverses altitudes. (808).

Sylvester. — Sur le vrai nombre des covariants fondamentaux d'un système de deux cubiques. (828).

L'énumération des invariants et covariants pour un système de deux cubiques binaires, donnée par M. Salmon (*Modern higher Algebra*, p. 186) et attribuée par lui à MM. Clebsch et Gordan, comprend huit covariants linéaires dont deux sont du degré 3 par rapport aux coefficients de l'une des cubiques et l'autre du degré 4. M. Sylvester, par sa méthode, avait précisément trouvé les mêmes invariants et covariants fondamentaux; mais, en refaisant ses calculs, M. Franklin, de Baltimore, a découvert qu'il y avait une faute d'Arithmétique commise par M. Sylvester dans son tamisage et que les deux covariants linéaires dont il a été parlé plus haut ne doivent pas figurer dans la Table. M. Sylvester démontre qu'en effet ces covariants ne sont pas fondamentaux, ce qui réduit de 28 à 26 le nombre des *Grundformen* pour un système de deux cubiques.

Appell. — Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes étudiées par M. Heine. (841).

Considérons le produit

$$P(z, m, n) = \prod_{\lambda=1,\mu=-n}^{\lambda=m,\mu=n} \frac{\lambda\omega' + \mu\omega}{z + \lambda\omega' + \omega\mu} e^{\frac{z}{\lambda\omega' + \mu\omega}},$$

où m, n sont deux entiers positifs, ω et ω' deux quantités imaginaires telles que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit positif; la fonction $P(z, m, n)$, quand on fait croître indéfiniment m et n, tend vers une limite fonction de z qui dépend de la loi suivant laquelle m et n augmentent ensemble à l'infini; les fonctions limites auxquelles on arrive en changeant cette loi diffèrent l'une de l'autre par un facteur de la forme e^{hz^2}. M. Appell étudie ces fonctions; il montre en particulier qu'elles peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction de M. Heine

$$\Omega\left(q^2, \frac{z}{\omega'}\right) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^{2n + \frac{2z}{\omega'}}},$$

où $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, et donne diverses propriétés de cette fonction Ω, en particulier la décomposition de la fonction *entière* $\frac{1}{\Omega}$ en *facteurs primaires*.

Bigourdan. — Observation d'un satellite de Mars (Deimos), faite à l'Observatoire de Paris. (852).

Picard (E.). — Sur les fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. (853).

L'auteur donne dans cette Note l'expression des fonctions uniformes doublement périodiques ayant dans chaque parallélogramme de périodes un nombre fini n de points singuliers essentiels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Désignant par $u(x)$ une fonction doublement périodique ordinaire aux mêmes périodes élémentaires que $f(x)$ et dont les pôles, simples d'ailleurs, soient précisément $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, M. Picard prouve que l'on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u')^k F_k[u(x)],$$

u' étant la dérivée de u et $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ représentant des fonctions uniformes de u, n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point ∞.

Thollon. — Taches et protubérances solaires observées avec un spectroscope à grande dispersion. (855).

N° 21; 24 novembre.

Perrier (F.). — Jonction géodésique de l'Algérie avec l'Espagne, opération internationale exécutée sous la direction de MM. Ibañez et F. Perrier. (885).

Poincaré. — Sur les formes quadratiques. (897).

Zeuthen. — Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. (899).

On doit à M. Chasles une expression du nombre des courbes d'un système à caractéristiques données qui sont tangentes à une courbe dont on connaît l'ordre et la classe. M. Zeuthen s'occupe dans cette Note de questions analogues, telles que les suivantes : Nombre des courbes d'un système doublement infini qui ont avec une courbe fixe deux contacts simples ou un contact du second ordre.

Nombre des surfaces d'un système doublement infini qui ont deux contacts simples ou un contact stationnaire avec une surface fixe [1].

---

[1] M. Zeuthen nous a prié de faire observer que le théorème, déduit dans cette note, sur les courbes ayant un contact du second ordre avec une courbe donnée, a été trouvé autrement par M. Halphen, dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. V, p. 14, 1876, et que M. Halphen indique aussi qu'on peut appliquer le même procédé à la détermintaion du nombre des courbes ayant deux contacts simples.

N° 22; 1er décembre.

Gyldén (H.). — Démonstration, au moyen des fonctions elliptiques, d'un théorème dans la théorie de la libration de la Lune. (932).

Laplace a démontré, dans la *Mécanique céleste* que les deux moyens mouvements de la Lune, de rotation et de révolution, sont parfaitement égaux entre eux, et que, pour qu'il en fût ainsi, il suffisait que, à l'origine, la différence des deux mouvements ait été comprise entre certaines limites.

La démonstration de Laplace, fondée sur l'intégration d'une équation différentielle, suppose que l'angle formé par le rayon vecteur et le premier axe principal soit très petit : M. Gyldén lève cette restriction.

L'équation dont il s'agit est

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{3}{2}n^2\frac{B-A}{C}\sin 2\varepsilon.$$

On en tire, en posant $k^2 = \frac{3}{2}\frac{n^2}{C}\frac{B-A}{C}$,

$$\varepsilon = \operatorname{am}\sqrt{2C}(t-t_0)(\operatorname{mod}.k) = \operatorname{am}\frac{n}{k}\sqrt{3\frac{B-A}{C}}(t-t_0).$$

Si le module est plus petit que l'unité, l'expression de ε renferme évidemment un terme qui est multiplié par le temps. Dans le cas contraire, on voit aisément que le terme multiplié par le temps disparaît et que l'égalité des deux mouvements a lieu.

Hirn. — Notice sur la mesure des quantités d'électricité. (933).

Plantamour. — Des mouvements périodiques du sol accusés par des niveaux à bulle d'air. (937).

Perrier (F.). — Jonction astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, opération internationale exécutée sous la direction de MM. le général Ibañez et le commandant Perrier. (945).

Zeuthen. — Détermination des courbes et des surfaces de deux systèmes qui ont entre elles des contacts doubles ou stationnaires. (946).

Lipschitz. — Sur des séries relatives à la théorie des nombres. (948).

L'auteur considère la série des nombres

$$-2,\ -3,\ -5,\ -6,\ -7,\ \ldots$$

contenant tous les entiers qui ne sont divisibles par aucun carré, chacun pris avec

le signe + ou —, selon qu'il résulte de la multiplication de facteurs premiers en nombre pair ou impair, et donne les propositions suivantes, où [N] désigne le plus grand nombre entier qui ne surpasse pas le nombre réel et positif N, $f(n)$ le nombre de diviseurs de n, $g(n)$ leur somme, $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers à n contenus dans la suite 1, 2, ..., n, où $D(n) = \frac{n^2+n}{2}$, et où, enfin, on suppose

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(t)=F(t),$$
$$g(1)+g(2)+\ldots+g(t)=G(t),$$
$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(t)=\Phi(t),$$
$$\left[\frac{\Omega}{1}\right]-\left[\frac{\Omega}{2}\right]-\left[\frac{\Omega}{3}\right]-\left[\frac{\Omega}{5}\right]+\left[\frac{\Omega}{6}\right]+\ldots=1,$$
$$F(n)-F\left[\left(\frac{N}{2}\right)\right]-F\left[\left(\frac{N}{3}\right)\right]\mp\ldots=n,$$
$$G(n)-2G\left[\left(\frac{N}{2}\right)\right]-3G\left[\left(\frac{N}{3}\right)\right]\mp\ldots=n,$$
$$D(n)-D\left[\left(\frac{N}{2}\right)\right]-D\left[\left(\frac{N}{3}\right)\right]\mp\ldots=\Phi(n).$$

Carpentier. — Sur un frein dynamométrique se réglant automatiquement. (950).

N° 23; 8 décembre.

Tisserand (F.). — Sur les satellites de Mars. (961).

Les deux satellites de Mars se meuvent à très peu près dans un même plan, qui diffère peu de l'équateur de la planète. M. Tisserand montre que, en supposant la loi des densités dans l'intérieur de Mars la même que dans l'intérieur de la Terre, et en lui attribuant, par suite, un aplatissement que les mesures directes ne peuvent pas mettre en évidence actuellement, les plans des orbites des deux satellites ne s'éloigneront jamais que très peu du plan de l'équateur de la planète.

Caligny (A. de). — Expériences sur les ajutages divergents, divisés en plusieurs parties par des lames. (976).

Lamey. — Sur la visibilité directe du réseau photosphérique du Soleil. (984).

Lipschitz. — Sur des séries relatives à la théorie des nombres. (985).

Les séries

$$\sum_1^{\infty}\frac{f(n)}{n^s},\quad \sum_1^{\infty}\frac{g(n)}{n^s},\quad \sum_1^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s},$$

où la variable s surpasse l'unité, sont toutes réductibles à la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

étudiée par Riemann. On a la relation

$$\frac{1}{\zeta(s)} = 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \mp \ldots.$$

Guébhard. — Anneaux colorés produits à la surface du mercure. (937).

N° 24; 15 décembre.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (1001).

Le système des quatre fonctions représentées, en faisant $s = 0, 1, 2, 3$, par l'expression

$$\Phi_s(u) = \frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{R_s \theta_0(u)},$$

où a et λ sont des constantes quelconques et R_s le résidu correspondant au pôle $u = iK'$ de $\frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{\theta_0}$, conduit à des équations différentielles données par l'auteur dans le t. LXXXVI des *Comptes rendus*, p. 777; il en déduit des équations différentielles linéaires du second ordre, dont la solution complète s'obtient, ainsi que celle de Lamé, dans le cas de $n = 1$, par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant la demi-période iK' pour infini simple.

Les mêmes relations conduisent M. Hermite à d'autres équations du second ordre dont on connaît une solution en vertu de leur formation même et qu'il intègre complètement.

Abbadie (A. d'). — Sur les variations de la verticale. (1016).

Tatin. — Nouvel aéroplane mû par une machine à air comprimé; détermination expérimentale du travail nécessaire pour faire voler cet appareil. (1024).

Appell. — Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. Heine. (1031).

Étude de la fonction

$$M(z) = \prod_{n=0,\, m=0}^{n=\infty,\, m=\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} q^{2n} t^{2m}\right),$$

où $\omega, \omega', \omega''$ sont des quantités imaginaires telles que dans $\frac{\omega'}{\omega}, \frac{\omega''}{\omega}$ les coefficients

de i soient positifs, et où l'on a posé

$$e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}} = q, \quad e^{\frac{\pi\omega'' i}{\omega}} = t.$$

Gouy. — Sur la mesure de l'intensité des raies d'absorption et des raies obscures du spectre solaire. (1033).

N° 25; 22 décembre.

Mercadier. — Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure des périodes.

N° 26; 29 décembre.

Resal (H.). — Note sur les différentes branches de la Cinématique. (1090).

Hermite. — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. (1092).

Continuant le cours de ses recherches sur une classe spéciale d'équations différentielles linéaires du second ordre, M. Hermite montre comment, connaissant le produit de deux solutions particulières A, B d'une telle équation, on peut former l'équation plus générale ayant pour solution l'expression

$$\mathrm{CA}e^{pu} + \mathrm{C'B}e^{-pu},$$

et applique ces résultats aux équations qu'il étudie; il forme ensuite l'équation linéaire du second ordre admettant pour solutions les deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce à pôle unique

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{H}(u+\alpha)e^{\rho u}}{\mathrm{H}(u)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{H}(u+\beta)e^{\sigma u}}{\mathrm{H}(u)}.$$

Picard (E.). — Sur une propriété de certaines fonctions analogues aux fonctions algébriques. (1106).

Soit $\mathrm{A}(z)$ une fonction de la variable z ayant en chaque point du plan un nombre fini m de valeurs et n'ayant dans toute l'étendue du plan qu'un nombre limité de points singuliers : il ne peut y avoir deux valeurs a, b pour lesquelles les équations $\mathrm{A}(z) = a$, $\mathrm{A}(z) = b$ aient seulement un nombre limité de racines, à moins que la fonction $\mathrm{A}(z)$ ne soit une fonction algébrique.

M. Picard donne l'application suivante de cette importante proposition.

Envisageons l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la forme suivante,

$$\mathrm{F}(x, y)\frac{dy}{dx} = (y-a)(y-b)(y-c)f(x, y),$$

a, b, c étant trois constantes différentes, F et f des polynômes en x et y : on suppose évidemment que les deux membres de l'équation n'ont pas de facteurs communs: si une telle équation admet une intégrale uniforme dans tout le plan, cette intégrale ne pourra être qu'une fonction rationnelle.

Liouville (*R.*). — Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n + Y^n + Z^n = 0$. (1108).

Cette relation, en supposant que X, Y, Z soient des fonctions rationnelles d'une même variable, ne peut avoir lieu que si $n = 1$.

Mercadier. — Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure de la phase. (1110).

Perruche. — Sur un nouveau brûleur électrique. (1112).

Guébhard. — Sur un nouveau procédé phonéidoscopique par les anneaux colorés. (1113).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Tome VIII; 1879. 2e série.

Sainte-Claire Deville (*H.*) et *Mascart* (*E.*). — Sur la construction de la règle géodésique internationale. (9-54).

Longchamps (*Gohierre de*). — Sur les nombres de Bernoulli. (55-80).

L'objet du travail de M. Gohierre de Longchamps est l'étude, par une voie entièrement élémentaire, du développement suivant les puissances décroissantes de x de la somme

$$S_{x,k} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + x^k.$$

L'auteur établit d'abord l'identité fondamentale

$$S_{x,k+1} = (x+1)\,S_{x,k} - (S_{1,k} + S_{2,k} + \ldots + S_{x,k});$$

il en déduit que le nombre $S_{x,k}$ est une fonction entière de x, de degré $k+1$, sans constante. Posant ensuite

$$S_{x,k} = A_k\,x^{k+1} + B_k\,x^k + (P_{k,1}\,x^{k-1} + P_{k,2}\,x^{k-2} + \ldots + P_{1,k+1}\,x),$$

il prouve que l'on a

$$A_k = \frac{1}{k+1}, \quad B_k = \frac{1}{2}, \quad P_{k,1} = \frac{k}{12},$$

$$P_{k,2} = P_{k,4} = P_{k,6} = \ldots = 0,$$

puisque, en posant

$$P_{k,2i-1} = \alpha_i \frac{k(k-1)\ldots(k-2i+2)}{12^i},$$

les nombres α_i sont définis par l'égalité

$$(2i+1)\alpha_i = -\sum_{p=1}^{p=i-1} \alpha_p \alpha_{i-p} \left(\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\frac{1}{5}\right).$$

Les nombres de Bernoulli sont liés aux nombres α par la relation

$$(-1)^i B_i = \alpha_i \frac{1.2\ldots 2i}{12^i}.$$

L'auteur compare ensuite la méthode qu'il a donnée pour le calcul des nombres α à celles que l'on connaît pour le calcul des nombres de Bernoulli et montre que ces dernières sont beaucoup plus compliquées.

Méray (*C.*). — Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées. (81-110, 327-360).

L'auteur appelle *assemblages binaires* des groupes de quantités réelles ou imaginaires, telles que

$$a_{k,0}, a_{k-1,1}, \ldots, a_{k-i,i}, \ldots, a_{0,k},$$

ces groupes étant soumis, dans leurs combinaisons, à diverses règles, dont les principales vont être expliquées.

k est la *taxe* de l'assemblage, et les $k+1$ quantités $a_{k,0}, \ldots a_{0,k}$ en sont les pièces; un assemblage de taxe $=0$ ne contient qu'une pièce; les assemblages de taxe $=1$ sont dits *primordiaux;* les assemblages de même taxe sont dits *isotaxiques;* un assemblage peut être désigné soit par une seule lettre, soit par l'ensemble des lettres qui désignent ses pièces, les premiers indices allant toujours en diminuant; deux assemblages isotaxiques sont égaux quand les pièces de même rang sont respectivement égales; autrement, ils sont inégaux.

La somme de plusieurs assemblages isotaxiques est l'assemblage isotaxique qui a pour pièces les sommes des pièces de mêmes indices dans les assemblages proposés. La différence se définit de même.

La multiplication de m assemblages donnés de taxes $k', k'', \ldots, k^{(m)}$ est l'assemblage de taxe $k = k' + k'' + \ldots + k^{(m)}$, dans lequel la pièce d'indice i, j $(i+j=k)$ s'obtient en prenant arbitrairement et respectivement, dans les assemblages donnés, m pièces dont les premiers indices ont une somme égale à i, les seconds une somme égale à j, en formant le produit de ces pièces, puis la somme de tous les produits de cette espèce. Le produit de plusieurs assemblages ne dépend pas de l'ordre dans lequel on peut disposer des facteurs; la multiplication des assemblages peut être fractionnée comme celle des quantités ordinaires; chaque pièce d'un produit est une fonction linéaire et homogène de celles d'un facteur quelconque considéré isolé-

ment. Pour qu'un produit de plusieurs assemblages soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul. Le produit de deux sommes A, B, composées chacune d'un nombre quelconque d'assemblages isotaxiques, est égal à la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant successivement chacune des parties de A par chacune des parties de B.

La formule de Newton est aussi applicable au développement de toute puissance d'un polynôme quelconque ayant pour termes des assemblages isotaxiques, en monômes entiers par rapport aux termes de ce polynôme.

Pour ce qui est de la division, opération inverse de la multiplication, les pièces de l'assemblage quotient se calculeront par la résolution des $k+1$ équations linéaires simultanées que l'on obtient en égalant respectivement aux pièces connues du dividende les $k+1$ pièces de mêmes indices dans le produit du diviseur par un assemblage indéterminé de taxe $k-k'$. Naturellement, l'opération n'est possible que sous certaines conditions.

Une fonction entière de plusieurs assemblages, regardés comme des *variables indépendantes*, s'obtient en opérant sur ces assemblages un nombre fini d'additions et de multiplications; pour que les additions soient possibles, il faut évidemment que les *termes monômes* soient isotaxiques, et par conséquent que, pour chaque terme, la somme de la taxe du coefficient et des produits de celles des variables qui y entrent comme facteurs par les exposants des puissances auxquelles elles y sont élevées soit un même nombre, qui est évidemment la taxe du polynôme; le degré d'un terme est la somme des exposants des variables qui y figurent; le degré du polynôme est le plus grand de ces nombres.

Pour qu'une fonction entière de quelques assemblages variables soit nulle identiquement, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls.

Si dans une fonction entière de plusieurs assemblages on remplace chaque variable par une somme de deux autres (isotaxiques), considérées l'une comme une valeur particulière de cette variable, l'autre comme son accroissement, puis que l'on ordonne par rapport aux puissances croissantes des accroissements le développement de la nouvelle fonction, le résultat aura précisément la forme de la *formule de Taylor :* de là se déduit la notion de la dérivée d'une fonction entière.

M. Méray étudie ensuite les équations entières à un assemblage inconnu; l'analogie se poursuit.

Si l'équation entière

$$f(x) = 0$$

admet la racine a et si l'on nomme α le moins élevé des ordres des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annulent pas pour $x = a$, le polynôme $f(x)$ est divisible par $(x-a)^\alpha$ et non par $(x-a)^{\alpha+1}$. Il faut toutefois remarquer que, en se bornant aux assemblages finis, une équation de degré m n'a pas nécessairement m assemblages-racines. La proposition fondamentale de la théorie des fonctions symétriques subsiste : « Si l'on nomme $x_1, x_2, \ldots, x_m$, m assemblages isotaxiques variables et $-p_1$, p_2, $-p_3, \ldots, (-1)^m p_m$ respectivement leur somme, celles de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, ... et leur produit, toute fonction entière et symétrique de ces assemblages est une fonction composée entière des fonctions symétriques simples $p_1, p_2, \ldots, p_m$. » M. Méray applique à ses assemblages les méthodes de Newton et de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques des m assemblages racines d'une équation de degré m, à un assemblage inconnu.

Dans un second Mémoire (p. 327), l'auteur applique les principes précédents à la théorie des équations simultanées.

« Il semble », dit-il, « bien difficile, pour ne pas dire impossible, de constituer

directement une théorie des équations simultanées, comparable pour la clarté et pour la simplicité du mécanisme à celle des équations à une inconnue. Il n'est pas non plus possible d'éviter ces équations, qui se présentent immédiatement dans tout calcul où sont mêlées plusieurs quantités; mais on tourne facilement ce double obstacle en considérant les inconnues comme les pièces d'un même assemblage et en transformant les équations simultanées dont elles dépendent en une équation *unique*, ayant cet assemblage pour inconnue. A partir de ce moment, il n'y a plus de difficultés théoriques, puisqu'on dispose de toutes les ressources de la théorie proprement dite des équations. »

C'est cette transformation qu'il exécute; elle revient, au fond, à élargir l'élimination ordinaire, en reliant les équations finales, où les inconnues sont absolument dissociées, par une suite d'équations intermédiaires qui forment avec elles un ensemble parfaitement équivalent aux équations proposées et où, en particulier, la solidarité des inconnues est rétablie.

Nous ne suivrons point M. Méray dans le détail de ces opérations; le caractère des propositions devient naturellement de plus en plus symbolique, et une analyse succincte serait difficilement intelligible : ce qui précède doit suffire pour faire apprécier la portée et l'originalité de son travail.

Weierstrass. — Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes (traduit par M. E. Picard). (111-150).

Cet important Mémoire sera analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

André (D.). — Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module. (151-168).

L'auteur prend pour point de départ l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3;$$

posant

$$\lambda(x) = u_0 + u_1 k^2 + u_2 k^4 + \ldots,$$
$$\lambda^3(x) = U_0 + U_1 k^2 + U_2 k^4 + \ldots,$$

il établit aisément la relation

$$\frac{d^2 u_t}{dx^2} + u_t = 2U_{t-1} - u_{t-1},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs entières et non négatives de l'indice t, si l'on convient de regarder comme nulles les quantités U_{-1} et u_{-1}; cette équation permet de calculer de proche en proche les quantités u_0, u_1, u_{t-1}, u_t, la dernière se déduisant des précédentes par une intégration.

M. André trouve

$$u_0 = \sin x,$$
$$U_0 = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),$$
$$u_1 = \frac{1}{16}(\sin x + \sin 3x) - \frac{x}{4}\cos x,$$
$$U_1 = \frac{1}{64}(2\sin x + \sin 3x - \sin 5x) - \frac{x}{16}(\cos x - \cos 3x),$$

. . . .

et est ainsi amené à attribuer à u_t la forme

$$u_t = \sum p_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum q_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

dans laquelle $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ désignent des coefficients numériques; i, j des entiers positifs ou nuls, et où les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la condition

$$2i + j \leqq t,$$

et le second à tous les systèmes satisfaisant à la condition

$$2i + 1 + j \leqq t;$$

l'auteur pose de même

$$U_t = \sum P_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum Q_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

où les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes possibles de valeurs des nombres i, j qui satisfont aux deux relations

$$2i \leqq t, \quad 2i + j \leqq t + 1,$$

et le second à tous les systèmes possibles satisfaisant aux deux relations

$$2i + 1 \leqq t, \quad 2i + 1 + j \leqq t + 1.$$

Ces formules sont obtenues par induction. Pour prouver qu'elles sont toujours vraies, M. André établit successivement que, si la forme trouvée pour les u est vraie pour tous les u dont l'indice ne dépasse pas t, la forme trouvée pour U_t est exacte, et que, si la forme trouvée pour les u est vraie pour tous les u dont l'indice est inférieur à t, elle est encore vraie pour u_t.

Il montre ensuite comment ces résultats conduisent au développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes de la variable x; en posant

$$\lambda(x) = A_0 \frac{x}{1} - A_1 \frac{x^3}{1.2.3} + A_2 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

les coefficients A sont, comme on le sait, des polynômes entiers en k^2; posant donc

$$A_r = \alpha_{r,0} + \alpha_{r,1} k^2 + \alpha_{r,2} k^4 + \ldots,$$

il s'agit de la détermination du coefficient $\alpha_{r,t}$; l'auteur trouve

$$\alpha_{r,t} = \sum_{0}^{t}{}_j \, \xi_j(r)(2j+1)^{2r},$$

où $\xi_j(r)$ est un polynôme entier en r du degré $t-j$; cette forme de $\alpha_{r,t}$ n'est autre que celle du terme général d'une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1^2)^{t+1}(z-3^2)^t(z-5^2)^{t-1}\ldots[z-(2t+1)^2]^t = 0.$$

Enfin M. André généralise la méthode employée par lui et montre qu'elle s'applique à l'étude d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ définie par l'équation

$$\sum_s C_s \frac{d^s \varphi}{dx^s} = \Phi,$$

dont le premier membre est celui d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, et au second membre de laquelle Φ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à la fonction φ, à la variable x, à l'indéterminée k, qui est analogue au module, et à des exponentielles de la forme $e^{\alpha x}$.

Tannery (*J.*). — Sur une équation différentielle du second ordre. (169-194).

L'auteur s'est proposé d'étudier l'équation linéaire du second ordre qui relie au module k l'intégrale complète de première espèce K; cette équation se ramène immédiatement à la forme

$$x(x-1)\frac{d^2 y}{dx^2} - (1-2x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{u} y = 0;$$

C'est un cas particulier de l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique; elle admet trois points singuliers $0, 1, \infty$; à chacun de ces points correspond un domaine C_0, C_1, C_∞; les deux premiers sont des cercles de rayon 1 dont les centres sont les points zéro et 1; le second est la portion indéfinie du plan extérieure au premier cercle; on peut encore considérer le domaine C'_∞ constitué par la portion indéfinie du plan extérieure au cercle C_1; à chacun de ces domaines correspondent deux séries ordonnées suivant les puissances entières de x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, convergentes dans tout le domaine considéré, au moyen desquelles et de $\log x$, ou $\log(x-1)$, on peut constituer un système fondamental de solutions; à ces séries s'en adjoignent d'autres ayant d'ailleurs les mêmes coefficients et procédant suivant les puissances de $\frac{x}{x-1}$ ou de $\frac{x-1}{x}$, convergentes d'un côté ou de l'autre de la perpendiculaire équidistante des deux points zéro et 1; tous ces domaines de convergence empiètent les uns sur les autres; dans les parties communes, plusieurs formes conviennent pour les solutions de l'équation différentielle linéaire. L'auteur montre comment on peut passer d'une forme à l'autre et applique les formules trouvées à la solution de cette question : « Étant donnés deux points quelconques A, B du plan reliés entre eux par un chemin continu quelconque, assujetti seulement à ne passer par aucun des points 0, 1, supposant que l'on parte du point A avec une solution de l'équation différentielle formée linéairement avec deux des fonctions qui conviennent pour la portion du plan où se trouve le point A, et que l'on suive le chemin AB, on demande d'exprimer, au moyen de deux des fonctions qui conviennent pour la portion du plan où se trouve le point B, la solution avec laquelle on arrive en ce point.

Enfin, dans le cas où la variable est réelle, il donne quelques résultats relatifs à la marche des fonctions qu'il a eues à considérer.

Darboux (*G.*). — Addition au Mémoire sur les fonctions discontinues. (195-202).

Dans un Mémoire présenté en janvier 1874 à la rédaction des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* et inséré au Tome IV de ce recueil (2e série) [1], M. Darboux a donné plusieurs exemples de fonctions continues n'admettant de dérivée pour aucune valeur commensurable de la variable et un exemple d'une fonction continue qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable. Il reprend aujourd'hui le raisonnement relatif à ce dernier cas, en le présentant sous une forme plus générale.

Considérons la fonction $\varphi(x)$ définie par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f(a_n, b_n, x)}{a_n}, \tag{1}$$

où a_n, b_n sont des fonctions numériques de n et où le symbole f désigne une fonction de x toujours continue, inférieure en valeur absolue à un nombre fixe A et admettant une dérivée seconde $f''(x)$ toujours inférieure à un autre nombre fixe B, en sorte que l'on ait, quelle que soit la valeur de x,

$$f(x+h) = f(x) + h(f'x) + \frac{h^2}{2}\theta B, \tag{2}$$

θ étant compris entre $+1$ et -1; on suppose en outre que les fonctions numériques a_n, b_n satisfassent aux conditions

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0, \\ &\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \ldots + a_{n-k} b_{n-k}^2}{a_n} = 0, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

k désignant un nombre fixe et déterminé quand n croît indéfiniment : la série (1), toujours convergente, définit une fonction de x toujours continue.

M. Darboux cherche ensuite une expression du rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Si l'on fait

$$a_p h = \varepsilon, \tag{4}$$

que l'on suppose ε fixe et que l'on donne à p des valeurs croissantes, h prendra successivement les valeurs

$$\frac{\varepsilon}{a_1}, \quad \frac{\varepsilon}{a_2}, \quad \frac{\varepsilon}{a_3}, \quad \ldots,$$

et tendra vers zéro ; il faudra, pour qu'il y ait une dérivée, que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

tende vers une limite indépendante de ε. Or les hypothèses précédentes conduisent

---

[1] *Voir* le *Bulletin*, t. X, 1re série, p. 76.

à l'égalité

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{n=p-k} b_n f'(a_n b_n x) \\ &+ \sum_{n=p-k+1}^{n=p} \frac{f[a_n b_n(x+h)]-f(a_n b_n x)}{a_n h} + R_p, \end{aligned} \right.$$

R_n étant infiniment petit avec $\frac{1}{p}$.

L'auteur donne diverses applications de cette formule.

Supposant d'abord

$$b_n = 1, \quad k = 1,$$

l'équation (5) devient

$$(6)\qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \sum_{n=1}^{n=p-1} f'(a_n x) + \frac{f(a_p x+\varepsilon)-f(a_p x)}{\varepsilon} + R_p,$$

et l'on voit aisément, en donnant à ε une seconde valeur ε', que la fonction $\varphi(x)$ n'aura pas de dérivée tant que l'expression

$$\frac{f(a_p x+\varepsilon')-f(a_p x)}{\varepsilon'} - \frac{f(a_p x+\varepsilon)-f(a_p x)}{\varepsilon}$$

ne tendra pas vers zéro, quels que soient ε, ε', quand p croîtra indéfiniment : cela a lieu pour une infinité de fonctions, en particulier pour

$$f(x) = \cos x.$$

M. Darboux traite avec quelque détail cet exemple dans le cas où l'on prend

$$a_p = 1.2.3\ldots p,$$

cas où les conditions (3) sont évidemment remplies, et montre comment on peut alors reconnaître la façon dont varie le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro.

Il applique ensuite la formule (5) à l'exemple traité dans son premier Mémoire, où

$$a_n = 1.2\ldots n, \quad b_n = n+1,$$

et termine en indiquant une généralisation de son procédé : au lieu de considérer la fonction définie par l'équation (2), on peut, en effet, considérer la fonction plus générale définie par l'équation

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_n(a_n b_n x)}{a_n},$$

où les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... sont assujetties uniquement à demeurer,

quel que soit x, inférieures à un nombre fixe A, leurs dérivées secondes $f_1''($
$f_2''(x)$, ... demeurant de même inférieures à un nombre fixe B.

Gyldén. — Sur la sommation des fonctions périodiques.
246).

Ce Mémoire, où l'auteur donne une extension importante de la formule
toire de Maclaurin, a été traduit par M. Callandreau, qui l'a fait suivre de
Notes destinées à préciser et à étendre quelques-uns des points abordés
travail par l'éminent astronome.

Considérant une fonction $F(t)$ susceptible d'être représentée, ainsi
dérivées, par une série de la forme

$$F(t) = M_0 + M_1 \cos(\psi + \mu t) + M_2 \cos 2(\psi + \mu t) + \ldots,$$

le problème dont s'occupe M. Gyldén consiste dans l'évaluation de la som

$$y_s = F(0) + F(\pi) + \ldots + F(s\pi).$$

En posant

$$z_s = y_s - \tfrac{1}{2}F(0) - \tfrac{1}{2}F(s\pi),$$

on trouve d'abord, par un procédé tout élémentaire,

$$z_s = \frac{1}{2}\sum_0^\infty M_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n(\psi + s\mu\pi) - \frac{1}{2}\sum_0^\infty M_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n\psi,$$

d'où l'on voit que, si l'on peut déterminer une fonction $\chi(t)$ de sorte que
dition

$$\int_0^{2\pi} \cos n(\psi + \mu t)\chi(t)\,dt = \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\,[\sin n(\psi + s\mu\pi) - \sin n\psi]$$

soit remplie, on aura

$$z_s = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F(t)\chi(t)\,dt.$$

En remplaçant $\cot\frac{1}{2}n\mu\pi$, dans l'équation de condition, par le développe

$$\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n\mu} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 2^2} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 4^2} + \cdots\right],$$

on obtient aisément

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi}\lim\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} \quad \text{pour} \quad k = \infty;$$

on en déduit la formule

$$z_s = \frac{1}{\pi}\lim\int_0^{2\pi} F(t)\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\,dt,$$

qui d'ailleurs ne donne rien de plus que la formule de Maclaurin; mais
employer pour $\cot\frac{1}{2}n\mu\pi$ un autre développement plus convergent.

Partant de la formule connue

$$\frac{\cot\frac{1}{2}\pi x}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right]}=\frac{2}{\pi x}\,\frac{\left[1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2i+3)^2}\right]\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots},$$

et décomposant le second membre en fractions simples, on le met sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{X_0^{(i)}}{x}+\frac{2xX_1^{(i)}}{x^2-2^2}+\frac{2xX_2^{(i)}}{x^2-4^2}+\cdots\right],$$

où

$$X_n^{(1)}=\frac{1^2}{(2n)^2-1^2},$$

$$X_n^{(2)}=\frac{1^2.3^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]},$$

$$X_n^{(3)}=\frac{1^2.3^2.5^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2][(2n)^2-5^2]};$$

en posant

$$\chi_i(t)=\frac{2}{\pi}\left[X_0^{(i)}+2X_1^{(i)}\cos 2t+2X_2^{(i)}\cos 4t+\ldots\right],$$

$$1-b_1^{(i)}x^2+b_2^{(i)}x^4-\ldots\pm b_i^{(i)}x^{2i}=\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right],$$

on obtient la relation

$$\int_0^{2\pi}\left[\cos n(\psi+\mu t)-b_1^{(i)}(n\mu)^2\cos n(\psi+\mu t)+\ldots\pm b_i^{(i)}(n\mu)^{2i}\cos n(\psi+\mu t)\right]\chi_i(t)\,dt$$
$$=\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\left[\sin n(\psi+s\mu\pi)-\sin n\psi\right],$$

d'où résulte la formule sommatoire

$$s_i=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[F(t)+b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2}+b_2^{(i)}\frac{d^4F(t)}{dt^4}+\cdots+b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]\chi_i(t)\,dt.$$

M. Gyldén donne ensuite divers développements trigonométriques pour les fonctions $\cos x\theta$, $\sin x\theta$, θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, à savoir

$$\cos x\theta = x\frac{2}{\pi}\sin x\frac{\pi}{2}\,P_i\left[\frac{1}{x^2}+\sum_1^{\infty}\frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\cos 2n\theta\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}\sum_0^{i}\frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\cos(2n+1)\theta\right],$$

$$\sin x\theta = \frac{2}{\pi}\sin x\frac{\pi}{2}\,P_i\left[\sum_1^{\infty}\frac{(2n)^2\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\sin 2n\theta\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}\sum_0^{i}\frac{(2n+1)^2\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\sin(2n+1)\theta\right],$$

$$\cos x\theta = \cos x\frac{\pi}{2} Q_i \left[1 + x^2 \sum_0^\infty \frac{(2n+1)\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \cos(2n+1)\theta - \sum_1^i \frac{2n\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \cos 2n\theta \right],$$

$$\sin x\theta = x\cos x\frac{\pi}{2} Q_i \left[\sum_0^\infty \frac{(2n+1)^2\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \frac{(2n)^2\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \sin 2n\theta \right],$$

où

$$\beta_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n} \cos n\pi \frac{(-1)^i 1^2.3^2\ldots(2i+1)^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]},$$

$$\beta_{2n+1}^{(i)} = \frac{2}{\pi} \frac{2}{2n+1} \sin\frac{2n+1}{2}\pi \frac{(-1)^i 2^2.4^2\ldots(2i)^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]} [2n-(2i+1)],$$

$$\alpha_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n} \frac{1}{2^{2i}} \frac{2i(2i-1)\ldots(i-n+1)}{1.2.3\ldots(i-n)} \frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i-1)},$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2i}} \frac{(2i+1)2i\ldots(i+n+2)}{1.2.3\ldots(i-n)} \frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i},$$

$$Q_i = \left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i)^2}\right],$$

$$P_i = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right].$$

L'auteur donne aussi, pour $\operatorname{tang} x\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{séc} x\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cosé c} x\frac{\pi}{2}$, des développements analogues à celui qui a été cité plus haut pour $\cot x\frac{\pi}{2}$.

Les additions de M. Callandreau portent sur la formule

$$z_t = \frac{1}{\pi} \lim \int_0^{2\pi} F(t) \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt \quad \text{pour} \quad k = \infty,$$

sur le développement de $\cot x\frac{\pi}{2}$, sur la formule sommatoire elle-même, sur l'extension de cette formule aux fonctions en général, sur la représentation des fonctions par des séries de sinus et de cosinus entre des limites données de la variable, et le calcul des coefficients par interpolation. Enfin, M. Gyldén a ajouté à son Mémoire primitif une Note sur quelques développements trigonométriques dont la valeur est indépendante de la variable entre des limites déterminées, développements déduits par différentiation des équations

$$0 = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta,$$

$$0 = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta.$$

et une autre Note sur un artifice de calcul pour rendre les séries suivant l'anomalie excentrique plus convergentes.

Margottet. — Recherches sur les sulfures, les séléniures et les tellurures métalliques. (247-298).

Emmanuel (D.). — Étude des intégrales abéliennes de troisième espèce. (299-326).

L'auteur part des propriétés établies par M. Briot dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, propriétés relatives aux fonctions Θ dont les p arguments sont les intégrales normales de première espèce augmentées chacune d'une constante arbitraire et obtient, dans le cas général où l'équation admet des points critiques d'un ordre quelconque, l'expression des intégrales de troisième espèce au moyen de la fonction Θ.... Il en déduit simplement les principales propriétés de ces intégrales; puis, en se servant de considérations analogues, il parvient à exprimer, par les fonctions Θ, la fonction T, introduite par MM. Clebsch et Gordan, et définie par une somme de p intégrales normales de troisième espèce; en faisant de cette fonction le même usage que les deux géomètres allemands, il obtient, sous la forme donnée par M. Briot, la solution du problème de l'inversion, solution qui ne suppose plus, comme dans le Traité de MM. Clebsch et Gordan, que les points critiques soient du second ordre.

Méray (C.). — Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées (suite). (327-360).

Puiseux (P.). — Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune. (361-444).

Floquet (G.). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (Supplément, 1-131).

Ce travail, qui a été l'objet d'une Thèse présentée devant la Faculté des Sciences de Paris, a été analysé dans le *Bulletin* (2ᵉ série, t. III, Iʳᵉ Partie, p. 289).

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. SCHUMACHER, herausgegeben von Prof. Dʳ C.-A.-F. Peters. Kiel ([1]).

Tome XCV, nᵒˢ 2237-2280; 1879.

Goldney (G.-A.). — Observations d'étoiles doubles faites, en 1878, à l'Observatoire de l'Université de Durham. (1-6).

Les observations sont faites avec un équatorial de 6,3 pouces anglais d'ouverture et un micromètre à double image d'Airy.

([1]) Voir *Bulletin*, II_2, 121.

Bakhuyzen (*S.*) et *Kapteyn* (*J.-C.*). — Observations des étoiles de l'amas de Persée, faites en 1876-1877 à l'héliomètre de Leyde. (6-14).

Oppolzer (*Th.*). — Note sur le développement du quotient différentiel de l'anomalie vraie et du rayon vecteur en fonction de l'excentricité dans les orbites voisines d'une parabole. (13-16).

Bredikhine (*Th.*). — Note sur la mesure des longueurs d'onde des bandes lumineuses du spectre de la comète de Brorsen. (15-16).

Les bandes lumineuses ont pour longueur d'onde :

A.................	551,3
B....	513,2
C.....	465,5

Frölich (*O.*). — Réponse aux remarques du Dr Albrecht sur la vitesse de transmission des courants électriques, publiées dans le nº 2244 des *Astronomische*. (17-18).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations diverses, faites en 1876-1878 à l'Observatoire de Hamilton College. (19-20).

Observation du passage de Mercure du 6 mai 1878. Éclipse solaire du 29 juillet 1878. Éclipse de Lune du 12 août 1878. Occultations d'étoiles.

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations et orbite parabolique de la comète I de 1878, d'après les observations d'Hamilton College. (21-22).

Wolf (*R.*). — Lettre sur le nombre relatif des taches solaires de 1867 à 1878. (23-24).

Le minimum n'est pas encore atteint en 1878.

Galle (*J.-G.*). — Note sur le calcul des erreurs de déclinaison dans les observations de Flore faites en 1873. (25-28).

Bredikhine (*Th.*). — Sur la constitution probable des queues de comètes. (27-30).

Dans ses études sur les queues des comètes, M. Bredikhine a divisé ces astres en trois classes caractérisées par les valeurs 11, 1,3 et 0,2 pour la force répulsive $1-\mu$. Zöllner a, d'un autre côté, montré que dans la théorie électrique les forces répulsives du Soleil sont inversement proportionnelles aux poids des molécules. L'auteur fait remarquer qu'on arrive alors presque identiquement aux nombres qu'il a déterminés par l'expérience en admettant que les trois types de comètes seraient composés ou d'hydrogène, ou de carbone, ou de fer.

Pickering (*E.-C.*). — Appel aux astronomes pour la détermination des grandeurs des étoiles voisines de la Polaire. (29-32).

Bakhuyzen (*S.*) et *Kapteyn* (*J.-C.*). — Observations méridiennes des étoiles employées par M. Gill pour les observations de Mars, faites en 1877 au cercle méridien de l'Observatoire de Leyde. (33-42).

Thraen (*K.*). — Détermination des éléments de (189) Phthia d'après cinq positions normales de la planète en 1878. (41-46).

Lamp (*E.*). — Éphéméride de la comète de Brorsen pour mai et juin 1879. (45-46).

Tempel (*W.*). — Découverte et observations de la comète II de 1867, faites à Arcetri en avril et mai 1879. (45-46).

Zona (*T.*). — Éléments d'Ismène (190). (47-48).

Doolittle (*C.-L.*). — Note sur les déclinaisons moyennes et les mouvements propres de 58 étoiles ainsi que sur la latitude de l'Observatoire Sayre. (49-62).

La latitude de l'Observatoire Sayre, dépendant de l'Université de Lehigh (Pensylvanie), est fixée à

$$40°36'23'',887 \pm 0'',036.$$

Holetscheck (*J.*). — Observations méridiennes de petites planètes, faites en 1878-1879 à l'Observatoire de Vienne. (61-64).

Knorre (*V.*). — Observations des planètes (195) et (196), faites à Berlin en mai 1879. (63-64).

Ventosa (*M.-V.*). — Observations méridiennes de la planète (192), faites à Madrid en avril 1879. (63-64).

Oppenheim (*H.*). — Note sur les orbites des planètes (190) Ismène et (189) Phthia. (65-68).

Harzer (*P.*). — Éléments et éphéméride de la comète périodique de Brorsen. (67-70).

Les éléments anciens sont corrigés à l'aide des observations de l'apparition de 1879.

Meissel. — Note sur la résolution des triangles sphériques. (69-74).

Robbers (*J.*). — Éléments et éphéméride de (182), calculés d'après quatre observations. (73-76).

Gautier (*R.*). — Éphéméride de la comète II de 1867 (comète de Tempel) pour les mois de mai, juin, juillet et août 1879. (77-80).

Les éléments anciens ont été corrigés d'après les observations d'avril 1879.

Seyboth (*J.*). — Éléments elliptiques définitifs de la comète III de 1874 (comète de Coggia) d'après les observations méridiennes de Moscou. (79-80).

La période de la comète serait de 5711 ans.

Doberck (*W.*). — Note sur la distribution des orbites planétaires. (81-82).

Birmingham (*J.*). — Observation d'un nouveau cratère lunaire, situé entre Landsberg et Rheinhold. (81-82).

Bakhuyzen (*S.*). — Note sur les ascensions droites des étoiles de M. Gill et sur l'erreur personnelle dans l'observation des étoiles de diverses grandeurs. (81-96).

L'auteur montre par des expériences directes que le passage d'une étoile derrière un fil est observé d'autant plus tard que l'étoile est plus faible. Il y a donc dans les observations de passage une sorte d'équation personnelle, fonction de l'éclat de l'étoile observée.

Souchon (*A.*). — Note sur une inégalité du quatrième ordre qui existe dans les moyens mouvements des satellites Titan et Japhet de Saturne. (97-102).

Watson (*J.-C.*). — Note sur son observation de la planète intramercurielle pendant l'éclipse du 29 juillet 1878. (101-106).

L'auteur s'attache à défendre contre les critiques de M. Peters les procédés employés par lui dans l'observation de l'éclipse.

M. Watson annonce ensuite qu'il doit prendre, le 1er octobre 1879, la direction d'un nouvel Observatoire construit à Madison (Wisconsin) par M. C. Washburn, l'ancien gouverneur de l'État. Il est remplacé à Ann-Arbor par l'un de ses élèves, le professeur M. W. Harrington.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1878-1879 à l'équatorial de l'Observatoire de Leipzig. (105-110).

Hall (*A.*). — Note sur le mouvement d'Hypérion. (109-112).

M. A. Hall a déterminé à nouveau les éléments de l'orbite d'Hypérion par la combinaison des observations faites en 1852-1853 par M. Lassel et des positions obtenues en 1875 à Washington.

Pritchett (*C.-W.*). — Observations des satellites de Saturne, faites en 1878 à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (113-120).

Tebbutt (*J.*). — Éclipses des satellites de Jupiter, observées en 1878 à Windsor (N. S. W.). (119-122).

Société des Sciences de Harlem. — Programme des questions proposées pour les prix à décerner en 1881. (121-124).

1° Calculer d'une manière rigoureuse l'orbite de la comète de 1815, qui, observée par Olbers, doit revenir à son périhélie en 1887.

2° Faire la critique du Mémoire de M. Serpieri relatif à la lumière zodiacale, qui ne serait, suivant l'astronome italien, qu'un phénomène de l'atmosphère de la Terre.

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites en février et mars 1879 à Windsor. (123-126).

Sawyer (*E.*). — Note sur l'étoile variable R du Bouclier. (125-126).

Beck (*A.*). — Occultation des Pléiades, observée à Riga le 31 janvier 1879. (127-128).

Borelly. — Découverte de la planète (198), faite le 14 juin 1879 à Marseille. (127-128).

Swift (*L.*). — Découverte d'une comète (comète III de 1879), faite à Rochester le 20 juin 1879. (127-128).

Winnecke. — Observation de la comète Swift, faite à Strasbourg le 21 juin 1879. (127-128).

Albrecht. — Résumé des observations de différences de longitude faites en Allemagne par le Service géodésique. (129-142).

Les déterminations télégraphiques de longitude faites pendant ces dernières années en Allemagne ont couvert le territoire d'une sorte de réseau de triangles, en sorte que la différence de longitude de deux points peut, en général, être obtenue à l'aide de plusieurs trajets électriques différents. Entre les divers résultats immédiats des déterminations astronomiques, il existe donc une série d'équations de conditions propres à compenser les erreurs accidentelles.



En tenant compte de ces conditions, M. Albrecht arrive aux résultats suivants :

	Différence de longitude.
	m s
Berlin-Greenwich	— 53.34,908
» Paris	— 44.13,883
» Bregenz	— 14.28,586
» Vienne	+ 11.46,312
» Altona	— 13.48,555
» Wilhelmshaven	— 20.59,700
» Leyde	— 35.38,557
» Bonn	— 25.11,615
» Mannheim	— 19.44,393
» Strasbourg	— 22.30,206
» Munich	— 7. 8,778
» Prague	+ 4.17,049
» Leipzig	— 4. 0,891
» Brocken	— 11. 6,463
» Göttingue	— 13.48,666

Cruls (*L.*). — Observations de la comète II de 1867 (comète de Tempel), faites à Rio-Janeiro en mai 1879. (141-142).

Tupman (*G.-L.*). — Observations de la planète (198), faite à Greenwich en mai 1879. (141-142).

Winnecke. — Observations de la comète II de 1879, faites à Strasbourg. (143-144).

Borelly. — Observations de la planète (198), faites à Marseille les 13 et 14 juin 1879. (143-144).

Kühnert (*F.*). — Remarques sur la nouvelle méthode de M. Oppolzer pour le calcul des oppositions des planètes. (145-150).

Holetschek (*J.*). — Observations d'occultations et d'éclipses des satellites de Jupiter, faites à Vienne en 1877 et 1878. (149-152).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites en 1879 à Athènes. (153-156).

Bredikhine (*Th.*). — Remarques sur la constitution des queues des comètes. (155-156).

Holetschek (*J.*). — Éléments et éphéméride de la comète de Swift, comète III de 1879. (157-158).

Bruhns (*C.*). — Observation de la comète II de 1879, faite à Leipzig. (158-159).

Rodgers (Amiral *J.*). — Observations de petites planètes, faites en 1876 à l'Observatoire naval de Washington. (160-172).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations du Soleil, faites en vue de la recherche de la planète intra-mercurielle. (173-174).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète II de 1867 (comète de Tempel), faites à Athènes en 1879. (173-174).

Tupman (*G.-L.*). — Observation de la comète II de 1879, faite à Greenwich le 25 juin 1879. (173-174).

Rodgers (Amiral (*J.*). — Observations de petites planètes, faites en 1876 à l'Observatoire naval de Washington. (175-188).

Zelbr (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète III de 1879 (comète de Swift). (187-188).

Anton (*F.*).— Observation de la comète III de 1879, faite à Vienne le 26 juin 1879. (187-188).

Winnecke. — Observations, éléments et éphéméride de la comète III de 1879. (189-190).

Hall (*A.*). — Note sur Saturne. (191-192).

En appliquant les théories de Laplace, l'auteur montre que la densité de Saturne va en augmentant de la surface vers le centre, et, comme la densité moyenne de Saturne est les $\frac{3}{4}$ de celle de l'eau, il faut que le liquide qui couvre sa surface ait une très faible densité.

Konkoly (*N. von*). — Observations du spectre de la comète de Brorsen. (193-196).

Les trois bandes lumineuses du spectre ont la même réfrangibilité que les trois lignes brillantes de l'hydrogène carboné.

Schwab (*F.*). — Observations d'étoiles variables, faites en 1878 à Klausenburg. (195-198).

Doberck (*W.*).— Note sur l'éclat et la parallaxe des étoiles doubles. (197-200).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète II de 1867, faites à Arcetri pendant son retour de 1879. (199-202).

Todd (*D.-P.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites en 1878 à Washington. (201-204).

Doberck (*W.*). — Note sur la distribution des étoiles doubles. (205-206).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (199), faite à Clinton le 10 juillet 1879.

Sadebeck (*M.*). — Tables pour le calcul des différences de distance sur le sphéroïde et sur la sphère. (207-220).

Gasparis (*A. de*). — Note sur une simplification du calcul des perturbations. (221-222).

Winterberg. — Note sur les lignes géodésiques. (223-228).

Fabritius. — Note sur les observations de l'étoile n° 37 de la zone + 89° du Catalogue de Bonn. (229-234).

Boss (*L.*). — Observations de la comète III de 1879 (comète de Swift), faites à l'Observatoire de Dudley. (233-236).

Lamp (*E.*). — Observations des comètes de Brorsen (II de 1867) et de la comète de Swift (III de 1879), faites en 1879 à l'Observatoire de Kiel. (235-238).

Tupman (*G.-L.*). — Observations de la comète de Swift (III de 1879), faites à l'Observatoire de Greenwich. (235-238).

Winterberg. — Note sur les lignes géodésiques (suite). (239-250).

Hartwig (*E.*). — Note sur la position de l'axe de Mars pendant l'opposition de 1879. (251-254).

Tietjen (*F.*). — Lettre au rédacteur. (253-254).

La planète découverte par M. Peters le 10 juillet est Frigga.

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (199), faite à Clinton le 28 juillet 1879. (253-254).

Palisa. — Découverte de la planète (200), faite à Pola le 7 août 1879. (253-254).

Marth (*A.*). — Éphéméride des cinq satellites intérieurs de Saturne pour 1879. (255-268).

Leistmann. — Éléments et éphéméride de la comète de Swift. (269-270).

Safford. — Éléments de la comète de Swift (comète III de 1879). (269-270).

Palisa. — Découverte d'une comète (comète V de 1879), faite à Pola le 21 août 1879. (269-270).

Winterberg. — Note sur les lignes géodésiques (suite). (271-280).

Marth (*A*.). — Éphéméride des satellites de Saturne en 1879. (279-284).

Lamp (*E*.). — Observation de la comète Palisa, V de 1879, faite à Kiel le 24 août. (283-284).

Konkoly. — Observations du spectre des météorites, faites à O-Gyalla. (283-286).

Hartwig. — Découverte d'une comète (IV de 1879), faite à Strasbourg le 24 août. (285-286).

Bruhns (*C*.). — Observations des comètes de Palisa (V de 1879) et d'Hartwig (IV de 1879), faites à Leipzig le 26 août. (285-286).

Strasser (*G*.). — Observations méridiennes de planètes, faites en 1878 à Kremsmünster. (287-290).

Palisa (*J*.). — Observations de petites planètes, faites en 1879 à Pola. (291-296).

Klein (*H.-J*.). — Note sur le nouveau cratère lunaire voisin de Hyginus. (297-300).

Franz (*J*.).— Éléments de la comète de Swift, comète III de 1879. (299-300).

Zelbr (*K*.). — Éléments et éphéméride de la comète de Palisa, comète V de 1879. (299-302).

Peter (*B*.). — Observations des comètes Palisa (V de 1879) et Hartwig (IV de 1879), faites à Leipzig le 28 août. (301-302).

Bruhns (*C*.). — Observations de la comète de Brorsen, faites en

Peter (*B.*). — Observations de petites planètes, faites en 1879 à l'équatorial de Leipzig. (307-314).

Bruhns (*C.*). — Lettre relative à l'Observatoire privé du baron d'Engelhardt à Dresde. (313-314).

Cet Observatoire, situé dans Leubnitzer Strasse, a pour position géographique :

Longitude est de Berlin..........	$1^m 18^s,37$
Latitude nord....................	$51°2'30'',95$

Il renferme un instrument de passage de Cook avec lunette de 50mm d'ouverture et un équatorial de Grubb avec lunette de 306mm d'ouverture.

Engelhardt (Baron *d'*). — Observations de la comète de Brorsen, faites à Dresde en avril et mai 1879. (313-314).

Hartwig. — Éléments et éphéméride de la comète IV de 1879. (315-316).

Copeland (*R.*). — Observations, éléments et éphéméride de la comète V de 1879. (317-318).

Swift (*L.*). — Lettre relative à la découverte de la planète intramercurielle par le Dr Watson et lui-même. (319-324).

L'auteur revient sur les circonstances qui ont accompagné son observation de l'éclipse du 28 juillet 1878 et s'attache à réfuter les critiques dont cette observation a été l'objet de la part du Dr Peters.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Note sur l'invention de l'oculaire, dit *oculaire négatif*. (323-330).

Une étude comparative du texte de la *Dioptrique* d'Huygens, des passages du *Systema saturnium*, où il est parlé des procédés d'observation, et de deux paragraphes du *Ragguaglio* de Campani conduit M. Oudemans à formuler les conclusions suivantes :

C. Huygens est l'inventeur de l'oculaire négatif à deux lentilles.

L'invention remonte probablement à l'année 1655; dans tous les cas, l'oculaire a été employé dès le 19 février 1656.

Dans l'oculaire de Huygens, qui n'était pas achromatique, les quantités f, d et f' étaient dans le rapport des nombres 4, 2 et 1.

L'oculaire de Campani, employé à Rome en 1664, se composait de trois lentilles et avait la disposition d'un oculaire terrestre.

Hall (*N.-A.*) et *Holden* (*E.-S.*). — Observations du compagnon de Sirius, faites à Washington en 1878-1879. (329-330).

Doberck (*W.*). — Nouveaux éléments de Σ3062. (331-332).

Ces éléments représentent l'ensemble des observations faites de 1782 à 1877.

Bruhns (*C.*). — Observations de la comète périodique de Tempel (II de 1867), faites à Leipzig en mai 1879. (333-334).

Hartwig (*E.*). — Notes sur la découverte de la comète IV de 1879. (335-336).

Rodgers (Amiral *J.*). — Avis sur la transmission des Livres et Mémoires destinés à l'Observatoire de Washington. (335-336).

Franz (*J.*). — Éléments de (151). (337-342).

Doberck (*W.*). — Note sur les couleurs des étoiles doubles qui tournent autour l'une de l'autre. (341-346).

M. Doberck a formé une série de Tableaux indiquant pour chaque couleur de l'étoile principale le nombre de fois que le compagnon a une teinte déterminée.

Millosevich (*E.*). — Observation de l'éclipse partielle de Soleil du 19 juillet 1879, faite à l'Observatoire de la Marine à Venise. (345-346).

Doberck (*W.*). — Notes sur l'éclat relatif des composantes des étoiles doubles. (347-350).

Zelbr (*K.*). — Éléments et éphéméride de la comète V de 1879. (349-350).

Jedrzejewicz. — Description de son Observatoire particulier, construit à Plónsk. (353-360).

La position géographique de l'Observatoire est :

Longitude est de Berlin............	$0^h 28^m 29^s$
Latitude nord.....................	$52°37'38'',8$

L'Observatoire renferme une lunette méridienne de 2 pouces d'ouverture et un équatorial de 162^{mm} d'ouverture construit par Steinheil.

Le Dr Jedrzejewicz s'occupe de mesures d'étoiles doubles.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les étoiles variables, faites à Athènes en 1878-1879. (359-366).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète de Brorsen, faites en 1879 à l'Observatoire de Kiel. (365-368).

Peter (*B.*). — Éléments et éphéméride de la comète V de 1879. (367-368).

Marth (*A.*). — Note sur le mouvement et éphémérides des satellites de Mars en 1879. (369-380).

Possner (*H.*). — Note sur l'étoile variable σ de Persée. (379-380).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte des planètes (202) et (203), faites à Clinton les 23 et 27 septembre 1879. (379-380).

Kowalczyk. — Observations de planètes faites au cercle méridien de Varsovie de 1875 à 1879. (381-382).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'étoile double OΣ298. (383-384).

Bredikhine (*Th.*). — Remarques sur la tache rouge qui se montre sur Jupiter. (383-384). G. R.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT (¹).

Tome LXXXVI; 1879.

Frobenius (*G.*). — Sur les équations homogènes aux différentielles totales. (1-19).

L'intégration des équations aux différentielles totales de trois variables et qui satisfont la condition d'intégrabilité a été enseignée par Euler dans une série d'exemples dont les coefficients sont presque toujours des fonctions homogènes de même ordre (*Inst. Calc. int.*, vol. III, p. 1-26). Cette observation a suggéré à M. Frobenius l'idée de s'occuper du problème général de rechercher les propriétés des équations homogènes aux différentielles totales entre n variables. A cet effet, il rappelle brièvement, au premier paragraphe, quelques théorèmes généraux puisés dans son Mémoire sur le problème de Pfaff (même Journal, t. LXXXII). Le deuxième paragraphe sert à étudier les changements que subit la classe d'une expression différentielle, lorsqu'on la multiplie par un facteur ou qu'on lui ajoute une différentielle complète. La classe d'une expression différentielle est égale au nombre minimum de variables indépendantes à l'aide desquelles l'expression différentielle peut être représentée. Des théorèmes généraux sur l'expression différentielle $a_1 dx + a_2 dx + \ldots + a_n dx$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des fonctions homogènes du même degré g, font l'objet du troisième paragraphe. Ces théorèmes sont mis en usage au § 4 pour transformer dans quelques exemples cette même expression différentielle en certaines formes appelées *réduites*. L'équation différentielle $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = 0$, où a_1, a_2, a_3 sont des fonctions homogènes du second degré, se trouve traitée au § 5, et enfin le § 6 donne une généralisation de l'équation différentielle de Jacobi.

(¹) Voir *Bulletin*, III_2, 139.

tickelberger (*L.*). — Sur des faisceaux de formes bilinéaires et quadratiques. (20-43).

Au commencement de son Mémoire, M. Stickelberger revient aux difficultés qui se présentent quand on transforme en somme de carrés une forme quadratique, au moyen de la formule générale de Jacobi. C'est en se servant d'une transformation préalable de la forme donnée et en la joignant à la transformation de Jacobi qu'on parvient à la représentation très élégante, en somme de carrés, d'une forme quadratique, telle que M. Darboux l'a employée dans ses recherches sur ces formes. Cependant M. Stickelberger trouve que les suppositions faites par M. Darboux ne sont pas toujours réalisées. Une difficulté semblable s'offre dans l'application de la formule de Jacobi faite par M. Weierstrass à la réduction de faisceaux de formes quadratiques. M. Darboux a perfectionné la forme de la représentation de M. Weierstrass, en réunissant la substitution donnée par M. Weierstrass à la formule de Jacobi. Cependant, tout en rehaussant la clarté du sujet par son procédé, il n'en a pas donné une démonstration rigoureuse où il aurait fallu montrer qu'on peut toujours satisfaire aux conditions de l'application de la formule par un choix convenable des constantes qui y rentrent.

A l'occasion d'une application de l'analyse de M. Weierstrass, M. Stickelberger a reconnu, au moyen d'un procédé indirect, que la difficulté peut toujours être levée par la substitution signalée en même temps par l'illustre géomètre ; mais tous ses efforts pour remplacer sa méthode par une autre directe ont échoué. Quoi qu'il en soit, son procédé indirect fait ressortir de nombreuses conséquences nécessaires aux recherches ultérieures et, par suite, non dépourvues d'intérêt. Voilà pourquoi l'auteur développe d'abord la méthode de réduction de M. Weierstrass pour les faisceaux de formes bilinéaires ou quadratiques. A cet effet, il prend un chemin qui n'écarte pas la difficulté inhérente à la déduction de M. Darboux, mais qui sert à l'éviter, et enfin il tire de ses considérations des règles d'après lesquelles on peut choisir les quantités dont dépend la réduction.

§ 1. Réduction de faisceaux de formes bilinéaires. — § 2. L'équivalence de faisceaux de formes bilinéaires. — § 3. Transformation du paramètre d'un faisceau de formes. — § 4. Explication de la proposition I à l'aide d'un exemple. — § 5. Choix symétriques des constantes $u_\alpha^{(\nu)}$, $v_\alpha^{(\nu)}$.

Frobenius (*G.*). — Sur l'invariant gauche d'une forme bilinéaire ou quadratique. (44-71).

Deux formes bilinéaires $A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ et $B = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ s'appellent *congrues* si A peut être transformée en B par des substitutions cogrédientes linéaires et dont le déterminant ne s'évanouit pas. Or les mêmes substitutions changent à la fois la forme conjuguée $A' = \Sigma a_{\beta\alpha} x_\alpha y_\beta$ de A en B', forme conjuguée de B ; par conséquent, elles transformeront aussi le faisceau de formes bilinéaires $rA - A'$ en $rB - B'$. Désignant donc le déterminant de substitution par p et le déterminant d'une forme bilinéaire G par $|G|$, on aura

$$|rB - B'| = |rA - A'|\, p^2.$$

Si le déterminant du faisceau $rA - A'$ ne s'évanouit pas identiquement pour toute valeur de r, on en tire

$$p^2 = |rB - B'| : |rA - A'|.$$

Il faut donc que le second membre de cette équation soit indépendant de r et que,

pour toutes les substitutions en nombre infini qui transforment A en B, le carré du déterminant ait la même valeur. Or deux cas sont alors possibles : le déterminant p peut avoir une même valeur pour toutes ces substitutions, ou bien tantôt l'une, tantôt l'autre de deux valeurs opposées. C'est pourquoi M. Frobenius a traité le problème de discerner sous quelle condition le premier cas ou le deuxième se produit, et encore celui de déterminer le signe du module de transformation p au premier cas, sans recourir à une substitution qui change A en B.

De même que pour deux formes congrues bilinéaires, on peut demander la valeur du déterminant de substitution pour deux faisceaux équivalents de formes quadratiques. La réponse à cette question exige des moyens bien différents de ceux qu'on a employés à la solution du premier problème. Tandis que celui-ci roule principalement sur le théorème qu'un déterminant gauche de degré pair est le carré d'une fonction entière de ses éléments, la solution de la seconde question, qui est beaucoup plus compliquée, revient à la duplication d'une certaine forme de degré n à n variables, decomposable en facteurs linéaires et qui est un contravariant du faisceau de formes quadratiques.

§ 1. Le déterminant de la transformation d'une forme en elle-même. — § 2. Calcul de l'invariant gauche d'une forme bilinéaire dans deux cas spéciaux. — § 3. Théorème de Sylvester sur les déterminants. — § 4. Représentation générale de l'invariant gauche d'une forme bilinéaire. — § 5. Sur le contravariant décomposable, de degré n, d'un faisceau de formes bilinéaires à $2n$ variables. — § 6. Sur un cas spécial du théorème établi. — § 7. Démonstration du théorème du § 5. — § 8. L'invariant gauche d'un faisceau de formes quadratiques. — § 9. Représentation rationnelle de l'invariant gauche.

Killing (*W.*). — Sur deux formes de l'espace à courbure constante et positive (ayant rapport au Mémoire de M. Newcomb, au tome LXXXIII du même Journal). (72-83).

M. Newcomb assigne à la forme de l'espace qu'il a étudiée toutes les propriétés supposées ou explicitement ou implicitement par Euclide, à l'exception de deux : il demande que la droite se ferme, et il exprime la distance de deux points situés sur les côtés d'un angle α, à la distance r du sommet, par la formule

$$S = \frac{2\alpha D}{\pi} \sin \frac{r\pi}{2D},$$

où $2D$ désigne les longueurs de la ligne droite. Il montre que ces hypothèses sont propres à servir de fondement à une forme de l'espace qui coïncide avec la forme euclidienne pour les parties infiniment petites. La forme établie a beaucoup de ressemblance avec celle qu'a trouvée Riemann. Cependant plusieurs propriétés déduites par M. Newcomb sont en contradiction directe avec quelques conséquences qu'avait tirées Riemann pour sa forme de l'espace. M. Newcomb, prenant les deux formes pour identiques, signale donc ces assertions de Riemann comme incorrectes. Tout au contraire, M. Killing montre, en premier lieu, que les propositions en question s'ensuivent en toute rigueur des hypothèses de Riemann; en second lieu, il montre comment les équations de la Géométrie de Riemann peuvent s'appliquer à une autre forme de l'espace, identique avec celle qu'a étudiée M. Newcomb; enfin il développe des considérations qui permettent de déduire la seconde forme de la première par une voie purement géométrique.

Reye (*Th.*). — Sur les systèmes de rayons de la seconde classe et sur la surface de Kummer de quatrième ordre à seize points nodaux. (84-107).

M. Kummer a découvert l'existence de sept systèmes essentiellement différents de rayons de second ordre sans courbes focales, et il a développé les propriétés les plus importantes de leurs surfaces focales. Peu de temps après, l'une de ces surfaces, la surface kummérienne de quatrième ordre et de quatrième classe, douée de seize points nodaux et de 16 plans tangents singuliers, a attiré de nouveau l'attention des géomètres comme surface des singularités du complexe général du second degré; et enfin, tout récemment, les relations remarquables qu'elle a avec les fonctions θ de deux variables ont fait le sujet de plusieurs Mémoires publiés au même Journal. La Géométrie synthétique n'avait pas encore trouvé de chemin pour aborder ces systèmes de rayons du second ordre et leurs surfaces focales.

M. Reye a maintenant réussi à s'emparer de ce sujet par les seules ressources de la Géométrie pure; c'est ainsi qu'il est parvenu à l'étude de tous ces systèmes de rayons, excepté celui de sixième classe et de première espèce. Pour plus de clarté, il se borne à développer les systèmes de rayons de seconde classe, systèmes réciproques à ceux que nous venons de mentionner. L'étude géométrique de ces systèmes se simplifie en ce qu'ils sont mis en relation projective avec des réseaux ordinaires de rayons et que leurs surfaces nodales sont représentées d'une manière uniforme sur une des surfaces connues du quatrième ordre. Les systèmes de second ordre et de seconde classe et la surface de Kummer font l'objet d'une recherche détaillée qui termine le Mémoire.

Milinowski. — La représentation de sections coniques sur des cercles. (108-115).

La Note contient une méthode qui sert à développer la théorie des propriétés harmoniques et focales des sections coniques, de même que les théorèmes de Pascal et de Brianchon, à l'aide d'une représentation des sections coniques sur des circonférences, sans qu'on ait besoin d'abandonner la Géométrie du plan et de recourir à la Géométrie du cône.

Sturm (*R.*). — Représentation de formes binaires sur la courbe gauche cubique. (116-145).

Frobenius (*G.*). — Théorie des formes linéaires à coefficients entiers. (146-208).

Si l'on transforme les deux formes bilinéaires

$$A' = \Sigma a'_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad A'' = \Sigma a''_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

des variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ par les substitutions linéaires

$$(P.)\, x_\alpha = \sum_\gamma p_{\gamma\alpha} x'_\gamma, \quad (Q.)\, y_\beta = \sum_\delta q_{\beta\delta} y'_\delta$$

en celles-ci

$$B' = \Sigma b'_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta, \quad B'' = \Sigma b''_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta,$$

la forme $A = rA' + A'' = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, contenant le paramètre indéterminé r, se change par les mêmes substitutions en $B = rB' + B'' = \Sigma b_{\gamma\delta} x'_\gamma y'_\delta$. Si les déterminants des substitutions (P.), (Q.) ne s'évanouissent pas, les substitutions inverses

$$(\text{R.})\, x'_\gamma = \sum_\alpha r_{\alpha\gamma} x_\alpha, \quad (\text{S.})\, y'_\delta = \sum_\beta s_{\delta\beta} y_\beta$$

rechangent la forme B en A. La totalité des formes $rA' + A''$, qui s'obtiennent quand on donne au paramètre r toutes les valeurs nouvelles, s'appelle un *faisceau* de formes, et deux faisceaux de formes sont appelés *équivalents* lorsqu'ils permettent la transformation réciproque que nous venons de décrire. Si les déterminants des deux faisceaux A et B ne s'évanouissent pas identiquement, la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence consiste, selon M. Weierstrass, en ce que, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, le plus grand diviseur commun d_λ des déterminants de degré λ de A soit égal à celui des déterminants de degré λ de B. L'équation A = B devenant identique en vertu des substitutions P et S, il s'ensuit

$$\sum_\alpha p_{\gamma\alpha} a'_{\alpha\beta} = \sum_\delta b'_{\gamma\delta} s_{\delta\beta}, \quad \sum_\alpha p_{\gamma\alpha} a''_{\alpha\beta} = \sum_\delta b''_{\gamma\delta} s_{\delta\beta}.$$

Si A et B sont équivalentes, ces équations homogènes linéaires au nombre de $2n^2$ entre les $2n^2$ inconnues $p_{\gamma\alpha}$, $s_{\delta\beta}$ doivent avoir un déterminant qui s'annule, et il est nécessairement possible d'attribuer aux constantes arbitraires qui entrent dans leur solution la plus générale des valeurs telles que les déterminants de degré n, $|p_{\gamma\alpha}|$ et $|s_{\delta\beta}|$ soient différents de zéro. C'est ainsi qu'on obtient la substitution P, et en résolvant les équations linéaires S on parvient à la substitution Q.

Des opérations rationnelles suffisent donc pour discerner si deux formes données sont équivalentes ou non, et des opérations rationnelles ouvrent la voie qui mène, dans le premier cas, à toutes les substitutions de transformation pour les deux formes. Tout au contraire, les autres démonstrations connues de la proposition de M. Weierstrass utilisent des opérations irrationnelles; car elles reviennent à mettre A sous une forme réduite dont les coefficients dépendent de l'équation $|a_{\alpha\beta}| = 0$. C'est pourquoi M. Frobenius s'était proposé, il y a longtemps, de trouver une démonstration où l'on ne rencontrât que des opérations rationnelles. Mais il démêla la solution de ce problème seulement après avoir traité le problème de théorie des nombres qui fait le sujet du Mémoire actuel. Il y envisage les différentes formes que subit une forme bilinéaire à coefficients entiers quand on introduit de nouvelles variables, soit pour les deux séries de variables, soit pour une seule.

§ 1. Les conditions pour l'équivalence de formes bilinéaires. — § 2. Déterminants unimodulaires. — § 3. Résolution de l'équation $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = f$. — § 4. Résolution de l'équation $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = f$ d'après une autre méthode. — § 5. La réduction d'une forme bilinéaire à la forme normale. — § 6. Diviseurs élémentaires simples et systèmes de diviseurs élémentaires composés. — § 7. Formes bilinéaires alternées. — § 8. Équations linéaires. — § 9. Modules. — § 10. Congruences linéaires. — § 11. L'équivalence de formes bilinéaires par rapport à un module. — § 12. Équivalence de systèmes de formes linéaires. — § 13. Équivalence de faisceaux de formes bilinéaires.

Reye (Th.). — Sur la configuration kummérienne de seize points et de seize plans. (209-212).

La configuration remarquable formée par les seize points nodaux et les seize



plans singuliers d'une surface kummérienne du quatrième degré peut se construire, selon M. Weber, linéairement au moyen de six points nodaux, et ceux-ci peuvent avoir, suivant le calcul de M. Weber, une position quelconque. Le travail de M. Reye contient une preuve directe synthétique de cette construction, reposant sur une propriété intéressante de l'hexagone dans l'espace; d'ailleurs elle montre comment, en partant de l'hexagone, on parvient aux propriétés essentielles connues jusqu'à présent de la configuration kummérienne.

Baltzer (*R.*). — Contribution à l'histoire du potentiel. (213-216).

Frobenius et *Stickelberger*. — Sur des groupes d'éléments permutables. (217-262).

La théorie des groupes finis d'éléments permutables a été fondée d'une part par Euler et Gauss, de l'autre par Lagrange et Abel; par ceux-là, dans leurs recherches de théorie des nombres sur les résidus des puissances; par ceux-ci, dans leurs travaux sur la résolution des équations. Après ces recherches fondamentales, Gauss et M. Schering ont fait faire des progrès à la théorie. Gauss [*Démonstration de quelques théorèmes concernant les périodes des classes des formes binaires du second degré* (*Œuvres*, II, p. 266)] enseigne la décomposition d'un groupe en groupes primaires dont les ordres sont premiers l'un avec l'autre. M. Schering (*Göttinger Abhandlungen*, t. XIV) apprend à les décomposer en groupes élémentaires dont les ordres sont indivisibles chacun par le suivant. La première décomposition de Gauss est complètement déterminée; celle-ci peut s'exécuter de différentes manières. Cette remarque a formé le point de départ de la recherche des auteurs du présent Mémoire, parce qu'elle entraîne la question de savoir s'il y a certaines propriétés communes à toutes ces décompositions. Il résulte d'abord que les ordres des groupes élémentaires que M. Schering gagne en décomposant le groupe entier sont des nombres constants, indépendants du choix des groupes partiels. En combinant encore la décomposition de Gauss avec celle de Schering et en pénétrant ainsi aux éléments indécomposables des groupes, ils ont enfin réussi, tout en approfondissant la notion des racines primitives, à montrer à quel point les facteurs irréductibles d'un groupe sont indépendants les uns des autres et à quel point ils sont dépendants.

La difficulté principale dans cette recherche, analogue à celle qui se rencontre dans la théorie des nombres entiers complexes, consistait à transformer les notions que présente la théorie élémentaire des nombres. Tandis que, par exemple, un nombre s'y appelle *premier* quand il n'est divisible que par l'unité et par lui-même, il fallait nommer ici un groupe *irréductible* quand il ne peut être décomposé en deux facteurs sans que l'un d'eux soit égal au groupe entier. Tandis que, dans la théorie élémentaire, une racine primitive de la congruence $x^{\mu} \equiv 1$ est un nombre qui n'a aucune puissance inférieure à la $n^{\text{ième}}$ congrue à l'unité, on est porté ici à nommer *primitive* une racine de cette congruence seulement quand cette racine n'a aucune puissance inférieure à la $n^{\text{ième}}$ égale à un résidu de $n^{\text{ième}}$ puissance.

§ 1. Définitions. — § 2. L'ordre d'un groupe. — § 3. Puissances et racines primitives. — § 4. Décomposition d'un groupe en facteurs primaires. — § 5. Le rang d'un groupe. — § 6. Décomposition d'un groupe en groupes élémentaires. — § 7. Les invariants d'un groupe. — § 8. Décomposition d'un groupe en facteurs irréductibles. — § 9. Éléments primitifs d'un groupe. — § 10. Les formes bilinéaires adjointes à un groupe. — § 11. Les restes des puissances de nombres rationnels entiers par

rapport à un module composé. — § 12. Les restes des puissances de nombres complexes entiers.

Netto (*E.*). — Contribution à la théorie des variétés. (263-268).

Kantor (*S.*). — Généralisation d'un théorème de Poncelet. (269-278).

Minding. — Sur la théorie des courbes à périmètre minimum et à aire donnée sur des surfaces courbes. (279-289).

Milinowski. — Contribution à la théorie des sections coniques. (290-296).

Nouvelle démonstration de la proposition que les courbes du second ordre engendrées par les formes fondamentales projectives de premier degré ne sont rien autre chose que les sections coniques. La méthode fait en même temps ressortir les relations qui existent entre les propriétés focales et les propriétés projectives des sections coniques.

Vogt (*Heinrich*). — Sur un hyperboloïde particulier. (297-316).

Si trois des génératrices d'un cône du second ordre sont normales entre elles, le cône contient une infinité de triples rayons normaux. Ce théorème de Joachimsthal forme le point de départ de la recherche qui développe d'abord une démonstration élémentaire de ce théorème et une autre, indépendante de celle-ci, de la proposition correspondante de l'hyperboloïde. L'étude des surfaces du second ordre caractérisées par trois génératrices normales fait voir que ces surfaces jouent dans l'espace le même rôle que l'hyperbole équilatère dans le plan : le cône, en vertu de la relation qu'il a avec le tétraèdre spécial dont les hauteurs se rencontrent en un point; l'hyperboloïde, en vertu de la relation qu'il a avec le tétraèdre général. De plus, notre hyperboloïde s'oppose à l'hyperboloïde orthogonal, de même que dans le plan l'hyperbole équilatère au cercle. C'est pourquoi l'auteur lui a donné le nom d'*hyperboloïde équilatère*.

§ 1. Le cône équilatère. — § 2. L'hyperboloïde équilatère. — § 3. L'hyperboloïde équilatère de rotation. — § 4. Relations entre l'hyperboloïde équilatère et le tétraèdre. — § 5. Le paraboloïde hyperbolique équilatère.

Königsberger (*L.*). — Sur une relation entre la multiplication complexe des intégrales elliptiques et la réduction de certaines classes d'intégrales abéliennes à des intégrales elliptiques. (317-352).

Sans entrer dans le détail de la recherche, nous nous bornerons à donner l'énoncé d'un théorème principal, résultat de la première moitié du Mémoire :

« Si une intégrale abélienne de première espèce et de la forme $\int\psi(z)\left(\sqrt[n]{R(z)}\right)^r dz$, où $n > 2$, doit être réductible à une intégrale elliptique, cette réduction n'est possible que pour les cas $n = 3, 4, 6$, et encore les intégrales elliptiques auxquelles on peut réduire les intégrales $\int\psi(z)\left(\sqrt[3]{R(z)}\right)^r dz$, $\int\psi(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^r dz$ ont-elles le module

de la multiplication complexe $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ou un autre, transformé de celui-ci, tandis que les intégrales elliptiques auxquelles on peut réduire les intégrales abéliennes $\int\psi(z)\left(\sqrt[6]{R(z)}\right)^r dz$ ont le module de la multiplication complexe $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou bien un autre, transformé de celui-ci. »

Le reste du Mémoire est consacré à l'étude d'intégrales abéliennes dépendant d'une même irrationnalité $\sqrt[n]{R(z)}$ et dont la somme est réductible à une intégrale elliptique.

E. L.

IL NUOVO CIMENTO, Giornale fondato per la Fisica e la Chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la Fisica esperimentale et matematica da E. Betti e R. Felici. — Terza serie.

Tome I; 1877.

Rossetti (*F.*). — Nouvelles expériences faites avec le radiomètre de Crookes. (5-10).

Ces expériences engagent l'auteur à conclure que le radiomètre contient un gaz, et que la rotation est due principalement à des rayons calorifiques obscurs ou lumineux et est un effet de l'action calorifique exercée par les faces plus échauffées des palettes sur le gaz environnant.

Beltrami (*E.*). — Considérations sur une loi potentielle. (10-21).

Si $\varphi(r)$ est en général la fonction potentielle élémentaire d'une action à distance et que l'on pose $\psi'(r) = r\,\varphi(r)$, si $h(r)$ est la densité avec laquelle une masse est distribuée à l'intérieur d'une sphère, et si $\varphi(r)$, $h(r)$ ont une expression analytique telle que l'on ait $\varphi(-r)=\varphi(r)$, $h(-r)=h(r)$, l'auteur montre quelle doit être l'expression de la fonction potentielle de la sphère et détermine ensuite le potentiel de la sphère sur elle-même. L'auteur applique ces considérations générales au cas de $\varphi(r)=e^{-\mu r^2}$, $h=\text{const.}$, et il en déduit que, si dans l'espace on suppose distribuée uniformément une matière qui agisse sur elle-même avec la loi potentielle $e^{-\mu r^2}$, elle est partout en équilibre. Si au contraire, tout en conservant la même loi potentielle, la matière est distribuée de façon à avoir $h(r)=\frac{c}{r}$ (et dans ce cas on ne pourrait pas appliquer toutes les conséquences de la théorie générale, parce que h cesse d'être une fonction paire), on a le théorème : « Si dans la matière qui agit suivant la loi potentielle $e^{-\mu r^2}$ se forme une condensation autour d'un point de façon que la densité varie en raison inverse de la distance à ce centre, l'action que la matière ainsi condensée exerce sur un point quelconque s'approche très rapidement, à mesure que l'on s'éloigne du centre de condensation, de la loi newtonienne ». L'auteur, dans un dernier paragraphe, rattache cette théorie à celle de la chaleur.

Pisati (*G.*) et *Saporito-Ricca* (*G.*). — Sur la ténacité du fer à différentes températures. (35-57).

Les résultats des expériences des auteurs concordent avec les résultats obtenus par M. Baudrimont et montrent que la ténacité du fer varie d'une façon irrégulière avec la température. Des résultats analogues se trouvent avec des fils cuits en présence de l'anhydride carbonique.

Ricci-Curbastro (*G.*). — Sur la déduction d'une nouvelle loi fondamentale d'Électrodynamique et sur la manière avec laquelle agissent les forces électro et pondéromotrices entre deux conducteurs filiformes. (58-72; 89-106).

Cet article est une revue des travaux de M. Clausius. L'auteur commence par exposer les considérations présentées par M. Betti dans son Cours sur les fonctions potentielles qui contiennent des termes dépendant des composantes des vitesses, et un théorème de M. Betti sur la manière dont doit dépendre de ces composantes la fonction potentielle, afin que soient vérifiés non seulement le principe des forces vives, mais aussi un principe analogue à celui des aires. Il fait voir ensuite que ces deux principes sont vérifiés en admettant pour l'action élémentaire électrodynamique soit la formule de Weber, soit celle de Riemann, soit enfin celle qu'a proposée M. Clausius. Les deux premières formules ne concordent pas avec l'hypothèse physique de M. Neumann; mais avec la troisième, si l'on est d'accord avec cette hypothèse, on ne peut plus satisfaire le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité. L'auteur termine cette revue en montrant que les résultats analytiques de la formule de Clausius sont d'accord avec les résultats expérimentaux.

Naccari (*A.*) et *Bellati* (*M.*). — Sur l'influence de la magnétisation sur la conductibilité thermique du fer. (72-88; 107-124).

Les auteurs ont répété avec plus de soin une expérience de M. Maggi pour déterminer l'influence que l'aimantation pouvait avoir sur la conductibilité du fer pour la chaleur, et ont trouvé que cette influence n'est pas appréciable.

Hoorweg (*J.-L.*). — Sur la propagation du son dans la nouvelle théorie des gaz. (125-133).

Traduction du résumé de ce Mémoire, publié par M. Rühlmann dans les *Beiblätter zu den Pogg. Ann.*

Bartoli (*A.*). — Appareil pour l'étude de la polarisation galvanique. (133-139).

Beltrami (*E.*). — Sur quelques questions d'Électrostatique. (139-157).

Le professeur E. Betti a donné dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei* la fonction potentielle d'une ellipse homogène en la déduisant de celle d'un ellipsoïde hétérogène; le professeur Dini en a déduit l'expression de la fonction potentielle d'une ellipse hétérogène, dans laquelle la densité varie suivant une loi connue.

Dans ce Mémoire, M. Beltrami, en se servant des formules de M. Dini, détermine la fonction potentielle d'un disque circulaire électrisé par influence sous l'action de forces symétriques autour de l'axe du disque. Il trouve ensuite que la quantité d'électricité libre sur le disque mis en communication avec la terre est donnée par la formule

$$E = \frac{2}{\pi} \int_0 \frac{P(u)\,u\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}},$$

dans laquelle a est le rayon du disque, $P(u, z)$ le potentiel des forces électriques d'induction. L'auteur fait, après, une application de ses formules au cas dans lequel les forces émanent d'un point placé sur l'axe du disque.

Pisati (*G.*). — Sur l'élasticité des métaux à différentes températures (181-215; II, 137-153; IV, 152-178; V, 34-49; 135-142; 145-160).

Beltrami (*E.*). — Sur la détermination expérimentale de la densité électrique à la surface des corps conducteurs. (215-233).

Si l'on a un conducteur sphérique chargé d'électricité en présence d'actions électriques et si l'électricité se met en équilibre sur le conducteur, on pourra calculer la quantité d'électricité qui se placera sur une portion très petite de la surface, et il sera permis de considérer cette portion de la sphère comme une petite calotte sphérique. Si maintenant sur le cercle base de cette calotte on construit un hémisphère externe au conducteur et plein de matière conductrice, on pourra regarder les deux conducteurs comme n'en formant qu'un. La distribution de l'électricité viendra à changer, et l'on pourra calculer la quantité d'électricité qui se portera sur la sphère plus petite. L'auteur démontre que cette quantité d'électricité qui va sur la sphère la plus petite est à peu près le triple de celle qui se trouvait sur la calotte de la sphère la plus grande qui avait le même cercle pour base. Ce théorème donne, par conséquent, la manière d'explorer la distribution de l'électricité sur la sphère donnée en prenant comme corps d'épreuve un hémisphère très petit dont la base est concave, afin de pouvoir l'appliquer exactement sur la sphère.

'ighi (*A.*). — Recherches expérimentales sur les décharges électriques. (234-268).

L'auteur étudie la forme et la couleur des étincelles électriques dans différents milieux et dans des conditions différentes.

Wiedemann (*G.*). — Sur les propriétés magnétiques des combinaisons chimiques. (269-272; II, 65-72; 252-259; III, 257-269).

Traduction d'un Mémoire important déjà publié dans les *Ann. der Physik und Chemie.*

Tome II; 1877.

Ricci (*G.*). — Sur la théorie électrodynamique de Maxwell. (5-27; 93-116).

Résumé de la partie du Livre de ... *tism* qui concerne la théorie mathématique de ... Faraday.

Righi (*A.*). — Recherches sur les décharges électriques. (28-38).

Suite du Mémoire précédent.

Luvini (*G.*). — Miroir vibrant pour la recomposition des couleurs du spectre. (39-42).

Roiti (*A.*). — Sur la propagation du son dans la théorie moderne des gaz. (42-65).

L'auteur, en partant de la théorie de Bernoulli sur les gaz, démontre que la vitesse moléculaire doit être égale à $\frac{3}{2}$ de la vitesse du son et examine quelques travaux d'autres physiciens sur le même sujet.

Pierucci (*F.*). — Sur une modification à la machine de Holtz de seconde espèce. (117-125).

Rossetti (*F.*). — Sur la température des flammes. (126-137).

Avec une pile thermo-électrique formée par un fil de platine et un fil de fer, l'auteur détermine la température de différentes flammes.

Pisati (*G.*). — Sur la dilatation, la capillarité et la viscosité du ... soufre fondu. (154-161).

L'auteur trouve que la dilatation, la capillarité et la viscosité du soufre fondu ... présentent un minimum vers 157°-160°, que la capillarité a un maximum vers 17...0° ... et la viscosité a son maximum à peu près à 195°. Il trouve aussi une grande différence entre les propriétés du soufre vierge et celles du soufre modifié par ... la chaleur.

Righi (*A.*). — Recherches expérimentales sur l'interférence de ... la lumière. (161-174; 181-205).

L'auteur a appliqué à l'étude de la diffraction et de l'interférence de la lumi... le spectroscope. Il applique sa méthode à une expérience d'Arago, avec laquelle ce physicien établissait qu'un rayon de lumière polarisée, en entrant dans un cri... de quartz dans la direction de l'axe, se transforme à l'intérieur de ce corps en d... rayons circulaires de directions opposées, qui se propagent avec différentes vite... L'auteur tend à prouver que l'expérience d'Arago ne démontre pas l'existence de rayons circulaires sortis du quartz.

Roiti (*A.*). — Expériences pour les leçons. (205-210).

...tion de deux appareils qui ont pour objet, le premier de démontrer l'in... ...systèmes d'ondes, le second de rendre évidents les effets de l...

Cintolesi (*J.*). — Sur un phénomène d'Optique physiologique. (211-216).

Sur les phénomènes de coloration qu'on observe en regardant le ciel à travers un disque tournant et muni de fentes.

Naccari (*A.*) et *Bellati* (*M.*). — Sur le rapport entre le raccourcissement des dimensions transversales d'une barre de caoutchouc étirée et l'allongement. (217-240).

Basso (*G.*). — Phénomènes de magnétisme observés dans le radiomètre. (240-248).

Betti (*E.*). — Sur le potentiel d'un système de conducteurs chargés d'électricité et de cohibents électrisés. (249-252).

Démonstration du théorème : « Le potentiel d'un système de conducteurs chargés d'électricité et de cohibents électrisés d'une façon quelconque est égal au potentiel des cohibents que l'on aurait quand tous les conducteurs seraient mis en communication avec la terre, plus le potentiel que l'on aurait pour les conducteurs soustraits à l'action des cohibents lorsque dans l'expression de ce potentiel on remplacerait les quantités d'électricité communiquées à chaque conducteur, ces mêmes quantités diminuées de celles qui resteraient sur les conducteurs si sous l'action des cohibents ils avaient été mis en communication avec la terre. »

Szily (*C.*). — Le principe de Hamilton et le second principe de la Thermodynamique. (259-262).

Résumé d'un Mémoire inséré dans le vol. CXLV des *Annales de Poggendorff*, dans lequel on déduit le second principe de la Thermodynamique du principe de Hamilton.

Tome III; 1878.

Roiti (*A.*). — La viscosité et l'élasticité subséquentes (*elastische Nachwirkung*) dans les liquides. (5-49).

Des oscillations d'une aiguille aimantée dans un liquide l'auteur déduit qu'une surface liquide peut, en certaines circonstances, acquérir, plutôt qu'une simple augmentation de viscosité, toutes les propriétés caractéristiques de ces actions moléculaires qui ont été observées dans les solides et ont reçu le nom d'*élasticité subséquente* ou *de retour*.

Marangoni (*C.*). — Défense de la théorie de l'élasticité superficielle des liquides. (50-68; 97-115; 193-211).

Pick (*E.*). — Sur un nouveau tellure. (68-71).

Appareil qui sert à montrer les changements des saisons, etc.

U. G. — Observations au Mémoire de l'ingénieur G. Grattarola, intitulé « De l'unité cristallonomique en Minéralogie. » (115-123).

Naccari (*A.*) et *Bellati* (*M.*). — Sur l'intensité du phénomène de Peltier à différentes températures. (123-162).

Ce Mémoire concerne principalement la vérification d'une théorie de Thomson.

Roiti (*A.*). — Sur la détermination des constantes des électromoteurs de Holtz et sur les courants donnés par ces électromoteurs. (163-183).

Parmi les résultats de l'auteur, citons les suivants : « La force électromotrice de la machine de Holtz est à peu près proportionnelle à la vitesse, et la résistance intérieure est approximativement indépendante de la vitesse. »

Righi (*A.*). — Sur la vitesse de la lumière dans les corps transparents magnétisés. (212-234).

Righi (*A.*). — Sur la concentration d'une solution magnétique au pôle d'un aimant. (235-237).

Rossetti (*F.*). — Sur la température du Soleil. (238-256).

Après avoir établi une formule différente de celles employées jusqu'à présent pour déduire la température d'un corps de son irradiation, l'auteur en fait l'application à la détermination de la température du Soleil; il trouve qu'elle ne doit pas être de beaucoup inférieure à 10 000° C. quand on tient compte de l'absorption de l'atmosphère terrestre, ni de beaucoup supérieure à 20 000° quand on veut tenir compte de l'absorption produite par l'atmosphère du Soleil.

Villari (*E.*). — Étude sur la chaleur développée par l'étincelle électrique dans des gaz différents. (270-274).

Le résultat des recherches de ce physicien est que l'échauffement du thermomètre croît proportionnellement à la quantité d'électricité qui se trouve dans la batterie.

Tome IV; 1878.

Villari (*E.*). — Sur le pouvoir émissif et sur la différente nature de la chaleur émise par différents corps échauffés à 100°. (5-34).

Beltrami (*E.*). — Sur quelques propositions de Clausius. (35-53).

Cette Note contient la démonstration simple de quelques formules contenues dans les Appendices de la troisième édition du Livre de M. Clausius, « Die Potentialfunction und das Potential ». Nous signalerons la formule, qui n'a pas été donnée

par M. Clausius,

$$\int_\sigma \frac{d}{dn'}\left(r^2\frac{dr}{du}\right)\frac{d\omega'}{r^2}=0,$$

dans laquelle σ est une surface fermée, u est une quelconque des trois coordonnées x, y, z, et n' est la normale extérieure à l'élément $d\omega'$ de la surface.

Streintz (*E.*). — Les courants induits dans une barre de fer aimantée transversalement. (53-70).

Rossetti (*F.*). — Sur la température des flammes (deuxième Communication). (70-79).

Roiti (*A.*). — Sur les décharges de la machine de Holtz dans les gaz raréfiés; réponse au Dr W. Feddersen. (79-91).

Bartoli (*A*). — De certains phénomènes que l'on observe au passage d'un courant électrique dans un voltamètre à eau. (92-103).

Padova (*E.*). — Sur quelques observations du professeur Neumann à la loi de Weber. (103-116).

L'auteur observe que, si les équations du mouvement d'un système de points se présentent sous la forme analogue à celle de Hamilton et donnée par Riemann,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_i}=\frac{d(T+U)}{dq_i}-\frac{d}{dt}\frac{dU}{dq'_i},$$

les seconds membres de ces équations ne doivent pas être considérés comme les expressions analytiques des forces, mais comme le résultat d'une transformation analytique effectuée sur les équations primitives du mouvement, de façon que les expressions des composantes des forces doivent satisfaire à des conditions plus compliquées; mais la règle du parallélogramme des forces continue à être vérifiée.

Pierucci (*F.*). — Nouvelle machine électrique. (116-117).

C'est une modification à la machine de Holtz.

Naccari (*A.*) et *Bellati* (*M.*). — Les phénomènes thermiques produits par le passage de l'électricité à travers un gaz raréfié. (179-205).

Poloni (*G.*). — Sur le magnétisme permanent de l'acier à différentes températures. (206-232).

Righi (*A.*). — Le téléphone qu'on entend à distance. (233-239).

Bazzi (*E.*) et *Cobianchi* (*G.*). — Sur le développement des courants et des extra-courants. (239-262).

Le but de ce Mémoire est la vérification expérimentale des formules données pour ces phénomènes par MM. Helmholtz et du Bois-Reymond.

Tome V; 1879.

Eccher (*A.*). — Sur les forces électromotrices produites par les solutions salines à différents degrés de concentration avec les métaux qui en forment la base. (5-34).

Villari (*E.*). — Sur les lois thermiques et galvanométriques qui régissent la formation de l'étincelle électrique dans des gaz différents. (49-61).

Bartoli (*A.*). — Une nouvelle expérience d'électrolyse avec des faibles courants. (92-96).

Donnini (*P.*). — Sur l'équivalent mécanique de la chaleur, la théorie cinétique et la chaleur atomique des gaz. (97-116).

Marangoni (*C.*). — Les larmes philosophiques. (116-118).

Betti (*E.*). — La théorie des condensateurs. (119-133).

C'est un Chapitre du Livre « La teorica delle forze newtoniane e sua applicazione all' elettricità e al magnetismo » (*Voir* le *Bulletin*, III_2, 21).

Roiti (*A.*). — Sur une action pondéromotrice intérieure du courant électrique. (134-135).

Villari (*E.*). — Les lois thermiques et galvanométriques de l'étincelle électrique dans des gaz différents. (161-203).

Les résultats de ces recherches sont que les indications thermiques et les déviations galvanométriques produites par l'étincelle et par la décharge du condensateur suivent les mêmes lois quand on étudie la chaleur produite avec le thermomètre et le courant qui constitue la décharge avec le galvanomètre. La résistance des gaz à l'étincelle croît proportionnellement à sa longueur. Parmi les gaz examinés par l'auteur, l'hydrogène présente la moindre et l'acide carbonique la plus grande résistance à l'électricité.

Bartoli (*A.*). — La polarité galvanique et la décomposition de l'eau par une pile de force électromotrice inférieure à 1 élément Daniell. (203-251).

Wiedemann (*G.*). — La dissociation des sels ferreux dissous. (252-280; VI, 18-25).

Traduction d'un Mémoire publié dans les *Annales de Wiedemann*.

Tome VI; 1879.

Bellati (*M.*). — Sur la valeur du phénomène Peltier dans un couple fer et zinc. (5-18).

Vérification expérimentale de la théorie mécanique des courants thermo-électriques de Thomson, Clausius et Budde.

Poloni (*G.*). — Sur une surface de capillarité. (26-32).

L'auteur détermine l'équation de la surface de révolution qui se forme en plongeant une pointe dans un liquide verticalement et en la soulevant après lentement; l'équation de la ligne méridienne est

$$(H_1 - y)^2 = A(x - R_1)\left(1 - \alpha B^{-\frac{1}{x-R_1}} - \alpha' B'^{-\frac{1}{x-R_1}}\right);$$

H_1 et R_1 sont les coordonnées du point de la courbe qui est le plus proche de l'axe, et les constantes sont liées par les relations

$$A = \frac{H_1^r}{\alpha \log B + \alpha' \log B'}, \quad \alpha + \alpha' = 1.$$

Basso (*G.*). — L'allongement des fils conducteurs traversés par un courant électrique. (32-53).

Ferrini (*R.*). — Recherches sur la conductibilité électrique des charbons. (53-77).

Bazzi (*E.*). — Sur les ondes liquides. (98-100).

Annonce de quelques résultats obtenus dans un travail qui sera publié bientôt et dans lequel on discute expérimentalement les formules de Newton, Laplace, Poisson, Weber, etc.

Rossetti (*F.*). — Sur la température de la lumière électrique, c'est-à-dire sur la température des extrémités polaires des charbons quand ils produisent la lumière électrique. (101-115).

Villari (*E.*). — Nouvelles recherches sur la chaleur développée dans les étincelles électriques des condensateurs et des bobines d'induction. (115-128).

La chaleur développée par l'étincelle est en raison inverse du nombre des bouteilles, et par conséquent de la surface du condensateur. La chaleur totale produite dans la décharge d'un condensateur par une ou plusieurs étincelles est proportionnelle au carré de la quantité d'électricité qui l'engendre.

Villari (*E.*). — Sur les lois thermiques et galvanométriques des étincelles d'induction. (128-132).

Roiti (*A.*). — Nouvelle forme de l'action cataphorique du courant. (132-135).

Cintolesi (*F.*). — Les images accidentelles et subjectives. (136-140).

Bartoli (*A.*). — Relation entre la cohésion spécifique, la densité et la chaleur spécifique d'une classe de liquides. (141-153).

Bartoli (*A.*). — Phénomène d'électrolyse de l'acide sulfurique concentré et de quelques autres liquides visqueux. (153-156).

Padova (*E.*). — Sur la stabilité du mouvement. (156-204).

L'auteur, partant des conditions pour les maxima et minima des intégrales définies simples trouvées par M. A. Mayer, démontre que l'action d'un système de points, en passant d'une configuration à une autre, cesse de satisfaire aux conditions du minimum quand on peut passer de la première à la seconde configuration en changeant infiniment peu les conditions initiales du mouvement. L'auteur donne ensuite quelques applications de cette théorie.

Righi (*A.*). — Sur la dilatation des cohibents armés sous l'action de la charge électrique. (205-223).

Eccher dall' Eco (*A.*). — Sur les forces électromotrices engendrées dans les solutions salines à différents degrés de concentration avec les métaux qui en forment la base (deuxième Mémoire). (223-235).

Villari (*E.*). — Recherches sur les lois thermiques et galvanométriques des étincelles électriques produites par la décharge complète, incomplète et partielle des condensateurs. (235-264).

Bartoli (*A.*). — Démonstration élémentaire d'un théorème relatif à la théorie de l'irradiation, donné par R. Clausius. (265-276).

Cette Note contient la démonstration du théorème : « Le pouvoir émissif d'un corps dépend non seulement de la nature du corps et de sa température, mais aussi du milieu dans lequel le corps se trouve ; les pouvoirs émissifs, dans des milieux différents, sont en raison directe des carrés des indices de réfraction de ces milieux ».

Cantoni (*G.*). — Les vapeurs diffuses à l'intérieur des liquides. (277-285).

F. P.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 2ᵉ série.

Tome XVIII; 1879.

Laguerre. — Sur la règle des signes de Descartes. (5-13).

Après avoir donné une démonstration nouvelle et fort curieuse de la règle des signes de Descartes, M. Laguerre y ajoute plusieurs propositions sur le nombre des racines positives d'une équation. Ces théorèmes intéressants méritent d'attirer l'attention du lecteur et peuvent être utiles dans les applications.

Bouglé (E.). — Solution de la question proposée au Concours général de 1877 (Mathématiques spéciales) : « Problème sur les surfaces du second degré. » (13-19).

Krantz (H.-J.). — Solutions de questions proposées par M. Bourguet : « Sur l'expression $\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{n}$ et les séries $a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}}+\ldots$, $\frac{m}{n}+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}+\ldots$ » (19-23).

Le Cointe (le P.). — Sur une question de minimum. (23-31).

Il s'agit de trouver le minimum de la somme des carrés de m fonctions linéaires de n variables. Après avoir résolu la question, et à cette occasion, l'auteur énonce et démontre plusieurs théorèmes sur les déterminants.

Guillet (Ed.). — Solution de la question de Géométrie analytique (Concours aux bourses d'études préparatoires à la licence ès Sciences mathématiques, 1878) : « Lieu géométrique relatif à un cercle et à une droite. » (31-32).

Badoureau. — Enveloppe de la droite de Simpson. (33-35).

L'auteur traite la question par le calcul et trouve une courbe du quatrième degré, à trois rebroussements, tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle donné.

Badoureau. — Divisibilité par 19. (35-36).

Cette règle de divisibilité est fondée sur la relation suivante : $10^9 = m.19 - 1$.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1878). — Énoncés des compositions; sujets des leçons et autres épreuves. (36-41).

(¹) Voir *Bulletin*, III_1, 43.

BIBLIOGRAPHIE. — **Cours de Calcul infinitésimal, par *J. Hoüel*; compte-rendu du Tome I. (42-44). — Cours de Géométrie analytique, par *Joseph Carnoy*. (45-46).**

PUBLICATIONS RÉCENTES. — **1. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, par Sturm; 5e édition; Paris, 1877. — 2. Éléments d'Algèbre, par Bourdon; 15e édition; Paris, 1877. — 3. L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique; Ve Partie: Italie, par G. Rayet; Paris, 1878. — 4. Théorie des phénomènes électriques, par Bouty; Paris, 1878. — 5. Leçons sur l'électricité, par J. Tyndall; traduit de l'anglais par R.-F. Michel; Paris, 1878. — 6. Traité de Géométrie, par E. Rouché et Ch. de Comberousse; 4e édition; Paris, 1879. — 7. Leçons d'Arithmétique, par L. Maleyx; Paris, 1879. — 8. Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$, par G. de Longchamps. — 9. Des fractions étagées, par G. de Longchamps. — 10. Note sur la série harmonique, par G. de Longchamps. — 11. Ricerche sulle equazioni differenziali a primitiva generale algebrica, par F. Casorati. — 12. Sulle condizioni alle quali deve soddisfare una primitiva, affinche il grado della corrispondente equazione differenziale, rispetto alle variabili, riesca minore del normale; par F. Casorati. —** 13. Exposition succincte de quelques méthodes d'élimination entre deux équations, par Forestier. — 14. Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées, par Ed. Dewulf. — 15. Sur quelques propriétés des polygones, par Laisant. — 16. Note sur un théorème sur les mouvements relatifs, par Laisant. — 17. Sur le problème de la composition des accélérations d'ordre quelconque, par Ph. Gilbert. — 18. Sur l'extension aux mouvements plans relatifs de la méthode des normales et des centres de courbure, par Ph. Gilbert. — 19. Una transformacion de curvas planas, par Ed. Habich. — 20. Arithmetische Kleinigkeiten, von prof. Dr Bachmann.

Longchamps (*G. de*). — Sur la limite des racines réelles d'une équation de degré quelconque. (49-57).

La méthode nouvelle qu'emploie l'auteur, et qu'il désigne sous le nom de *méthode par la décomposition en trinômes*, consiste essentiellement à mettre le premier membre de l'équation sous la forme $x^{m-2}(x^2+A_1x+A_2)+x^{m-4}(A_3x^2+A_4x+A_5)+\cdots$ Il est nécessaire que tous les coefficients A_2, A_5, A_8.... soient positifs, ce qu'on

obtient au besoin par l'introduction d'un nombre arbitraire λ. L'auteur, après avoir exposé sa méthode, en donne ensuite des applications à des exemples numériques.

Laguerre. — Sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques. (57-67).

L'auteur établit la proposition suivante : « Si par un point M, pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène les nm droites tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point M est le même que le centre harmonique des m foyers réels. » De là se déduit ensuite ce théorème de M. Liouville : « Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe plane, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini. » M. Laguerre termine cette étude par des considérations sur les cassiniennes et par une extension aux cônes algébriques. — *Voir*, du même auteur : « Sur les polaires d'une droite » (*Bulletin de la Soc. Math.*, t. III, p. 174); « Sur la détermination du rayon de courbure » (*Bulletin de la Soc. Philomath.* février 1875); « Sur les cassiniennes planes et sphériques » (*id.*, mars 1868).

Lucas (Éd.). — Sur l'équation indéterminée biquadratique $Ax^4+By^4=Cz^2$. (67-74).

L'auteur, reprenant les solutions de Fermat, de Legendre et de Le Besgue pour les équations biquadratiques indéterminées, montre que, lorsqu'on connaît une première solution de l'équation proposée, on obtient *deux* solutions et non une seule; il établit en outre des formules permettant de résoudre *complètement* l'équation proposée pour certaines valeurs de A, B, C.

Lucas (Éd.). — Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7. (74-76).

Développement sur la propriété suivante, énoncée par M. de Jonquières, et qui se rattache à deux théorèmes établis précédemment par M. Lucas : « Le nombre 5 est le seul entier, décomposable en une somme de deux carrés consécutifs, dont le carré soit aussi décomposable en une somme de deux carrés consécutifs. »

Worms de Romilly. — Sur l'équation du second ordre

$$Myy''+Ny'^2=f(x).$$

(77-85).

C'est une généralisation de la question 1289, dont l'énoncé était celui-ci : « Quel que soit m, l'intégration de l'équation $y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{m+1}{m+2}\frac{dy^2}{dx^2}=(ax^2+bx+c)^m$ peut se ramener à des quadratures. » M. W. de Romilly dresse un tableau fort intéressant des conditions auxquelles doivent satisfaire M, N et $f(x)$ pour que cette réduction à des quadratures puisse avoir lieu en général.

Maleyx (L.). — Propriété de la tangente à l'ellipse; construction du point commun à deux normales infiniment voisines; directrice relative à un foyer. (85-89).

Démonstrations géométriques de propriétés de l'ellipse.

École spéciale militaire (Concours de 1878). — Énoncés des compositions. (89-90).

Concours d'admission a l'École Centrale (1re session, 2 et 3 août 1878). — Énoncés des compositions (91-93).

Concours d'admission a l'École Centrale (2e session, 17 et 18 octobre 1878). — Énoncés des compositions. (93-95).

Correspondance. — M. L. Maleyx : « Propriété de la tangente à une conique. » (95-96).

Tourrettes (*A.*). — Solution d'une question de licence (1875): « Mouvement d'un point matériel pesant assujetti à rester sur une sphère et sollicité par une certaine force. » (97-101).

Tourrettes (*A.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Mathématiques spéciales) : « Génération et propriétés d'une surface du quatrième degré. » (102-108).

Robaglia (*B.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Mathématiques élémentaires) : « Propriété d'une circonférence coupée par une droite. » (108-109).

Lez. — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Philosophie) : « Section plane d'un cube. » (109-110).

Lez. — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Rhétorique) : « Problème sur la sphère. » (111).

Lez. — Solution des questions proposées au Concours général de 1876 (Seconde) : « 1° Construction d'un triangle; 2° Problème sur le trapèze. » (112-113).

Lez. — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Troisième) : « Construction d'un triangle. » (113).

Robaglia. — Solution de la question proposée au Concours général de 1876 (Enseignement secondaire spécial) : « Problème sur deux rectangles égaux. » (114-115).

Moret-Blanc. — Solution de la question de Mécanique élémentaire proposée au Concours d'agrégation en 1876 : « Équilibre d'un fil passant sur une poulie. » (115-118).

Tourrettes (*A.*). — Solution de la question de licence proposée au Concours d'agrégation en 1876 : « Mouvement d'un point matériel sur un cercle horizontal mobile. » (118-122).

Courbe (*H.*). — Questions de licence (1877). « **1**. Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes. — **2**. Sur l'aire d'une courbe en coordonnées polaires. » (123-126).

Laurent (*H.*). — Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. (126-140; 145-170).

Ces deux articles terminent la série de ceux qu'a publiés M. Laurent dans les *Nouvelles Annales* sur les fonctions elliptiques. L'ensemble formera un Traité fort intéressant sur ce sujet, si cultivé de nos jours et si fécond en applications nombreuses. Voici les titres des paragraphes traités dans ces deux derniers articles : Premières applications géométriques; formules fondamentales. — Comparaison des arcs d'ellipse et d'hyperbole. — Sur l'addition des intégrales de première espèce. — Lignes de courbure de l'hyperboloïde. — Théorème de Poncelet. — Addition des arcs d'ellipse; théorème de Fagnano. — Sur les arcs de lemniscate. — Aires de quelques courbes. — Sur les courbes de degré m qui ont $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles. — Sur les courbes d'ordre m possédant $\frac{1}{2}m(m-3)$ points doubles. — Quelques courbes remarquables dont l'équation dépend des fonctions elliptiques. — Sur le mouvement de rotation autour d'un point. — Mouvement du pendule conique.

Bibliographie. — **1**. Mémoire sur l'élimination, par H. Lemonnier; Paris, 1879. — **2**. Mémoire sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques, par G. Oltramare. — **3**. Deux Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange; Berlin, 1878. (140-143).

Correspondance. — M. A. Desboves : « Sur les équations biquadratiques indéterminées. » (143-144).

Bourguet (*L.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation de 1877 : Problème relatif à l'ellipsoïde. » (170-172).

Cottereau. — Solution de la question de Mathématiques élémentaires proposée au Concours d'agrégation de 1877 : « Lieu engendré par une droite mobile. » (172-173).

Tourrettes (*A.*). — Solution de la question de Mécanique élémentaire proposée au Concours d'agrégation de 1877: « Position

d'équilibre d'un système formé de deux points matériels. » (173-175).

Tourrettes (*A.*). — Solution de la question de licence proposée au Concours d'agrégation de 1877 : « Mouvement d'un système de deux points matériels. » (175-179).

Collignon (*E.*). — Note sur la résolution, au moyen de Tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie et de Trigonométrie sphérique (179-191).

L'auteur indique d'abord la construction d'un Tableau graphique faisant connaître les heures du lever et du coucher du Soleil en un point quelconque du globe et à une époque quelconque. Il complète ensuite ce Tableau en y introduisant l'*époque de l'année* et l'*équation du temps*. Ce même Tableau, dont M. Collignon montre diverses applications, peut aussi servir, comme il le fait remarquer, à résoudre à vue tout triangle sphérique rectangle, pourvu qu'on le modifie convenablement. Enfin on peut aussi, par ce moyen, trouver la distance de deux points sur la sphère, connaissant leurs latitudes et leurs longitudes.

Publications récentes. — 1. Sulla risoluzione delle congruenze numeriche.... Memoria del prof. G. Bellavitis. — 2. Prima, seconda, terza ed ultima Parte della quattordicesima Rivista di Giornali del prof. G. Bellavitis. — 3. Applications mécaniques du Calcul des quaternions; sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces, par Laisant; Paris, 1877. — 4. Sur la théorie des équations algébriques; sur la théorie des surfaces, par A.-E. Pellet; Clermont-Ferrand, 1878. (192).

Question proposée. 1309. (192).

Sloudsky (*Th.*). — Note sur le principe de la moindre action. (193-200).

M. Sloudsky fait remarquer l'obscurité qui subsiste dans l'exposition du principe de la moindre action, telle que l'a donnée Lagrange. Il s'efforce ensuite d'éclaircir la notion de ce principe et montre les erreurs commises sur ce sujet par Jacobi et par d'autres géomètres allemands ou russes. Le principe de la moindre action, par exemple, est fort différent de celui d'Hamilton, malgré l'opinion d'Ostrogradsky, qui a cependant trouvé des défenseurs. On peut consulter sur ce sujet : Lagrange, « Mécanique analytique » ; O. Rodrigue, « De la manière d'employer le principe de la moindre action (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III, 1814); Jacobi, « Vorlesungen über Dynamik, » 1866; Schell, « Theorie der Bewegung und der Kräfte »; J.-A. Serret, « Mémoire sur le principe de la moindre action » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII et LXXIII); Ostrogradsky, *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 6e série, t. IV.

Saint-Germain (*A. de*). — Lignes de courbure de la surface

$$z = \mathrm{L} \cos y - \mathrm{L} \cos x,$$

(201-203).

L'auteur rapproche cette surface de celle qu'étudie M. Tisserand dans ses *Exercices sur le Calcul infinitésimal* (p. 329), et qui est représentée par l'équation

$$z = -\mathrm{L} \cos x - \mathrm{L} \cos y.$$

Cette dernière possède une infinité d'ombilics tout le long des sections principales, et, au contraire, la surface examinée par M. de Saint-Germain n'en a aucun.

Laguerre. — Sur une propriété du cercle jouissant de la propriété que de chacun de ses points on voit sous un angle droit une conique donnée. (204-206).

Cette propriété consiste, M étant un point quelconque du cercle, K la conique, ABC un triangle conjugué, en ce que la conique de foyer M inscrite dans ABC est tangente à la polaire de M par rapport à K.

Laguerre. — Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés, et sur les axes des surfaces de révolution du second ordre qui passent par cinq points donnés; sur les lignes sphériques. (206-218).

M. Laguerre établit plusieurs propriétés intéressantes, parmi lesquelles nous signalons celle-ci : « L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé. » Le quadrangle dérivé de ABCD est celui dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits à ABC, BCD, CDA, DAB. Il déduit ensuite de là plusieurs propositions sur les surfaces de révolution du second ordre, et entre autres celle-ci : « A, B, C, D, E étant sur une surface de révolution du second ordre, les centres des sphères circonscrites à ABCD, BCDE, ... sont sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface. » Enfin l'article se termine par des remarques sur les lignes spiriques; on appelle ainsi des courbes planes du quatrième ordre possédant un axe de symétrie et ayant pour points doubles les deux ombilics du plan.

Maleyx (*L.*). — Comparaison de la méthode d'approximation de Newton à celle dite des parties proportionnelles. (218-231).

L'auteur s'efforce de prouver que, sans augmentation du travail total, la méthode des parties proportionnelles, convenablement appliquée à l'approximation d'une racine séparée, donne un résultat plus approché que celle de Newton. Après avoir établi ce fait par des considérations théoriques, il le justifie par l'exemple du calcul numérique des racines d'une équation transcendante.

Concours général de 1878. — Énoncés des compositions. (232-234).

Borel (*C.-A.*). — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1878 : « Problème relatif à une conique. » (234-237).

Folie (*F.*). — Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. (238-239).

Il s'agit d'une propriété que l'auteur intitule « Synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon. »

Publications récentes. — **1**. Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittel aus vier Elementen, von C.-W. Borchardt; Berlin, 1878. — **2**. Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe, par P. Tannery; Bordeaux, 1878. — **3**. Sur la réduction des forces centrifuges composées dans le mouvement relatif d'un corps solide, par Ph. Gilbert; Bruxelles, 1878. — **4**. Sulla convergenza dell'espressione infinita $x^{x^{\cdots}}$ par G. Lemoyne; Gênes, 1878. — **5**. Sul valore medio geometrico delle funzioni d'una variabile reale; par G. Lemoyne; 1878. — **6**. Mémoire sur un paradoxe mathématique et sur un nouveau caractère de décomposition, par L. Saltel; Bruxelles, 1879. — **7**. Sur la série récurrente de Fermat, par É. Lucas; Rome, 1878. — **8**. Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable, par V. Liguine; Paris, 1878. — **9**. Note relative au théorème sur la composition des accélérations d'ordre quelconque, par V. Liguine; Paris, 1878. — **10**. O determinantih drugoga i trecega stupnja, par K. Zahradník; Agram, 1878. (239-246).

Laguerre. — Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle et les éléments d'une conique inscrite dans ce triangle. (241-246).

L'auteur démontre la proposition suivante : « Soient F et G les deux foyers de la conique, F' le point réciproque du foyer F relativement au cercle, et O le centre de ce cercle; si par le point F on mène une droite parallèle à OG, cette droite rencontre GF' en un point R tel, que le produit GR × GF' est égal au carré de l'axe qui renferme les deux foyers. » Il résout ensuite ce problème : « Construire un cercle de centre donné dans lequel on puisse inscrire un triangle circonscrit à une conique donnée. »

Laguerre. — Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un quadrilatère et les éléments d'une conique inscrite dans ce quadrilatère. (246-256).

Cette étude présente une analogie marquée avec celle qui fait l'objet de l'article précédent. L'auteur y établit plusieurs propositions dignes d'intérêt.

Macé de Lépinay. — Théorie des télescopes Grégory et Cassegrain. (256-260).

Cette théorie se fait d'une manière assez simple, pour les deux instruments à la fois, en employant la formule $\varphi\varphi' = f^2$.

Marre (A.). — Note sur trois règles de multiplication abrégée extraites du « Talkhys amâli al hissâb ». (260-265).

Étude historique intéressante sur un Chapitre de l'Ouvrage d'Ibn al Banna, de Maroc. La première règle est relative aux produits tels que celui-ci,

$$11111 \times 11111 = 123454321,$$

la seconde à $99999 \times 99999 = 9999800001$ et la troisième à 999×666, par exemple.

Desboves. — Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$. (265-279; 398-410; 433-444; 481-499).

Dans cette étude, M. Desboves s'attache à rechercher les cas de possibilité, au lieu que jusqu'à présent on a surtout cherché le cas où les équations étaient impossibles. La seule méthode suivie est fondée sur l'emploi de certaines identités; sur ce point, l'auteur a entrepris de compléter le travail de Lagrange qu'on trouve au Chapitre IX de ses Additions à l'*Algèbre* d'Euler. Les résultats nouveaux et intéressants qu'obtient M. Desboves attireront certainement sur son Mémoire l'attention qu'il mérite. Il insiste spécialement sur l'importance, peut-être méconnue jusqu'ici, des solutions initiales, et aussi sur la difficulté que présente la solution *complète* des équations lorsque le nombre des solutions est infini.

Les divisions adoptées sont les suivantes : Objet du Mémoire. — Démonstration de quelques identités fondamentales. — Résolution en nombres entiers de l'équation $aX^2 + bY^2 = cZ^n$, n étant égal à 2, 3 ou 4, ... — Résolution de l'équation $aX^4 + bY^4 = cZ^n$, n ayant les valeurs 2, 3, 4, etc. — Théorèmes généraux relatifs à la résolution de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$. — Applications numériques des identités et des formules. — Résumé et conclusion.

Ptaszycki. — Sur un problème de Mécanique. (279-281).

Il s'agit du mouvement plan d'un système de trois points matériels de masses égales, tels que leur centre de gravité reste immobile en O et que les moments d'inertie soient constants par rapport aux deux axes rectangulaires principaux passant par O. Les points se meuvent alors sur une ellipse.

Concours d'admission a l'École Normale supérieure (1878). — Énoncés des compositions. (282-283).

Guillet (Ed.). — Solution de la question proposée au Concours

d'admission à l'École Normale en 1878 : « Problème sur l'intersection d'une conique et d'une circonférence. » (283-286).

Tissot (*A.*). — Remarques au sujet d'une Note de M. Collignon. (287-288).

Ces remarques se rapportent à l'article de M. Collignon que nous avons analysé plus haut. M. Tissot fait remarquer qu'on peut rendre les constructions indépendantes des formules de la Trigonométrie sphérique.

QUESTION PROPOSÉE 1310. (288).

Hioux (*V.*). — Note sur la méthode d'élimination Bézout-Cauchy. (289-295).

Suite intéressante à l'article « Sur l'élimination » publié en 1877 par M. Rouché dans les *Nouvelles Annales*. M. Hioux, par la méthode de Bézout, perfectionnée par Cauchy, obtient des propriétés connues relatives au résultant, mais qu'on démontre généralement par les fonctions symétriques.

Realis (*S.*). — Sur les équations du troisième et du quatrième degré dont les racines s'expriment sans l'emploi des radicaux cubiques. (296-301).

M. Realis reprend une propriété due à M. Favre et proposée par lui depuis longtemps comme question. Il donne une réciproque de cette propriété et en déduit plusieurs conséquences dignes de remarque. *Voir* une Note du même auteur sur ce sujet aux *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 289 et 424.

Realis (*S.*). — Note sur la question 794. (301-304).

Il s'agit de l'équation indéterminée $u^2x + x^2y + y^2z + z^2u = 0$.

Lucas (*Éd.*). — Problème sur l'ellipsoïde. (304-305).

Lieu des sommets des tétraèdres dont les hauteurs se rencontrent et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde, aux points où ces faces sont rencontrées par les hauteurs.

Lionnet. — Note sur les nombres parfaits. (306-308).

L'auteur appelle *nombres parfaits de première espèce* ceux qui sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes et *de seconde espèce* ceux qui sont égaux au produit de leurs parties aliquotes. Il démontre que 6 est le seul nombre positif doublement parfait.

Robaglia. — Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1878 (3e question) : « Problème sur le triangle équilatéral. » (309).

Lannes. — Question du Concours général de 1878 (Rhétorique) : « Problème sur la sphère. » (310-311).

Correspondance. — Un abonné : « Construction d'un triangle, connaissant ses bissectrices. » — M. A. Germot : « Concours d'admission à l'École Normale. » (311-315).

Publications récentes. — 1. Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni; Rome, 1878. — 2. Atti della R. Accademia dei Lincei (1878-1879); Rome, 1879. — 3. Quindicesima Rivista di Giornali dal prof. G. Bellavitis; Venise, 1879. — 4. The Analyst, by J.-E. Hendricks; Des Moines (Iowa), 1879. — 5. Leçons sur la Géométrie, par A. Clebsch, traduites par A. Benoist; t. I; Paris, 1879. — 6. Cours de Calcul infinitésimal, par J. Hoüel; t. II; Paris, 1879. — 7. Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées, par Ch. Méray; Paris, 1879. — 8. Précis d'un Traité de Statique dans lequel les couples sont remplacés par les leviers de rotation, par E. Brassine; Toulouse, 1879. — 9. La racine cubique obtenue par la méthode des interpolations successives, par Michel Laporte; Bordeaux, 1879. (316-321).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1259 : « Sur le développement de $(1-2\alpha x+\alpha^2)^n$. » (321-322).

Lez (H.). — Solution de la question 1268 : « Sur l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$. » (322-324).

Lacazette (A.). — Solution de la question 1282 : « Propriété de l'hyperbole équilatère. » (324-325).

Fauquembergue (E.). — Solution de la question 1284 : « Sur les cercles tangents à une conique en un point donné. » (325-326).

Gambey. — Solution de la question 1288 : « Enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport à une parabole mobile. » (326-328).

Romero. — Solution de la question 1291 : « Impossibilité de l'équation indéterminée $x^4+x^3+x^2+x-1=y^2$. » (328).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1293 : « Nombre égal à la somme des chiffres de son cube. » (329).

Laisant (*A.*). — **Solution de la question 1294 : « Propriété des inverses de n nombres positifs. » (330-332).**

Meyl (*A.-J.-F.*). — **Solution de la question 1303 : « Solutions de l'équation indéterminée**

$$x^2 + yx = 2y(y+3)(y^2+3y+5). »$$

(332-333).

Boell (*C.*). — **Solution de la question 1304 : « Propriété du triangle. » (334).**

QUESTIONS PROPOSÉES : 1311 à 1318. (335-336).

Tissot (*A.*). — **Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des Cartes géographiques. (337-356; 385-397; 532-548).**

C'est la suite des articles parus dans le courant de l'année 1878, et dont nous avons précédemment rendu compte. Voici le sommaire des questions traitées par l'auteur :

CHAPITRE II : *Recherche du système de projection le mieux approprié à une contrée particulière.* — Conditions à remplir; notation. — Carte d'un pays limité dans tous les sens. — Système du minimum de déformation. — Cas particuliers. — Cartes de France et d'Espagne — Carte d'une zone; Carte d'un fuseau; Carte ayant pour objet la conservation des aires.

CHAPITRE III : *Valeurs numériques des éléments qui permettent d'apprécier les déformations produites par les divers modes de projection dans la construction des mappemondes.* — Préliminaires. — Projections autogonales ($\omega = 0$, $b = a$). — Projections authaliques ($\beta = a$, $S = 1$).

Il est permis de regretter que la publication d'un Mémoire tel que celui-là soit échelonnée sur un aussi long espace de temps. Dans une publication périodique comme les *Nouvelles Annales*, une même suite d'articles ne devrait jamais chevaucher sur plus de deux années, au maximum.

Nous devons ajouter que cet inconvénient a frappé l'éditeur et les rédacteurs du Journal ; car, en ce moment même, M. Gauthier-Villars prépare une brochure, qui contiendra la suite du Mémoire de M. Tissot et qui sera offerte en supplément aux abonnés des *Nouvelles Annales*. C'est là une excellente mesure, que nous ne saurions trop approuver.

Le compte rendu de ce supplément paraîtra ultérieurement dans le *Bulletin*.

Lionnet. — Note sur la question : « Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers? » (356-360).

La question n'est pas résolue; M. Lionnet établit quelques propositions qui le portent à pencher pour la négative, contre l'opinion généralement admise.

Terrier (*P.*). — Solution de la question proposée au concours

pour l'agrégation des Sciences mathématiques en 1878 : « Théorème et lieu géométrique sur la circonférence. » (361-363).

Robaglia. — Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École Centrale (Ire Section, 2 et 3 août 1878) : « Lieux géométriques relatifs aux coniques ayant un même foyer et une même directrice. » (363-365).

Leinchugel (A.). — Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École Centrale (IIe section, 17 et 18 octobre 1878) : « Sur les hyperboles ayant un foyer commun et une asymptote commune. » (365-367).

Leinchugel (A.). — Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1878 (2e question : « Problème relatif au triangle. » (368-369).

Bibliographie. — 1. Théorie des quantités négatives, par de Campou; Paris, 1879. — 2. Principes de la Mécanique moléculaire relatifs à l'élasticité et à la chaleur des corps, par E. Gény; Nice, 1876. — 3. Traité de Mécanique rationnelle, par H. Laurent; 2e édition; Paris, 1878. — 4. Cours d'Algèbre supérieure, par J.-A. Serret; 4e édition; Paris, 1879. — 5. Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance, par Sadi Carnot, 2e édition; Paris, 1878. — 6. Theorie der algebraischen Gleichungen, von Dr Jul. Petersen; Copenhague, 1878. — 7. Traité élémentaire de Géométrie descriptive, par Ernest Lebon; Paris, 1877. — 8. Recueil de problèmes gradués de Géométrie descriptive, par Ernest Lebon; Paris, 1878. — 9. Recueil des épures de Géométrie descriptive proposées depuis 1862 pour l'admission à l'École de Saint-Cyr, par Ernest Lebon; Paris, 1878. — 10. Lettera inedita di Giuseppe Luigi Lagrange, pubblicata da B. Boncompagni; Florence, 1879. — 11. Nouveaux éléments de Géométrie, par Ch. Méray; Paris, 1874. (369-373).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1263 : « Sur la circonférence circonscrite à un triangle. » (374-375).

Habbé (Vladimir). — Solution de la question 1264 : « Construction graphique d'une droite d'inclinaison $\text{tang}^3 x$. » (375-376).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question **1278** : « Somme des puissances $t^{\text{ièmes}}$ de $x^{2n}+px^n+q=0$ lorsque $t=kn$. » (376-378).

Sondat (*P.*). — Solution de la question **1295** : « Sur l'équation indéterminée $u^3+v^3+x^3+y^3=0$. » (378-379).

Lez. — Solution de la question **1301** : « Inscription d'un trapèze maximum dans un segment de conique. » (379-382).

QUESTIONS PROPOSÉES : **1319** à **1324**. (382-384).

Launay (*L. de*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1878 (Mathématiques élémentaires) : « Problème sur le tronc de cône. » (410-419).

Leinchugel. — Solution de la question proposée au Concours général de 1878 (Philosophie) : « Problème sur le tétraèdre. » (419).

Robaglia. — Solution des questions proposées au Concours général de 1878 (Seconde et Troisième) : « Problèmes sur la circonférence. » (420-422).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1879). — Énoncés des compositions. (422-424).

PUBLICATIONS RÉCENTES. — **1**. Histoire de l'École Centrale des Arts et Manufactures, par Ch. de Comberousse ; Paris, 1879. — **2**. Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebriche differenziali di primo ordine e secondo grado, del prof. F. Casorati ; Rome, 1879. — **3**. Sul centro delle forze nel piano, del prof. G. Bardelli ; 1879. — **4**. Dimostrazione del quinto postulato di Euclide, del prof. V. de Rossi Re ; Rome, 1879. (424).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1302** : « Inscription d'un quadrilatère dans une conique. » (425-426).

Rocchetti (*M.*). — Solution de la question **1311** : « Décomposition d'une expression en deux facteurs. » (426-427).

Pisani (*F.*). — Solution de la question **1314** : « Si $A \pm B = 90^\circ$, on a $2c^{\pm 2} = (a+b)^{\pm 2} + (a-b)^{\pm 2}$ dans le triangle ABC. » (427-428).

Cauret (*L.*). — Solution de la question **1315** : « Propriété d'un triangle inscrit. » (428-430).

Pisani (*F.*). — Solution de la question **1317** : « Divisibilité d'un polynôme par $(x-1)^4$. » (430-432).

QUESTIONS PROPOSÉES : — **1325** à **1327**. (432).

Jung. — Recherches sur les systèmes polaires, traduites par un abonné. (444-459).

Le but de l'auteur a été de grouper des propriétés dont on tire un grand parti dans la théorie des moments d'inertie de plusieurs forces parallèles, et qui restent vraies indépendamment de toute considération mécanique. Ce petit Mémoire forme une suite très intéressante aux travaux de MM. Chasles, Staudt, Reye, Poncelet, Cremona, etc., et mérite d'attirer l'attention des géomètres. Voici le sommaire des matières qui s'y trouvent traitées : Préliminaires. — Classification des systèmes polaires ; propriétés focales. — Éléments symétriques. — Conique centrale ; ses rapports avec la directrice. — Éléments qui déterminent un système polaire. — Quadrangles et quadrilatères conjugués.

Dostor (*G.*). — Méthode directe pour calculer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers. (459-464 ; 513-518).

M. Dostor emploie une méthode par coefficients indéterminés qui ne suppos pas connues les puissances antérieures. Il forme ensuite le Tableau des sommes considérées, depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = 10$, et il déduit de là d'intéressantes propositions.

CORRESPONDANCE. — M. de Jonquières : « A propos d'une propriété du nombre 5. » (464-465).

PUBLICATIONS RÉCENTES. — **1.** Su alcune curve di facile costruzione, di G. Bellavitis ; Naples, 1879. — **2.** Atti della R. Accademia dei Lincei ; Rome, 1879. — **3.** Sur le planimètre polaire de M. Amsler, par C.-A. Laisant ; Bruxelles, 1879. — **4.** Cours de Calcul infinitésimal, par J. Hoüel ; t. II ; Paris, 1879. (465-466).

Hugo (*L.*). — Remarques sur les propriétés du nombre 10. (466).

UN ANONYME. — Solution de la question **1270** : « Sur les normales à une surface du second ordre. » (466-468).

Realis (*E.*). — Solution de la question **1280** : « Sur l'équation $x^3 - (a^2 - b + c)x + ab = 0$. » (468-470).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1299** : « Sur la somme des carrés des x premiers nombres. » (470-474).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1300** : « Sur la somme des x premiers nombres triangulaires. » (474-475).

Lez. — Solution de la question **1316** : « Lieu relatif à la cycloïde. » (475-477).

Questions proposées : **1328** à **1337**. (477-480).

Realis (S.). — Développements sur quelques théorèmes d'Arithmétique. (500-509).

On trouvera dans cet article de curieuses identités, avec des applications à l'analyse indéterminée et spécialement à l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2.$$

Lionnet. — Note sur la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (509-513).

M. Lionnet montre que cette série offre un exemple intéressant de l'influence exercée par le mode de groupement des termes.

Lemonnier (H.). — Calcul d'un déterminant (518-524).

Il s'agit du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & . & \ldots & 1 \\ . & . & \ldots & . \\ n & 1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Publications récentes. — Teoria e pratica dei logaritmi di addizione e di sottrazione, dall' ingegnere P. Caminati; Novare, 1879. (524).

Lionnet. — Solution de la question **1323** : « Disposition particulière des neuf premiers nombres entiers » (525-528).

Questions proposées : **1338** à **1340**. (528).

Mathieu (J.-J.-A.). — Note relative à l'approximation des moyennes géométriques par des séries de moyennes arithmétiques et de moyennes harmoniques. (529-531).

Interprétation géométrique de résultats dus à MM. Alexeieff et Éd. Lucas. Cette Note donne en même temps la solution de la question 1325.

Amigues (E.). — Recherches sur deux modes de transformation des figures solides. (548-564).

L'auteur s'attache surtout aux transformations définies par les relations

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ' = \rho TT',$$

X, X', ... étant des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées homogènes $x, x', y, y', \ldots$. Cette étude doit être suivie d'autres articles.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ, издаваемій Московскимъ Математическимъ Обществомъ ([1]).

Tome IX, fasc. 3; 1879.

Bougaïef (*N.-V.*). — Solution d'un problème d'échecs à l'aide des fonctions numériques. (355-360).

Andréief (*K.-A.*). — Des affinités géométriques dans leur application au problème de construction des lignes courbes. (361-432) ([2]).

Gromeka (*A.-S.*). — Exposé de la théorie des phénomènes capillaires. Théorie de la cohésion superficielle des corps liquides. (435-500) ([3]).

Delarue (*Dan.*). — Des solutions singulières des équations différentielles d'ordre quelconque. (501-529).

Cauchy a établi les conditions permettant de reconnaître directement si, pour une équation différentielle de premier ordre, une solution obtenue est une intégrale particulière ou une solution singulière. L'auteur étend ces conditions aux équations différentielles d'ordre quelconque.

Joukovsky (*N.-E.*). — Relations entre les problèmes du mouvement d'un point matériel et le problème de l'équilibre d'un fil flexible. (530-535).

L'auteur démontre que, si un point matériel et un fil flexible sont soumis à l'action permanente des mêmes forces, la courbe que parcourt le point matériel et celle qui est formée par le fil flexible sont identiques. (536-545).

([1]) Voir *Bulletin*, III_2, 200.

([2]) Voir *Bulletin*, III_1, 35, l'analyse de ce Mémoire par M. Bougaïef.

([3]) Voir *Bulletin*, III_1, 462.

Sloudsky (*F.-A.*). — **Contribution au problème de plusieurs corps. (536-545).**

Ce Mémoire contient deux parties dont la première est consacrée à l'examen de quelques problèmes particuliers relatifs à l'action mutuelle de plusieurs corps, entre autres le problème connu de trois corps. Dans la seconde, l'auteur considère les systèmes de corps en nombre quelconque, et établit que le système solaire ne peut ni s'étendre ni se resserrer.

Tomachevitch (*R.*). — **Déduction d'une formule générale pour représenter la dérivée numérique d'une intégrale numérique de diviseurs. (546-555).**

Letnikof (*A.-V.*). — **Formule générale de l'intégration des équations linéaires à coefficients constants et à second membre. (550-556).**

Simplification de la formule connue de Gauss.

Serdobinsky (*V.-E.*). — **Contribution à l'Algèbre numérique. (557-564).**

Liventsof (*A.-J.*). — **Quelques intégrales définies. (565-569).**

Liventsof (*A.-J.*). — **Quadratures approximatives. (569-573).**

M. Callandreau a donné la formule des quadratures approximatives fondée sur le calcul intégral. L'auteur, en prenant pour point de départ la méthode de M. Callandreau, établit une formule plus générale et démontre la possibilité d'exprimer le dernier terme sous une forme finie, dont on peut déduire facilement la limite supérieure du module de ce terme.

Joukovsky (*N.-E.*). — Contribution à la théorie du principe de la moindre action. (574-581).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

Tome VII; 1878-1879.

Darboux (*G.*). — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. (7-12).

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 256.

I. Considérons p points A_1, A_2, ..., A_p affectés de coefficients positifs ou négatifs m_1, m_2, ..., m_p dont la somme n'est pas nulle : O désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces $m_1\overline{OA}$, $m_2\overline{OA_2}$, ..., $m_p\overline{OA_p}$ ira passer par un point fixe C et sera égale à M.OC, M désignant la somme $m_1+m_2+\ldots+m_p$.

Dans le cas exceptionnel où la somme M est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariable quand le point O se déplacera ; en particulier, si elle est nulle pour une position du point O, elle sera nulle pour les autres.

II. Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points ainsi obtenus, la somme

$$\Sigma\Sigma\, m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur constante négative ou nulle.

Laguerre. — Sur l'intégrale $\int_0^2 z^n e^{-\frac{z^2}{2}+xz}dz$. (12-16).

n désigne un entier positif : on a

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+xz}dz = -e^{-\frac{z^2}{2}+xz}\Theta_n + U_n\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+xz}dz + V_n,$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x, et z, U_n et V_n deux polynômes entiers en x. M. Laguerre donne diverses propriétés de ces polynômes : on a, par exemple,

$$U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1},$$
$$\Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}$$

et

$$U_0 = 1,\quad \Theta_0 = 0,\quad U_1 = x,\quad \Theta_1 = z.$$

La première relation montre, en se reportant aux recherches de M. Hermite sur le développement en série de

$$e^{\frac{ax^2}{2}-\frac{a}{2}(x-h)^2},$$

que les polynômes U peuvent être définis par l'équation

$$e^{\frac{z^2}{2}+zx} = U_0 + U_1 z + \frac{U_2}{1.2}z^2 + \ldots.$$

Les fonctions U_n, d'une part, et $H_n = e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\Theta_n$, de l'autre, satisfont respectivement aux équations

$$y'' + xy' - ny = 0,\quad y'' + xy'ny = e^{-\frac{y^2}{2}+zx}\left(z^{n+1} - zU_n - 2\frac{dU_n}{dx}\right);$$

notons encore l'égalité

$$\int_{-\infty}^{x}(x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt = U_n\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Lemonnier. — Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z. (16-42).

Le procédé suivi par l'auteur consiste à résoudre les trois équations, quand cela est possible, comme des équations du premier degré dont les trois inconnues seraient les carrés de deux variables et leur produit; on les met ainsi, par exemple, sous la forme

$$y^2 = ay + bz + c,$$
$$z^2 = a'y + b'z + c',$$
$$yz = py + qz + r.$$

les quantités a, b, a', b', p, q étant des fonctions entières du premier degré en x, et les quantités c, c', r des polynômes du second degré. Des transformations faciles conduisent ensuite à trois équations du premier degré en y, dont les coefficients sont des polynômes en x et dont le déterminant égalé à zéro fournit l'équation résultante en x du huitième degré. M. Lemonnier développe la discussion de ces équations du premier degré, discussion qui présente deux cas bien distincts suivant que le déterminant est, ou non, identiquement nul.

Il traite ensuite le cas où la résolution précédente ne peut pas s'effectuer, et donne dans les diverses circonstances qui peuvent se présenter l'équation résultante et la discute.

André (*D.*). — Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. (43-63).

Les problèmes dont s'occupe M. André sont compris dans l'énoncé suivant:

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n, combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

Exemples traités :

Avec un alphabet contenant v voyelles et c consonnes, combien peut-on former de mots de n lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes ?

Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse pas des divisions d'un certain ordre?

Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donné peut-il arriver à une autre case donnée?

Sur un échiquier qui représente une valeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

Tous ces problèmes sont résolus par une méthode uniforme. Les conditions données fournissent d'abord le moyen de classer en différentes espèces les parties terminales des X_n arrangements cherchés; en désignant ainsi par A_n, B_n, C_n, ... les nombres d'arrangements des diverses espèces, on a

$$X_n = A_n + B_n + C_n + \dots.$$

Les conditions données fournissent ensuite pour les nombres A_n, B_n, C_n, ... des équations liant chacun d'eux aux nombres A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, ..., A_{n-2}, B_{n-2}, C_{n-2}, ...,

A_{n-3}, ...; de ces équations et de celles qu'on en déduit en faisant varier n on en tire ensuite, par voie d'élimination, d'autres où ne figurent plus que les A ou les B, ou les C, ..., et il ne reste plus qu'à déterminer les expressions respectives de A_n, B_n, C_n, ...

Laguerre. — Sur quelques propriétés des coniques homofocales. (66-75).

Considérons un faisceau de coniques homofocales, les deux coniques du faisceau qui passent par un point M du plan, les deux centres N et N' des cercles osculateurs au point M, et la droite μ qui joint ces deux points.

Les recherches de M. Laguerre concernent ces divers éléments; ainsi, à la droite μ correspondent trois points M; à un point N du plan correspondent aussi trois points M; l'auteur donne un assez grand nombre de propriétés relatives à ces divers points.

Laguerre. — Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. (72-81).

L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.3}{x^4} - \ldots \pm \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x},$$

la relation

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}F(x) \mp 1.2\ldots n \int_0^n \frac{e^{-x}\,dx}{x^{n+1}}.$$

La série que l'on obtient en faisant croître indéfiniment n dans le polynôme $F(x)$ est nécessairement divergente pour toute valeur de x. Néanmoins, pour de grandes valeurs de la variable, elle peut, en ne tenant compte que des premiers termes, fournir une valeur très approchée de l'intégrale considérée.

M. Laguerre étudie le développement en fraction continue du polynôme $F(x)$; il parvient ainsi à la formule

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} = e^{-x}\cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{1}{\cfrac{x+3}{4}-\cfrac{\frac{1}{4}}{\cfrac{x+7}{6}-\cfrac{\frac{1}{9}}{\cfrac{x+9}{16}-\cfrac{\frac{1}{16}}{x+\ldots}}}}}},$$

dont la loi est évidente : cette formule est, il est vrai, tirée d'une série divergente; mais M. Laguerre en démontre rigoureusement l'exactitude, et son analyse s'applique à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, dont Laplace a donné le développement en fraction continue, mais par une méthode qui, reposant sur l'emploi d'un développemen divergent, ne présentait aucune rigueur, ainsi que Jacobi l'avait déjà remarqué (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 346).

En désignant par $\frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)}$ les diverses réduites de la série

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \ldots,$$

qui ont pour limites la transcendante

$$e^x \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x},$$

M. Laguerre établit les relations

$$f_n(x) = 1.2\ldots n\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right],$$

$$xf'_n(x) = nf_n(x) - n^2 f_{n-1}(x), \quad f_{n+1}(x) = (x + 2n + 1)f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x) = 0,$$

la réalité des racines de l'équation

$$f_n(x) = 0,$$

et donne le développement en série d'une fonction quelconque $\Phi(x)$ au moyen des polynômes $f_n(x)$.

Stefanos. — Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables. (81-83).

Une expression indéfiniment prolongée de la forme

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

où les nombres entiers non négatifs a_i sont, à partir du second, plus petits que l'indice i de leur rang, représente un nombre commensurable ou non, suivant que les nombres a_i sont, à partir d'un certain rang k, égaux toujours à $i-1$ ou ne le sont pas. Comme l'auteur l'a fait remarquer ultérieurement, ce mode de représentation, qui est en germe dans le Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques, avait déjà été étudié par M. G Cantor (*Zeitschrift f. Math. u. Ph.*, t. XIV).

Halphen. — Sur l'équation différentielle des coniques. (83-85).

Cette équation est

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0;$$

l'équation

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0$$

caractérise la parabole.

Laquière. — Note sur la Géométrie des quinconces. (85-92).

Halphen. — Sur le développemeut d'une fonction intermédiaire (92-98).

La fonction considérée par l'auteur est la suivante

$$B(z, k) = Al_1(z, k)e^{\frac{1}{6}(1+k^2)z^2}.$$

La fonction Al de M. Weierstrass se développe, comme on sait, en une série convergente suivant les puissances entières de z, série dont les coefficients sont des polynômes en k^2 qui se calculent au moyen d'une formule récurrente qui contient trois polynômes consécutifs; les polynômes analogues qui se présentent dans la fonction introduite par M. Halphen s'obtiennent plus simplement : l'auteur montre en outre la concordance de ses résultats avec des résultats analogues établis, d'une façon toute différente, par M. Kiepert et M. Max Simon, dans deux Mémoires insérés dans les tomes 76 et 81 du *Journal de Borchardt*.

Rodet. — Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre. (98-102).

Cette méthode revient à l'application de la méthode d'approximation de Newton.

Picard (*E.*). — Sur une classe de fonctions non uniformes. (102-104).

Considérant une fonction multiforme $f(z)$ d'une variable complexe z, qui n'admette dans tout le plan que des points critiques déterminés, et désignant par A l'un des points critiques, l'auteur montre que l'on peut obtenir un développement en série de la fonction, valable pour tous les points du cercle dont A est le centre et qui passe par le point critique le plus rapproché : ce développement est de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{a}\right)^n,$$

A_n et a étant des constantes; les diverses déterminations du logarithme correspondent aux diverses valeurs que la fonction $f(z)$ prend quand on fait tourner la variable autour du point A pris pour origine.

Brioschi. — Sur les équations différentielles linéaires. Extrait d'une Lettre à M. Laguerre. (105-108).

Cette Lettre se rapporte aux Communications faites à l'Académie des Sciences par M. Laguerre *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires*.

Laguerre. — Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement. (108-123).

L'auteur se sert dans ce travail des coordonnées qu'il appelle *isotropes*, définies par les équations

$$x = X + iY,\quad y = X - iY,$$

où X, Y sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, et des équations qu'il nomme *mixtes*, équations qui relient les coordonnées x, y d'un point quelconque et le coefficient angulaire d'une tangente menée de ce point à la courbe que représente l'équation *mixte*. Il donne un assez grand nombre de propositions relatives à l'hypocycloïde à trois rebroussements; nous citerons la suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet

décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite D et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.

Borchardt. — Sur un système de trois équations différentielles totales qui déterminent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments.

Conclusions du beau travail de l'auteur inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1878, p. 96, et analysé dans le *Bulletin*.

Hermite. — Sur l'indice des fractions rationnelles.

U et V étant deux polynômes premiers entre eux de degré n et $n-1$, l'auteur se propose de montrer, d'une façon élémentaire, que l'indice de la fraction $\frac{V}{U}$ entre $-\infty$ et $+\infty$ donne la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation $U+iV=0$ où le coefficient de i est positif et le nombre de celles où ce coefficient est négatif.

Posant

$$U+iV=(x-a_1-ib_1)(x-a_2-ib_2)\ldots(x-a_n-ib_n),$$
$$U_1+iV_1=(x-a_2-ib_2)\ldots(x-a_n-ib_n),$$

on aperçoit de suite que U_1 et U sont premiers entre eux et que l'on a

$$\frac{V}{U}-\frac{V_1}{U_1}=-\frac{b_1(U_1^2+V_1^2)}{UU_1}.$$

Si l'on fait croître la variable de $-\infty$ à $+\infty$, l'indice du premier membre sera la différence des indices des deux fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_1}{V_1}$, puisque U et U_1 ne s'annulent pas simultanément.

Or, la considération du second membre montre de suite que cet indice est égal à $+1$ ou à -1 selon que b_1 sera positif ou négatif; la proposition se trouve ainsi ramenée au cas d'une équation dont le degré est moindre d'une unité, etc. M. Hermite tire de cette proposition diverses conclusions intéressantes, notamment dans le cas où toutes les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont de mêmes signes.

Jung. — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. (132-138).

Hermary. — Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive. (138-140).

Haag. — Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui les décrit. (141-143).

Aoust. — Intégrales des courbes dont les développantes par le plan sont égales entre elles. (143-159).

La *développée par le plan* d'une courbe est, d'après Lancret, l'arête de rebroussement de la surface enveloppe du plan normal à cette courbe : cette dernière est la *développante* par le plan de sa développée. Si l'on considère les courbes C et les courbes C_2 dont les premières sont les développantes et les secondes les développées par le plan des courbes C_1, le problème traité par M. l'abbé Aoust consiste à déterminer la courbe C_1 de façon que les courbes C et C_2 soient égales. En faisant usage des coordonnées *naturelles*, le problème se partage en trois opérations : 1° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; 2° l'intégration d'une équation linéaire du troisième ordre; 3° une triple quadrature. Les deux équations différentielles se ramènent d'ailleurs à deux équations différentielles linéaires du troisième ordre, qui sont identiques. M. l'abbé Aoust indique divers cas intéressants dans lesquels les opérations d'intégration peuvent être effectuées jusqu'au bout.

Rodet. — Sur les méthodes d'approximation chez les anciens. (159-167).

Rectification à une Communication précédente. Indication d'une règle dite de *médiation* exposée dans une Arithmetique de La Roche, imprimée à Lyon en 1520 et qui conduit, par des tâtonnements faciles, à des valeurs approchées d'une racine d'une équation quelconque, valeurs qui ne sont autres que les réduites successives de cette racine : M. Rodet pense que cette règle était pratiquée très anciennement par les Grecs, peut-être par les Égyptiens.

Alexéief. — Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre. (167-171).

A propos de la Communication de M. Rodet, M. Alexéief émet l'opinion que les anciens, pour l'extraction des racines carrées, pouvaient bien procéder par l'emploi successif des moyennes arithmétique et harmonique et donne quelques détails sur les calculs auxquels conduit ce procédé.

Rodet. — Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$. (171-174).

Lemonnier. — Calcul d'un déterminant. (175-177).

L'auteur démontre l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \cdots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \cdots & p+q \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ p+nq & p+q & \cdots & p+(n-1)q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} q^n \left[n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$

Fouret (G.). — Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν ayant un point principal multiple d'ordre ν^2.

L'équation

$$L\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) - M\frac{dy}{dx} + N = 0,$$

où L, M, N désignent des polynômes de degré ν en x, y dont le premier est homo-

gène, définit un système de courbes planes satisfaisant à cette double condition, qu'il y ait une branche du système passant par un point quelconque du plan et un nombre ν de ces branches tangentes à un point pris arbitrairement. Dans un tel système, il existe $\nu^2+\nu+1$ points en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée. Ces points sont en général asymptotiques communs à toutes les courbes du faisceau et, dans certains cas, des points de croisement de ces courbes. Ils comprennent les points singuliers de ces mêmes courbes, quand il en existe. M. Fouret donne à ces points le nom de points *principaux*. Plusieurs points principaux peuvent se réunir; c'est ce qui arrive quand les deux équations

$$Lx - M = 0, \quad Ly - N = 0,$$

se coupent en un point qui est multiple pour l'une d'elles. M. Fouret examine en particulier le cas où il existe un point principal multiple d'ordre ν^2; nous citerons le théorème suivant : « Pour un tel faisceau, toute droite passant par le point principal multiple d'ordre ν^2 est telle que les tangentes aux courbes du faisceau, aux points où elles rencontrent la droite, concourent en un même point ».

L'auteur donne plusieurs applications intéressantes.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. — Bruxelles, F. Hayez. In-8° (¹).

Tome I; 1875-1876 (publié en 1877).

Gilbert (*P.*). — Sur la démonstration du second principe de la Thermodynamique, due à M. Sarrau. (175).

M. Sarrau (*Journal de d'Almeida*, 1872) considère un système isotrope, soumis à une transformation infiniment petite, et lui applique le théorème de Clausius sur les mouvements stationnaires. Mais cette formule suppose que la quantité désignée par Σmr^2 reste invariable, ce qui n'a pas lieu dans la transformation considérée par M. Sarrau, où le corps change de volume.

Gilbert (*P.*). — Sur l'enseignement des Mathématiques dans les collèges. (A, 150-153).

Mansion (*P.*). — Note sur l'enseignement des Mathématiques dans les collèges. (A, 160-170).

Perry (*S.-J.*). — Sur l'observation du passage de Vénus à l'île de Kerguelen. (A, 190-193).

(¹) Deux paginations, que nous distinguons par les lettres A, B. Il paraît environ un Volume de 600 à 700 pages par an, au prix de 20 fr. Chaque Volume contient des Mémoires relatifs aux Sciences mathématiques, physiques et naturelles. Nous n'analysons que les travaux mathématiques.

Aperçu d'ensemble sur les travaux de la mission anglaise et de quelques-uns des résultats généraux de l'observation du passage en divers endroits. (Vapeur d'eau dans l'atmosphère de Vénus; différence entre le contact oculaire et le contact photographique; possibilité de voir Vénus sur la chromosphère, sans le secours d'un spectroscope; absence d'ellipticité dans la planète).

Hermite (*Ch.*). — Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. (B, 1-16).

Dans une Note du t. VII du *Journal de Crelle*, p. 416, Jacobi, en généralisant un résultat obtenu par Legendre, est parvenu à ramener, par une même substitution, deux intégrales hyperelliptiques, de genre deux, de première espèce et associées, à deux intégrales elliptiques de première espèce et de module différent. Il en a déduit la valeur de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une intégrale elliptique de première espèce à module imaginaire. M. Hermite a rencontré un second exemple de réduction analogue. Soient $ax = 4z^3 - 3az$, $3y(z^2-a) = 2z^3 - b$, $S^2 = (z^2-a)(8z^3 - 6az - b)$. On trouve

$$\int \frac{dz}{S} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-b)(x^2-a)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{S} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 3ay - b}}.$$

On est ainsi conduit, par induction, à croire qu'il existe, pour les fonctions abéliennes de genre p, des cas de réduction aux intégrales elliptiques, dans lesquels les p fonctions de première espèce seraient exprimées par autant d'intégrales elliptiques différentes, au moyen de p substitutions. Cette remarque et les exemples qui y ont conduit font entrevoir une voie nouvelle, même après les belles découvertes de Clebsch, dans la recherche des différentielles algébriques dont l'intégrale est réductible aux intégrales elliptiques. M. Hermite, sans attaquer cette question générale, en traite pourtant une qui est une généralisation des recherches de Jacobi citées plus haut.

Soient

$$x(1+az)(1+bz) = c^2 z, \quad y(1+az)(1+bz) = c^2 z, \quad c^2 = (1+a)(1+b),$$
$$kc = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad lc = \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad R(z) = z(1-z)(1-abz)(1+az)(1+bz),$$
$$\Delta^2(x,k) = x(1-x)(1-k^2x), \quad \Delta^2(y,l) = y(1-y)(1-l^2y).$$

On trouvera

$$\frac{dx}{\Delta(x,k)} = \frac{c\,dz}{\sqrt{R(z)}}(1-\sqrt{ab}\,z), \quad \frac{dy}{\Delta(y,l)} = \frac{c\,dz}{\sqrt{R(z)}}(1-\sqrt{ab}\,z)\,dz.$$

L'auteur se propose d'abord de réduire aux fonctions elliptiques la somme

$$\int \frac{f X\,dX}{\sqrt{R(X)}} + \int \frac{f Y\,dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

fX étant une fraction rationnelle, X, Y les racines fonctions de x, y de l'équation, du second degré en z,

$$\frac{(Fz)^2 - R(z)}{\Phi(z,x)\Phi(z,y)} = 0, \quad \Phi(z,x) = x(1+az)(1+bz) - c^2 z,$$

Fz étant une fonction du troisième degré, telle que la division soit possible.

Supposons d'abord $fu(u-g)=1$, g étant indéterminé, puis x_0, x_1 les racines de $\Phi(z,x)=0$, y_0, y_1 les racines de $\Phi(z,y)=0$. Le théorème d'Abel donne

$$\frac{1}{\sqrt{R(g)}}\log\frac{Fg+\sqrt{R(g)}}{Fg-\sqrt{R(g)}}=I(x_0)+I(x_1)+I(y_0)+I(y_1)+I(X)+I(Y),$$
$$I(u)=\int\frac{du}{(u-g)\sqrt{R(u)}}.$$

M. Hermite prouve que la somme $I(x_0)+I(x_1)$ se réduit aux intégrales elliptiques,

$$\int\frac{dx}{\Delta(x,k)},\quad \int\frac{dr}{(x-h)\Delta(y,l)},\quad h(1+ag)(1+bg)=c^2g;$$

la somme $I(y_0)+I(y_1)$ se réduit de même aux intégrales

$$\int\frac{dy}{\Delta(y,l)},\quad \int\frac{dy}{(x-h)\Delta(y,l)}.$$

Donc, enfin, $I(X)+I(Y)$ se réduit à des intégrales elliptiques. Le théorème annoncé est donc établi dans le cas où la fonction f est définie par la relation $fu(u-g)=1$, et, par suite, à cause des propriétés des fractions rationnelles, pour le cas où f est une fraction rationnelle quelconque, sans partie entière.

Si f a une partie entière, les intégrales abéliennes à réduire contiennent les sommes

$$\int\frac{dX}{\sqrt{R(X)}}+\int\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},\quad \int\frac{X\,dX}{\sqrt{R(X)}}+\int\frac{Y\,dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

dont on trouve les valeurs en égalant, dans la formule de réduction trouvée, quand $fu(u-g)=1$, les coefficients de g^{-1}, g^{-2}, les deux membres étant développés en série suivant les puissances de g^{-1}. Ce dernier problème résolu, on peut trouver les fonctions inverses des intégrales abéliennes. En posant

$$\int\frac{c(1+\sqrt{ab}X)}{2\sqrt{R(X)}}=\psi(X),\quad \int\frac{c(1-\sqrt{ab}X)}{2\sqrt{R(X)}}dX=\chi(X),$$

il vient

$$\psi(X)+\psi(Y)=u=-\int\frac{dx}{\Delta(x,k)},\quad \chi(X)+\chi(Y)=v=-\int\frac{dy}{\Delta(y,l)};$$

X, Y sont des fonctions algébriques de x, y et s'expriment, par conséquent, algébriquement en $\sin\operatorname{am}(u,k)$, $\sin\operatorname{am}(v,l)$. Cette conclusion donne beaucoup d'intérêt au calcul effectif des valeurs de X et Y (par lequel M. Hermite termine son travail), ou plutôt des combinaisons de ces fonctions que M. Weierstrass a désignées par $\mathrm{Al}(u,v)_\alpha$, α étant un indice unique. Les formules trouvées ouvrent la voie à des recherches ultérieures auxquelles M. Hermite reviendra.

Gilbert (P.). — Sur certaines conséquences de la formule électrodynamique d'Ampère. (B, 17-42).

De Tilly. — Rapport sur ce Mémoire. (A, 76-80).

Delsaux. — Rapport sur ce Mémoire. (A, 80-84).

Dans la première partie de son travail, M. Gilbert démontre les théorèmes sui-

vants, dans l'hypothèse de l'exactitude de la loi d'Ampère : 1° Il n'y a pas d'action réciproque entre deux éléments parallèles, quand la droite qui les joint fait avec leur direction un angle θ, tel que $3\cos^2\theta = 2$. 2° Un courant rectiligne indéfini dans un sens n'exerce aucune action longitudinale sur un élément parallèle, si la droite qui joint l'élément à l'origine du courant fait avec leur direction un angle θ, θ étant égal à $\frac{\pi}{2}$; l'action normale est nulle si $\tang\theta = \text{séc}\,\theta$. 3° L'action longitudinale d'un courant rectiligne indéfini dans un sens, sur un courant fini parallèle, n'est jamais nulle et croît indéfiniment avec la longueur du courant fini; l'action normale, au contraire, est toujours nulle pour une certaine position relative des deux courants; si tous deux sont indéfinis dans un sens et de direction contraire, l'action normale est nulle dans le cas où la droite qui joint leurs origines est perpendiculaire à leur direction. 4° Il existe une position relative de deux courants finis parallèles où leur action longitudinale mutuelle est nulle. 5° Deux portions contiguës d'un même courant rectiligne exercent l'une sur l'autre une répulsion infinie, ce qui prouve, comme l'a remarqué C. Neumann, que la loi d'Ampère n'est pas vraie pour des éléments situés à une faible distance l'un de l'autre. 6° Sur un même conducteur rectiligne indéfini dans les deux sens, deux portions indéfinies de courant, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche, et non contiguës, se repoussent avec une force infinie. (M. De Tilly remarque que cette conséquence ne prouve rien contre la loi d'Ampère; car les attractions de la partie intermédiaire du conducteur entre les deux portions considérées ne peuvent pas être négligées, quand on veut comparer les résultats du calcul à l'expérience. Dans le calcul, il faut d'ailleurs tenir compte de la nécessité de fermer le courant. Si d'ailleurs, pour un certain circuit, la répulsion était plus grande qu'une quantité M, donnée d'avance, elle serait plus grande encore pour un circuit moindre. Pour vérifier la conséquence tirée par M. Gilbert de la formule d'Ampère, il ne sert donc à rien d'allonger le circuit; c'est la force de la pile qu'il faut augmenter. Le R. P. Delseux arrive aussi à cette dernière conclusion). 7° Il est possible de placer deux conducteurs parallèles finis de manière que leur action normale mutuelle soit nulle.

Dans la seconde partie, l'auteur traite les questions suivantes : 1° Étant donné un élément ds, déterminer la figure d'un conducteur tel, que chacun de ses éléments soit sans action sur ds. 2° Déterminer la forme d'un courant linéaire dont un arc quelconque exerce sur un courant rectiligne indéfini (fini) une action longitudinale (ou normale) nulle. 3° Un courant rectiligne indéfini dans un sens ne saurait produire aucune rotation sur une portion quelconque de conducteur circulaire, ayant pour centre l'origine du courant et mobile autour de ce centre. *Ce théorème se prête à une vérification expérimentale.* 4° Calcul, au moyen des fonctions elliptiques, de l'intensité du couple moteur dans la rotation d'un courant rectiligne dans un plan horizontal, sous l'influence d'un courant circulaire fixe placé dans le même plan.

Le Paige (*C.*). — Sur les nombres de Bernoulli et sur quelques fonctions qui s'y rattachent. (B, 43-50).

Relations diverses, les unes connues, les autres données ailleurs par l'auteur, les autres, enfin, nouvelles, obtenues par la considération de la somme des produits p à p des m premiers nombres naturels.

Le Paige (*C.*). — Note sur certaines équations différentielles. (B, 51-58).

Cas divers d'intégrabilité de l'équation linéaire

$$y = a_{m-1}y' + a_{m-2}xy'' + a_{m-3}x^2y''' + \ldots + x^{m-1}y^{(n)} = 0.$$

Carbonnelle (I.) et *Ghysens (E.)*. — L'action mécanique de la lumière. (B, 59-74).

Quand un point doué d'attraction ou de répulsion oscille autour d'une position moyenne, son action moyenne peut différer notablement de l'action qu'il exercerait en restant immobile dans la position moyenne. Ce principe peut servir à expliquer, partiellement au moins, les mouvements des comètes et sans doute aussi l'action répulsive du Soleil sur la queue des comètes.

Heis (E.). — E pur si muove. (B, 201-206).

Ce mot apocryphe de Galilée ne se trouve dans aucune biographie de Galilée, avant 1789, époque où on le rencontre dans le *Dictionnaire historique ou Histoire abrégée, par une Société*, 7e édition, Caen, Leroy, t. IV. Il a été reproduit par tous les auteurs, jusqu'à Bertrand (1864), qui en a fait ressortir l'invraisemblance.

De Fierlant (A.). — Étude sur les ressorts de suspension et de traction à feuilles étagées, suivie d'une Table permettant une détermination facile de leurs dimensions. (B, 255-302).

Secchi (A.). — Lettre (à M. Newcomb) sur la structure du Soleil. (B, 303-312).

Carbonnelle (I.). — Calcul de la chaleur diurne envoyée par le Soleil en un point quelconque de la surface terrestre. (A, 126-129; B, 323-366).

Cet important travail a pour objet la détermination, par le calcul, de la quantité D de chaleur qui tombe en chaque endroit, à la limite de l'atmosphère, sur une surface plane égale à l'unité de surface, pour chaque jour de l'année. Cette quantité dépend de la hauteur méridienne du Soleil et du temps que cet astre reste au-dessus de l'horizon, temps qui augmente d'une manière continue depuis l'équateur jusqu'au parallèle où le Soleil rase l'horizon à minuit. La quantité D est donc une fonction de la latitude et du temps écoulé depuis l'équinoxe du printemps. Pour un jour donné de l'année, D varie avec la latitude, de manière que cette quantité a toujours un maximum au pôle éclairé, un autre maximum M entre le pôle et l'endroit où le Soleil est au zénith à midi, un minimum m entre ces deux maxima; D va en diminuant depuis l'endroit où $D = M$ jusqu'au pôle non éclairé ou au parallèle de perpétuelle obscurité. Le jour du solstice d'été, $D = M$, sur un parallèle qui passe à peu près par Bayonne, Marseille, Pise, Khiva, Pékin, San-Francisco, New-York, Boston; $D = M$ à Christiania, Saint-Pétersbourg, etc. A mesure que le Soleil s'éloigne de l'équateur, à partir de l'équinoxe du printemps, les points où $D = M$, $D = m$ se rapprochent sans cesse, sans s'atteindre toutefois; ils s'atteindraient si l'obliquité de l'écliptique était de 25°. Au pôle, D croît sans cesse avec la déclinaison du Soleil; le 10 mai, D a la même valeur au pôle et à l'équateur; du 10 mai au 2 août, D est plus grand au pôle qu'à l'équateur. Du 23 mai au 19 juillet,

le pôle reçoit chaque jour plus de chaleur que n'importe quel autre point de la Terre, et, du 13 mai au 29 juillet, l'équateur en reçoit moins que n'importe quel point de l'hémisphère boréal. Ces résultats sont appuyés de calculs très simples, dont il est facile de vérifier l'exactitude. Une Table numérique, qui termine le Mémoire, permet de construire des courbes donnant approximativement D pour chaque degré de déclinaison du Soleil. Ce travail du P. Carbonnelle a des applications importantes à la Géographie : il explique la rapidité et la vigueur de la végétation dans les régions polaires, plaide en faveur d'une mer libre au pôle, et peut même servir à appuyer la théorie géologique de Croll.

Tome II; 1877-1878 (publié en 1878).

Delgeur (*L.*). — Note sur la parole attribuée à Galilée : « E pur si muove. » (A, 68-69).

Irailh (Augustin Simon), né en 1719, mort en 1794, rapporte ce mot, t. III, p. 49, de l'Ouvrage intitulé : *Querelles littéraires ou Mémoires pour servir à l'histoire des révolutions de la république des lettres, depuis Homère jusqu'à nos jours*, Paris, 1761. Le mot apocryphe de Galilée date donc au moins de 1761 ; cependant il devrait être d'invention récente, puisqu'il était inconnu des biographes italiens de Galilée, à la même époque.

Mansion (*P.*). — Analyse de « Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre, Posen, 1877. » (A, 79-80).

L'enseignement rationnel de la Géométrie devrait être précédé par un enseignement intuitif de cette science, bien dirigé.

Carbonnelle (*I.*). — Examen des recherches de M. Boussinesq sur les solutions singulières des équations différentielles de la Mécanique. (A, 118-120).

L'instabilité essentielle aux solutions singulières s'oppose radicalement (suivant le R. P. Carbonnelle) aux applications philosophiques de la découverte de M. Boussinesq.

Haton de la Goupillière (*J.-N.*). — Recherches sur les développoïdes. (B, 1-24).

Historique : Réaumur, Lancret, Habich, Dewulf, Chasles, Aoust. Solutions de diverses questions intéressantes sur les développoïdes, en partant de la formule

$$\rho = r \sin\alpha + \frac{dr}{d\omega}\cos\alpha,$$

où ω est l'angle de la tangente à une courbe avec une direction fixe, ρ son rayon de courbure, r le rayon de courbure de la développoïde (enveloppe des droites faisant avec les normales à la première un angle égal à α). 1° Trouver la $n^{\text{ième}}$ développoïde inverse d'un point. 2° Trouver une courbe qui ait pour $n^{\text{ième}}$ développoïde une ligne semblable (par similitude directe ou inverse). 3° La $n^{\text{ième}}$ développoïde inverse d'une courbe quelconque, pour $n = \infty$, est une spirale logarithmique.

Le Paige (*C.*). — Note sur l'involution des ordres supérieurs. (B, 25-36).

Mansion (*P.*) et *Carnoy* (*J.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 54-60).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de $fx = 0$; $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ celles de φx; $R_1, R_2, \ldots, R_n$ celles de $fx + k\varphi x = 0$. Les relations involutives qui existent entre les r, ρ, R peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{Vmatrix} 1, & Sr_i, & Sr_ir_j, & \ldots, & r_1 r_2 \ldots r_n \\ 1, & S\rho_i, & S\rho_i\rho_j, & \ldots, & \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \\ 1, & SR_i, & SR_iR_j, & \ldots, & R_1 R_2 \ldots R_n \end{Vmatrix} = 0,$$

$$(M - N)P(x - r) + (N - A)P(x - \rho) + (A - M)(x - R) = 0.$$

P est un signe multiplicatoire, de manière que $P(x - r)$, à un facteur constant près, est identique à fx; A est l'abscisse du centre des moyennes distances des n points r, M celle du centre des moyennes distances des points ρ, N celle du centre des moyennes distances des points R. Ces remarques sur l'involution des $3n$ points r, ρ, R donnent lieu à diverses conséquences et s'étendent à mn points.

Delsaux (*J.*). — Sur la détermination analytique de la charge dans une bouteille de Leyde. (B, 37-40).

Gilbert (*P.*). — Sur un théorème de Mécanique générale et sur quelques conséquences qui en découlent. (B, 41-48).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 62-64).

Le théorème dont il s'agit est contenu dans l'égalité suivante, relative à un système quelconque de points matériels de masses m, de vitesses v_0 et v aux temps t_0 et t,

$$\frac{1}{2}\sum mv_0^2 - \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum mu^2 + S\varpi_r\frac{dr}{dt} + S\varpi_n rw - \sum \varpi' v \cos(\varpi', v),$$

u désignant la vitesse perdue pendant l'intervalle de temps considéré, S indiquant une sommation qui s'applique à tous les couples de points du système pris deux à deux, r désignant la distance mutuelle de deux points m, m', rw une vitesse perpendiculaire à la droite mm' et due à la rotation w de la droite mm' autour du point m à l'instant considéré, ϖ_r et ϖ_n l'impulsion totale de la force produite sur m par l'action de m' projetée sur la direction mm' ou sur la direction de la vitesse rw; enfin ϖ' désigne l'impulsion totale d'une force extérieure.

Voici maintenant quelques conséquences. Lorsque deux corps d'élasticité quelconque viennent à se choquer, à l'instant de la déformation maximum, la perte de force vive produite par le choc est égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues.

Dans le mouvement d'un système matériel quelconque, la demi-somme des forces vives correpondantes aux vitesses perdues de tous les points entre deux époques t_0 et t, changée de signe, est égale à la somme des travaux que développeraient toutes les forces, extérieures et intérieures, si à chaque instant de la durée $t - t_0$ on attri-

buait à chacun des points, au lieu de sa vitesse réelle, la vitesse qu'il perd entre l'instant considéré et l'époque t.

Gilbert (*P.*). — Note sur l'interprétation géométrique du mouvement apparent d'un point à la surface de la Terre. (B, 49-56).

Le Paige (*C.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 61-62).

Si l'on imagine un cylindre de révolution dont l'axe soit parallèle à l'axe austral, qu'on lui imprime un mouvement uniforme perpendiculairement au plan du méridien vers l'est, avec une vitesse $\frac{g \cos \lambda}{2\omega}$, où λ désigne la latitude du lieu considéré et ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre; que sur ce cylindre une génératrice PM tourne autour de l'axe avec une vitesse angulaire double de la rotation terrestre, mais en sens contraire; qu'enfin sur cette génératrice un point M se meuve dans le sens nord-sud, d'un mouvement uniformément varié, avec une accélération $g \sin \lambda$ proportionnelle au sinus de la latitude, on aura la représentation géométrique exacte du mouvement apparent d'un point pesant à la surface de la Terre.

Si l'on conçoit un système de deux axes mobiles, l'un normal au plan du méridien vers l'est, l'autre parallèle à l'axe de la Terre vers le sud et dont le point commun, partant de la position initiale du mobile, décrit un cercle normal à l'axe terrestre, en sens contraire de la rotation de la Terre et avec une vitesse angulaire double de cette rotation, le mouvement apparent du point mobile, dans le plan de ces deux axes, sera un simple mouvement parabolique, semblable à celui d'un point pesant dans le vide quand on fait abstraction de la rotation terrestre.

Belpaire (*T.*). — Essai d'une théorie des voûtes en berceau, en arc de cercle et en plein cintre. (B. 57-80).

Lagasse et *Cousin*. — Rapports sur ce Mémoire. (A, 71-79).

L'auteur a essayé de faire disparaître l'indétermination que présente l'emploi de la méthode des courbes de pression. Pour cela, il a étudié les déformations que subit le système et, moyennant des hypothèses plus ou moins plausibles, il est arrivé à deux conditions nouvelles auxquelles doit satisfaire la courbe des pressions et qui permettent de la déterminer.

Gilbert (*P.*). — Sur quelques propriétés relatives aux mouvements plans. (B, 81-88).

Ghysens (*E.*). — Rapport sur ce Mémoire. (65-66).

L'auteur donne une construction simple de la normale commune aux centroïdes fixe et mobile, qui, en roulant l'un sur l'autre, permettent de réaliser le mouvement d'une figure plane dans son plan, ainsi que du pôle des inflexions, lorsque l'on connaît, au moment considéré, les centres de courbure des trajectoires de deux points de la figure mobile; le point d'intersection des deux droites qui joignent respectivement les deux points de la figure mobile aux deux points où les perpendiculaires menées aux normales aux deux trajectoires en leur point commun (centre instantané de rotation) rencontrent la droite qui joint les centres de courbure appar-

tient à la normale commune. La construction du pôle des inflexions est ensuite facile.

M. Gilbert démontre ensuite, par des considérations cinématiques, la proposition relative au centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe de la figure mobile.

Ghysens (*E.*). — Sur les aires partielles de l'ellipsoïde. (B, 89-98).

Simplification et extension des recherches résumées dans SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, B, II.

Delsaux (*J.*). — Sur la démonstration de l'équation $\Delta V = -4\pi\rho$ dans la théorie du potentiel. (B, 99-102).

Mansion (*P.*). — Rapport sur ce Mémoire. (A, 67).

On peut réduire la démonstration au cas où le corps se réduit à une sphère aussi petite qu'on le veut, la densité étant nulle au centre si le corps est hétérogène. On a $\int \Delta V\, dv = \int \frac{dV}{dn}\, d\sigma$, V étant le potentiel, v le volume, σ la surface, n la normale de la petite sphère. Mais, d'après la théorie de l'attraction, $\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = -4\pi \int \rho\, dv$, ρ étant la densité. On déduit de là $\Delta V = -4\pi\rho$, au moins si ΔV ne change pas de signe en chaque point de la sphère.

Turquan (*L.-V.*). — Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. (B, 123-156).

L'auteur arrive à une conclusion contraire à celle de Clebsch (*Journal de Crelle*, année 1859); les petits mouvements du liquide n'ont aucune influence sur la stabilité de l'équilibre du corps flottant.

Hermite (*C.*). — Sur la décomposition des fractions rationnelles en fonctions simples. (B, 157-160).

Soient $Fx = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, fx, φx des fonctions entières; ensuite

$$\frac{fx}{Fx} = \varphi x + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots.$$

Dérivant les deux membres de cette égalité $(m-1)$ fois rapport à a, $(n-1)$ fois par rapport à b, $(p-1)$ fois par rapport à c, etc., on trouve la formule de décomposition de $[fx:(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots]$ en fractions simples.

Mansion (*P.*). — Généralisation d'un théorème de M. H.-J.-S. Smith. (B, 211-224).

Valeur de tout déterminant symétrique $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$, où $a_{ik} = a_{i-k,k}$ $(i > k)$. Conséquences.

Gilbert (*P.*). — Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. (B, 255-355).

Analyse critique des principaux travaux sur la question, en laissant de [illegible] les premiers linéaments de la théorie à son origine, les écrits sur la [illegible]

équinoxes et ceux qui sont relatifs aux projectiles cylindro-coniques. — I. D'Alembert, Euler, Lagrange, Legendre, Poisson. Théorie de Poinsot; critiques de Gascheau; recherches de Saint-Guilhem et de M. Folie. M. Gilbert fait remarquer que Poinsot est loin d'être toujours rigoureux dans ses raisonnements. — II. 1. Travaux indépendants de la théorie de Poinsot, ayant leur point de départ dans la dissertation de Rueb : Rueb, Jacobi, Somof, Gudermann, Weierstrass, Richelot. 2. Mémoires où la théorie de Poinsot est rattachée à celle de Rueb et Jacobi : Sylvester, Radau, Dieu, Chelini, Siacci. — III. Mouvement de la toupie, de la machine de Bohnenberger, du gyroscope de Foucault; autres appareils analogues. Explications élémentaires par la cinématique des mouvements observés : Sire, Hirn, Heynen, Jouffret. Leurs défauts. — IV. Théories analytiques sur le même sujet : Poisson, Puiseux, Resal, Heynen, Somof, Lottner. — V. Analyse des recherches où l'on tient compte des phénomènes manifestés par le gyroscope sous l'influence de la rotation terrestre : Lamarle, Quet, Resal, Bertrand (pas rigoureux), Yvon Villarceau, Lottner (erroné), Bour. — VI. Bibliographie contenant une liste de nombreux Mémoires qui n'ont pu être analysés par M. Gilbert, en particulier ceux de MM. Brill et Hermite.

De Saint-Venant. — De la constitution des atomes. (B, 417-456, et SUPPLÉMENT, 1-39).

Développement de l'idée de Boscowich. Les derniers éléments des corps sont des points mathématiques agissant les uns sur les autres, avec des intensités fonctions de leurs distances mutuelles, ou mieux doués de mouvements dont la loi dépend des dérivées secondes de ces distances par rapport au temps. La théorie de l'élasticité de Navier, Poisson et Cauchy, selon l'auteur, ne permet pas l'admission d'une matière continue. Dans le supplément, M. de Saint-Venant cite l'autorité de quelques philosophes en faveur de sa théorie et répond aux objections d'ordre métaphysique. Il n'explique pas d'où peut nous venir l'idée de continuité dans son système.

Belpaire (*T.*). — Tables permettant d'effectuer rapidement les calculs relatifs à la stabilité des voûtes en berceau, en arc de cercle et en plein cintre (B, 457-477). P. MANSION.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome XC; 1880, 1er semestre.

N° 1; 5 janvier.

Sainte-Claire Deville (*H.*). — Du mouvement engendré par la diffusion des gaz et des liquides. (18).

Janssen. — Remarques sur une Communication récente, relative au réseau photosphérique. (26).

Trève. — **Sur une application de la préexistence des courants d'Ampère dans le fer doux. (35).**

Trève. — **Sur de nouveaux tubes lumineux. (36).**

N° 2; 12 janvier.

Faye. — **Sur les observations météorologiques du mois de mai à Zi-ka-wei, en Chine. (50).**

Saint-Venant (de). — **Sur la géométrie cinématique des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides. (53).**

Moncel (Th. du). — **Influence de la nature des charbons sur la lumière électrique. (64).**

Lalanne (L.) et *Lemoine (G.).* — **Sur le désaccord apparent entre les hauteurs observées récemment sur la Seine et les prévisions du Service hydrométrique dans la traversée de Paris. (65).**

Huggins (W.). — **Sur les spectres photographiques des étoiles. (70).**

Colladon. — État des travaux de percement du Saint-Gothard. (73).

Callandreau. — Détermination, par la méthode de M. Gyldén, du mouvement de la planète Héra (103). (82).

Darboux (G.). — Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. (83).

Toutes les fois que l'on aura un polygone d'ordre n inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, on pourra obtenir une transformation rationnelle d'ordre n d'une intégrale elliptique dans une autre.

Soient

$$P_1 = 0, \quad \ldots, \quad P_n = 0$$

les équations des côtés du polygone inscrit à la conique (C); tous les points de cette conique satisfont à une équation de la forme

$$\frac{a_1}{P_1} + \frac{a_2}{P_2} + \cdots + \frac{a_n}{P_n} = 0,$$

où les a sont des constantes. Soient (C′) une conique inscrite au polygone, λ un paramètre au moyen duquel on détermine individuellement les points de (C′); un point

quelconque du plan est déterminé par les deux valeurs ρ, ρ_1 de λ, qui répondent aux points de contact des tangentes issues de ce point; l'équation précédente, avec ce système de coordonnées, prendra la forme

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)},$$

où f, φ désignent des polynômes d'ordre $n-1$, n. L'équation $\varphi(\rho) - kf(\rho) = 0$ définit, lorsque k varie, tous les polygones inscrits à (C) et circonscrits à (C'), c'est-à-dire qu'elle donne, pour chaque valeur de k, les paramètres des points de contact des différents côtés du polygone correspondant.

Soient maintenant B_1, B_2, B_3, B_4 les points de contact avec la conique (C) des tangentes communes aux deux coniques (C), (C'), et b_1, b_2, b_3, b_4 les paramètres des points de contact avec C' de ces tangentes communes. Supposons d'abord n impair; si l'un des sommets du polygone inscrit à (C) et circonscrit à (C') vient en B_1, l'un des côtés de ce polygone se réduira à la tangente en ce point, et l'on reconnait sans peine que tous les autres côtés sont deux à deux confondus. Il suit de là que, pour une valeur k_1 de k, on aura l'identité

$$\varphi(\rho) - k_1 f(\rho) = (\rho - b_1) U_1^2,$$

U_1 étant un polynôme entier en ρ; de même

$$\varphi(\rho) - k_2 f(\rho) = (\rho - b_2) U_2^2,$$
$$\varphi(\rho) - k_3 f(\rho) = (\rho - b_3) U_3^2,$$
$$\varphi(\rho) - k_4 f(\rho) = (\rho - b_4) U_4^2,$$

et, par suite, la formule

$$y = \frac{\varphi(\rho)}{f(\rho)}$$

donnera une transformation des deux différentielles

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-k_1)(y-k_2)(y-k_3)(y-k_4)}}, \quad \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-b_1)(\rho-b_2)(\rho-b_3)(\rho-b_4)}};$$

Le cas de n pair conduit à des conclusions analogues; il y a alors deux espèces distinctes de polygones à côtés confondus.

Thollon. — Cyclone solaire. (87).

Villari (R.). — Sur les lois thermiques des étincelles électriques produites par les décharges ordinaires, incomplètes et partielles des condensateurs. (89).

Denza (P.). — Variations de la déclinaison magnétique, déduites des observations régulières faites à Moncalieri dans la période 1871-78. (92).

Griffe (A.). — Sur le galvanomètre de Thomson. (94).

N° 3; 19 janvier.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (106).

Suite des belles recherches de l'auteur sur les équations analogues à l'équation de Lamé. L'ensemble de ces recherches sera analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Picard (E.). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (128).

Si les coefficients d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque sont des fonctions doublement périodiques de première espèce, aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, et si cette équation admet une intégrale uniforme n'ayant dans tout le plan que des pôles, cette intégrale pourra être exprimée au moyen des fonctions H, Θ de Jacobi.

Si, en effet, une fonction uniforme $f(x)$ jouit des propriétés définies par les deux équations

$$f(x+2m\mathrm{K}) = \mathrm{A}_1 f(x) + \mathrm{A}_2 f(x+2\mathrm{K}) + \ldots + \mathrm{A}_m f[x+2(m-1)\mathrm{K}],$$
$$f(x+2mi\mathrm{K}') = \mathrm{B}_1 f(x) + \mathrm{B}_2 f(x+2i\mathrm{K}') + \ldots + \mathrm{B}_m f[x+2(m-1)i\mathrm{K}'],$$

où les A et les B sont des constantes, on reconnait aisément que, pourvu que certaines équations algébriques de degré m aient leurs racines inégales, $f(x)$ est la somme de m^2 fonctions périodiques de seconde espèce. Dans le cas où $f(x)$ est une intégrale d'une équation linéaire de la classe considérée, cette fonction jouit évidemment des propriétés précédentes; on reconnait alors que $m^2 - m$ des fonctions de seconde espèce sont nulles.

L'auteur donne comme application l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (h - 6k^2 \sin^2 x)\frac{dy}{dx} + h_1 y = 0,$$

où h, h_1 sont des constantes quelconques, et qui admet trois intégrales de la forme

$$y = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(0)}{\Theta(0)}\right]x},$$

λ et ω étant des constantes convenablement choisies.

N° 4; 26 janvier.

Resal (H.). — De l'influence de la température et de l'élasticité sur les câbles des ponts suspendus. (149).

D'Arsonval. — Sur un nouveau condensateur voltaïque. (166).

Appell. — Sur des fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes. (174).

Soient b et β deux constantes données, m un entier quelconque, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes assujetties à la condition

$$\Sigma a_k - \Sigma \alpha_k = m\beta;$$

posons

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{h=n} \frac{\theta_1(x+a_h)}{\theta_1(x+\alpha_h)},$$

et soit $f(y)$ une fonction uniforme de y admettant la période b. La fonction

$$(1) \qquad f\left[my + \frac{b}{2\pi i}\log\varphi(x)\right]$$

est une fonction uniforme de x et y admettant trois paires de périodes conjuguées, à savoir pour x les périodes ω, ω', o et pour y les périodes correspondantes o, $\frac{b\beta}{\omega}$, b. Formons un nombre quelconque de fonctions telles que (1), puis prenons une fonction rationnelle de ces fonctions, de fonctions doublement périodiques de x aux périodes ω et ω', et de fonctions doublement périodiques de y aux périodes $\frac{b\beta}{\omega}$ et b; nous obtiendrons ainsi une fonction uniforme $F(x,y)$ admettant les trois paires de périodes déjà indiquées et dont les dérivées partielles sont des fonctions composées de la même façon que la fonction elle-même.

Si parmi ces fonctions on considère celles qui sont des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi y i}{b}}$, leurs dérivées partielles seront composées de la même façon. *Entre trois de ces fonctions u, v, w existe une relation algébrique.* En particulier, il existe une telle relation entre u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Mittag-Leffler. — Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. (177).

Soit $F(x)$ une telle fonction, en sorte que

$$F(x+2K) = \mu F(x),$$
$$F(x+2iK') = \mu' F(x),$$

et soit, dans le voisinage d'un pôle a,

$$F(a+\varepsilon) = A\varepsilon^{-1} + A_1 D\varepsilon^{-1} + \ldots + A_\alpha D^\alpha \varepsilon^{-1} + B + B_1\varepsilon + \ldots.$$

M. Hermite a montré que $F(x)$ peut être représenté par la formule

$$F(x) = \Sigma[Af(x-a) + A_1 Df(x-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)],$$

où la sommation embrasse tous les pôles a situés dans le parallélogramme des pé-

riodes et où $f(x)$ est une fonction définie par l'égalité

$$f(x) = \frac{H'(0)H(x+\omega)}{H(\omega)H(x)}e^{\lambda x},$$

les constantes λ et ω étant telles que l'on ait

$$\mu = e^{2\lambda K}, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{K} + 2\lambda i K'}.$$

Il est clair que cette formule est en défaut toutes les fois que l'on a

$$\omega = \pm 2mK \pm 2niK';$$

les constantes μ et μ' prennent alors la forme

$$\mu = e^{2\lambda' K}, \quad \mu' = e^{2\lambda' i K'}.$$

M. Mittag-Leffler établit comme il suit la formule qui, dans ce cas d'exception, doit remplacer la formule de M. Hermite.

Partant de la formule fondamentale

$$2\pi i \Delta = 2K \int_0^1 [\Phi(p+2Kt) - \Phi(p+2iK'+2Kt)]\,dt$$
$$- 2iK' \int_0^1 [\Phi(p+2iK't) - \Phi(p+2K+2iK't)]\,dt,$$

qui donne la somme des résidus des pôles d'une fonction $\Phi(z)$, uniforme et n'ayant pas d'autre point singulier essentiel que le point ∞, dans l'intérieur du parallélogramme $p + 2K\xi + 2iK'\eta$, on applique cette formule à la fonction

$$\Phi(z) = F(z)\varphi(x-z),$$

où $F(z)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, se trouvant dans les conditions d'exception et où

$$\varphi(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}e^{\lambda z},$$

on trouve alors

$$\Delta = e^{-\lambda x}\int_0^1 e^{-\lambda(p+2Kt)}F(p+2Kt)\,dt.$$

Si maintenant x est situé dans le parallélogramme des périodes et si l'on a dans le voisinage d'un pôle a

$$F(a+\varepsilon) = A\varepsilon^{-1} + A_1 D\varepsilon^{-1} + \ldots + A_\alpha D^\alpha \varepsilon^{-1} + B + \ldots,$$

le résidu de la fonction Φ correspondant à ce pôle devient

$$A\varphi(x-a) + A_1 D\varphi(x-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha \varphi(x-a),$$

et l'on a

$$F(x) = A_0 e^{\lambda x} + \Sigma[A\varphi(x-a) + A_1 D\varphi(x-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha \varphi(x-a)],$$

où

$$A_0 = \int_0^1 e^{-\lambda(p+2Kt)}F(p+2Kt)\,dt,$$

et où la sommation s'étend à tous les pôles du parallélogramme; en remplaçant x par $x+2iK'$, on voit immédiatement que

$$\Sigma(A + A_1\lambda + \ldots + A_\alpha\lambda^\alpha)e^{-\lambda a} = 0.$$

Laguerre. — Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires. (180).

Si l'on désigne par f_m le dénominateur de la $m^{\text{ième}}$ réduite de la transcendante

$$e^x \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x},$$

qui satisfait à l'équation

$$xy'' + (x+1)y' - my = 0,$$

et si l'on pose

$$V = f_n f'_m - f_m f'_n,$$

l'équation $V = 0$ a $2n$ racines imaginaires.

Arney. — Sur la photographie de la portion infra-rouge du spectre solaire. (182).

N° 5; 2 février.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (201).

Gyldén. — Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. (208).

Il s'agit de l'équation

$$y'' + k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x\, y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = a \cos\mu(\operatorname{am} x) + b \sin\mu(\operatorname{am} x).$$

Saint-Venant (de). — Complément à la Note du 12 janvier 1880 sur la déformation des corps. (209).

Cailletet. — Expériences sur la compression des mélanges gazeux. (210).

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (218).

Les recherches de M. Fuchs sur les équations différentielles linéaires à intégrales régulières donnent bien le moyen de constituer un système fondamental d'intégrales dans le voisinage d'un point singulier, mais la solution complète du problème de

l'intégration, qui consiste évidemment à trouver une expression analytique de l'intégrale valable dans tout le plan n'a point encore été obtenue. M. Mittag-Leffler y est parvenu dans le cas où l'intégrale générale est uniforme et n'admet pas d'autre point singulier essentiel que le point ∞.

Soit

$$y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y$$

une telle équation.

$f(x)$, $f_1(x)$ seront, d'après M. Fuchs, des fonctions uniformes n'ayant pas d'autre point essentiel que le point ∞; en outre, dans le voisinage d'un pôle a, on devra avoir

$$f_1(x) = (x-a)^{-1}[k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \ldots],$$
$$f_2(x) = (x-a)^{-2}[h_0 + h_1(x-a) + h_2(x-a)^2 + \ldots].$$

M. Mittag-Leffler montre en outre que les coefficients h_0 et k_0 sont nécessairement des nombres entiers tels que l'on ait

$$4h_0 + (1+k_0)^2 = m^2,$$

m étant un entier positif, puis que les coefficients suivants sont liés par l'équation algébrique obtenue en éliminant $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ entre les équations

$$(1-m)c_1 = nk_1 + h_1,$$
$$2(2-m)c_2 = nk_2 + h_2 + [(n+1)k_1 + h_1]c_1,$$
$$3(3-m)c_3 = nk_3 + h_3 + [(n+1)k_2 + h_2]c_2 + [(n+2)k_1 + h_1]c_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = nk_m + h_m + [(n+1)k_{m-1} + h_{m-1}]c_{m-1} + \ldots + [(n+m-1)k_1 + h_1]c_1,$$

où

$$n = \frac{1}{2}(1 + k_0 - m).$$

Les conditions étant remplies, l'intégrale complète est toujours une fonction uniforme avec le seul point singulier ∞ et l'auteur montre comment on peut former cette intégrale.

N° 6; 9 février.

Crova (A.). — Mesure spectrométrique des hautes températures. (252).

Wolf (R.). — Statistique des taches solaires de l'année 1879. (254).

N° 7; 16 février.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. *Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1879. (261).

Lœwy et *Oppolzer*. — Détermination de la différence de longitude entre Paris et Bregens. (264).

Sylvester. — Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques. (287).

Soit k un nombre entier; que l'on forme la série

$$\cos\lambda_1\frac{2\pi}{k},\ \cos\lambda_2\frac{2\pi}{k},\ \ldots,\ \cos\lambda_i\frac{2\pi}{k},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant les $\frac{1}{2}\varphi(k)$ nombres premiers à k et moindres que $\frac{k}{2}$. Le produit de tous les facteurs $x - 2\cos\lambda\frac{2\pi}{k}$ est la fonction *cyclotomique* d'indice k; elle est ce que devient le facteur primitif de $t^k - 1$ quand on le divise par $t^{\frac{1}{2}\varphi(k)}$ et que l'on écrit $t + \frac{1}{t} = x$.

Les nombres qui divisent la fonction sans diviser l'indice sont nommés *diviseurs extérieurs;* ceux qui divisent en même temps la fonction et l'indice sont dits *diviseurs intérieurs.*

En posant

$$J(\cos\theta) = \cos(p^j\theta) - \cos(p^{j-1}\theta),$$

$J(\cos\theta)$, regardé comme fonction algébrique de $\cos\theta$, est divisible par p^j pour toute valeur réelle et entière attribuée à $\cos\theta$. M. Sylvester déduit de là diverses propositions relatives aux diviseurs tant extérieurs qu'intérieurs, propositions qu'il résume (dans une Communication postérieure) par le théorème suivant :

« Tout diviseur de la fonction cyclotomique à l'indice k est de la forme $ik \pm 1$, excepté dans le cas où $k = \frac{p \mp 1}{m} p^j$, dans lequel cas p (et non p^2) est aussi diviseur. Réciproquement, tout nombre dont les facteurs sont des puissances arbitraires de nombres premiers de la forme $ik \pm 1$ est diviseur de la fonction cyclotomique à l'indice k. »

Ainsi la fonction cyclotomique à l'indice 9, $x^3 - 3x + 1$, a pour diviseur 3 et les nombres premiers de la forme $18n \pm 1$.

Léauté (*H.*). — Équations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace. (290).

M. Léauté traite le cas où la courbe, assujettie à rester plane, étant tout d'abord en mouvement permanent dans l'espace, est légèrement déviée de sa position de repos apparent.

Picard (*E.*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (293).

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

une telle équation, les périodes des coefficients étant $2K$ et $2iK'$, et dont l'intégrale générale soit uniforme et composée d'intégrales régulières. M. Picard établit nette-

ment que cette équation admet comme intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce $\psi(x)$; dès lors, la seconde intégrale sera

$$y = \psi(x) \int \frac{dx}{\psi^2(x)} e^{-\int p\,dx},$$

et la fonction

$$F(x) = \frac{1}{\psi^2(x)} e^{-\int p\,dx}$$

est doublement périodique de seconde espèce. Dans le cas général, comme le montre la formule de réduction de M. Hermite, l'intégrale de cette fonction est elle-même une fonction de même nature, ainsi que y; dans le cas d'exception signalé récemment par M. Mittag-Leffler, il convient d'employer la formule de réduction donnée par ce dernier, et l'on trouve alors

$$\int F(x)\,dx = a_0 x + \sum \left[A_1 \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots + A_\alpha D^{\alpha-1} \frac{H'(x-a)}{H(x+a)} \right].$$

Appell. — Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations linéaires aux dérivées partielles. (296).

Posant

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1), \quad (\lambda, 0) = 1,$$

M. Appell considère les quatre séries

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

la sommation s'étendant à tous les nombres entiers m, n de zéro à l'infini. Ces quatre fonctions satisfont à des équations linéaires du second ordre aux dérivées partielles qui rappellent l'équation de la série hypergéométrique; par exemple, la première satisfait à l'équation

$$(x - x^2)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x](p - \beta y q) - \alpha\beta z = 0.$$

M. Appell montre comment ces séries donnent naissance à des polynômes à deux variables analogues aux polynômes de Jacobi.

Mittag-Leffler. — Sur les équations linéaires à coefficients doublement périodiques. (299).

La méthode suivie par M. Picard, et qui donne la forme de l'intégrale dans le cas général, ne suffit pas pour donner la forme plus particulière dont l'intégrale est susceptible dans des cas plus spéciaux. M. Mittag-Leffler établit que l'équation a toujours une intégrale doublement périodique; dès lors, les intégrales étant sup-

posées uniformes et n'ayant que le point ∞ pour point singulier essentiel, on peut déduire de l'intégrale supposée connue les $n - 1$ autres.

Genocchi (*A.*). — **Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers. (300).**

Korkine (*A.*). — **Sur l'impossibilité de la relation algébrique $X^n + Y^n + Z^n = 0$. (303).**

Laguerre. — **Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques. (305).**

En désignant par $f(x) = 0$ une équation dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-f'(\alpha) \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2(\alpha) - n(n-1) f(\alpha) f''(\alpha)}}{n f(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent α.

Cette formule fournit, par exemple, la valeur approchée

$$\cos\frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1-\cos\alpha}{n + (n-1)\sqrt{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}(1-\cos\alpha)}}.$$

Gouy. — **Sur de nouvelles franges d'interférence. (307).**

N° 8; 23 février.

Gyldén. — **Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. (344).**

Les équations

$$\operatorname{sn}^2 x y'' + \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} y' \mp \mu^2 \operatorname{cn}^2 x y = 0$$

ont pour intégrales générales

$$y = C \operatorname{sn}^{\mu}\left(\frac{x}{1+k_1}, k_1\right) + C' \operatorname{sn}^{-\mu}\left(\frac{x}{1+k_1}, k_1\right),$$

où

$$k_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

et

$$y = C \cos\mu \log\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} x}{1+\operatorname{dn} x}} + C' \sin\mu \log\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} x}{1+\operatorname{dn} x}}.$$

Sylvester. — **Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques. (345).**

M. Sylvester énonce comme très probable la possibilité de toujours résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = Dz^3,$$

où D est un diviseur de la fonction cyclotomique à indice 9.

Elliot. — Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions θ. (352).

Extension à la fonction $\Theta^{(q)}$, considérée par MM. Clebsch et Gordan, des deux théorèmes qui servent de base au problème de l'inversion d'après la méthode de Riemann.

Léauté. — Détermination des tensions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillant autour d'une position de repos apparent. (354).

Pedro (S. M. don). — Dépèche donnant les éléments de la nouvelle comète. (357).

Tacchini (P.). — Observations des taches et protubérances solaires pendant les troisième et quatrième trimestres de 1879. (358).

Mondésir (P. de). — Comparaison entre les courbes des tensions des vapeurs saturées. (360).

Chambrier. — Sur un nouvel électro-aimant. (363).

Ducretet. — Emploi du verre trempé pour la construction des condensateurs. (363).

N° 9; 1er mars.

Séance publique annuelle.

N° 10; 8 mars.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (478).

M. Hermite traite, dans cette Communication, de la courbe élastique. Il s'occupe d'abord du cas où la courbe est plane et donne les premiers termes des développements en séries des deux coordonnées.

Dans le cas où la courbe est à double courbure, Wantzel a mis les équations

sous la forme

$$y'z'' - y''z' = \alpha x' + \beta y,$$
$$z'x'' - z''x' = \alpha y' - \beta x,$$
$$x'y'' - x''y' = \alpha z' + \gamma,$$

où les dérivées sont prises par rapport à l'arc s et où α, β, γ sont des constantes dont les deux premières sont positives.

On en déduit, en remplaçant z' par ζ,

$$\zeta'^2 = 2\beta(\zeta - \delta)(1 - \zeta^2) - (\gamma\zeta + \alpha)^2,$$

δ étant une constante.

Faisant alors

$$\zeta'^2 = -2\beta(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - c),$$

on reconnait que les racines a, b, c sont réelles et que, en supposant $a > b > c$, ζ a pour limites a et b. En posant

$$\zeta = a - (a - b)U^2,$$
$$k^2 = \frac{a-b}{a-c}, \quad k'^2 = \frac{b-c}{a-c},$$
$$n = \sqrt{\frac{a-c}{2}}\,\beta, \quad u = n(s - s_0),$$

on obtiendra alors

$$U = \operatorname{sn} u, \quad \zeta = a - (a-b)\operatorname{sn}^2 u,$$
$$n(z - z_0) = \left[a - (a-c)\frac{J}{K}\right]u + (a-c)\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

On a, d'un autre côté,

$$\frac{x' + iy'}{x + iy} = \frac{\zeta' + i(\gamma\zeta + \alpha)}{2(\zeta - \delta)}.$$

Le second membre est une fonction doublement périodique de u; en la décomposant en éléments simples et en intégrant, on parvient à la relation

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)H(\omega - u)}{\Theta(u)H(\omega)}e^{\lambda u}$$

où

$$\lambda = \frac{in(a\gamma + \alpha)}{a - \delta} + \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} \quad \text{et} \quad \operatorname{sn}^2\omega = \frac{a-\delta}{a-b}.$$

Si l'on pose $\omega = K + iv$, v sera réel et l'on aura finalement

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)H(iv - u)e^{\lambda u}}{\Theta(u)H_1(iv)},$$
$$x - iy = (x_0 - iy_0)\frac{\Theta(0)H(iv + u)e^{-\lambda u}}{\Theta(0)H_1(iv)},$$

les constantes x_0, y_0 étant liées par l'équation

$$\beta(x_0^2 + y_0^2) = 2(a - \delta).$$

Phillips. — **De la compensation des températures dans les chronomètres. (483).**

Léauté (*H.*). — **Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles. (498).**

Bresse. — **Fonction des vitesses; extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait. (501).**

Callandreau. — **Éphéméride de la planète Héra pour l'opposition de 1880. (517).**

Gaussin. — **Lois concernant la distribution des astres du système solaire. (518).**

Radau (*R.*). — **Sur les formules de quadrature à coefficients égaux. (520).**

La formule

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \Sigma A \varphi(a)$$

possède le *degré de précision* $n+m-1$, si les $2n$ constantes $a, b, \ldots, A, B, \ldots$ satisfont aux relations

$$\Sigma A a^h = \int_{-1}^{+1} x^h dx \quad (h = 0, 1, \ldots, n+m-1);$$

le cas de $m = n$ est celui de la formule de Gauss. M. Radau étudie le cas où tous les coefficients ont la même valeur numérique.

Darboux (*G.*). — Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante.

Considérons le système d'équations linéaires du premier ordre

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n, \quad (i = 1, \ldots, n_n),$$

où les a sont des fonctions de la seule variable t. Ce système a, en général, n intégrales linéaires de la forme

$$\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{in} x_n = C_i;$$

mais il peut avoir des intégrales de degré supérieur au premier. Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

une telle intégrale. On voit aisément que l'on peut supposer la fonction f homogène par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; M. Darboux établit que tout covariant de cette forme multiplié par une puissance convenable d'une fonction connue de t sera également une intégrale du même système.

Cela résulte immédiatement de ce que la substitution

$$x_i = C_1 x'_i + \ldots + C_n x_i^{(n)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

où $x^i_1, \ldots, x^i_n$ constitue un système de solutions particulières, change f en une fonction

$$\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

indépendante de t. Tout covariant F de f multiplié par une puissance convenable (négative) du déterminant de la substitution (où les C sont regardés comme les variables substituées à $x_1, \ldots, x_n$) se change dans le covariant analogue de la fonction φ; quant au déterminant de la substitution, il est égal à

$$\Delta = C e^{\int (a_{11} + \ldots + a_{nn}) dt}.$$

La démonstration s'étend au cas où l'on a plusieurs intégrales et où l'on considère un covariant quelconque du système de formes.

Enfin, la proposition s'étend aux contrevariants, comme on le voit en considérant le système adjoint

$$\frac{du_i}{dt} = - a_{1i} u_1 - \ldots - a_{ni} u_n.$$

On reconnaît d'abord que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions satisfaisant au premier système, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions satisfaisant au second, on a

$$u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = \text{const.},$$

en sorte que l'intégration de l'un des systèmes entraîne celle de l'autre. On voit en passant que les deux systèmes adjoints peuvent s'écrire sous la forme *canonique*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i},$$

en faisant

$$H = \Sigma\Sigma\, a_{ij} u_i x_j.$$

Si, maintenant, on considère différentes intégrales

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = C_j, \quad (j = 1, \ldots, p),$$

homogènes par rapport aux x et par rapport aux u, toute forme invariante de ce système d'intégrales multipliée par une fonction connue de t sera encore une intégrale du système.

Pepin (*P.*). — Démonstration d'un théorème de M. Sylvester sur les diviseurs d'une fonction cyclotomique. (526).

Mondésir (*P. de*). — Comparaison entre les courbes des tensions des vapeurs saturées. (528).

N° 11; 15 mars.

Tisserand. — Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. (557).

Phillips. — De la compensation des températures dans les chronomètres. (561).

Faye. — Sur l'hypothèse de Laplace. (565).

Léauté. — Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télodynamiques. (567).

Deprez (M.). — Sur le rendement économique des moteurs électriques et sur la mesure de la quantité d'énergie qui traverse un circuit électrique. (590).

Gille (D.). — Observation de la nouvelle comète, visible à la ville du Cap. (593).

Gaussin (L.). — Lois concernant la distribution des astres du système solaire. (593).

Darboux (G.). — Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante. (596).

Voir plus haut.

Jordan (C.). — Sur la réduction des substitutions linéaires. (598).

Deux substitutions linéaires S et S', à n variables et à coefficients réels ou complexes de la forme $a+bi$ peuvent être considérées comme *équivalentes* et appartenant à la même *classe* si l'on a une relation de la forme

$$S' = ESE',$$

E et E' étant des substitutions à coefficients entiers (réels ou complexes) et de déterminant 1. Cela posé : « Une substitution S de déterminant D est toujours équivalente à une substitution réduite dont tous les coefficients ont leurs normes inférieures à $k_n\sqrt[n]{\Delta}$, Δ désignant la norme de D et k_n une constante qui ne dépend que de n.

Picard (E.). — Sur l'équation aux dérivées partielles du potentiel. (601).

Une fonction V de x, y, z, déterminée et continue ainsi que ses dérivées pour tout système de valeurs de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

ne peut rester comprise entre deux limites fixes, à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

Landolt. — Sur un nouveau télémètre. (603).

Resio (*C.*). — Application du téléphone à la mesure de la torsion de l'arbre moteur des machines en mouvement. (604).

Crafts (*J.*) et *Meier* (*F.*). — Sur un procédé pour la mesure des températures élevées. (606).

N° 12; 22 mars.

Faye. — Sur l'origine du système solaire. (637).

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (643).

Phillips. — De la compensation des températures dans les chronomètres. (649).

Poincaré. — Sur les courbes définies par une équation différentielle. (673).

Pellet. — Sur les intégrales de fonctions algébriques. (676).

Fuchs. — Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solution des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles. (678).

Résumé d'un important Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt* et qui sera analysé dans le *Bulletin*.

Fernet. — Analyse des phénomènes lumineux produits par les décharges électriques dans les gaz raréfiés. (680).

Villari. — Sur les lois thermiques des étincelles électriques produites par les décharges ordinaires, incomplètes et partielles des condensateurs. (685).

Righi (*A.*). — Sur un cas de polarité rémanente de l'acier, opposée à celle de l'hélice magnétisante qui le produit. (688).

Conche. — Sur la photographie du spectre solaire. (689).

N° 13; 29 mars.

Villarceau (*Y.*). — Application de la théorie des sinus des

ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires.

Sainte-Claire Deville (*H.*) et *Troost*. — Sur la détermination des températures élevées. (727).

Appell. — Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur les équations différentielles linéaires aux dérivées partielles. (731).

L'auteur développe une suite d'analogies intéressantes entre la série hypergéométrique ordinaire et les quatre séries à deux variables qu'il a définies dans une Communication précédente.

Fuchs. — Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solution des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles. (735).

Boussinesq. — Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses. (737).

Mathieu (*É.*). — Mémoire sur des intégrations relatives à l'équilibre d'élasticité. (739).

Joulin. — Recherches sur la diffusion. (741).

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LIÈGE. — 2e série, Bruxelles, Hayez (1).

Tome VI; décembre 1877.

Gloesener (*M.*). — Études sur l'électrodynamique et sur l'électromagnétisme. (11-111 p.).

Exposé du principe du renversement alternatif du courant électrique dans les électro-aimants.

Catalan (*E.*). — Théorie analytique des lignes à double courbure. (79 p.).

---

(1) *Voir*, pour t. I-V, *Bulletin*, 2e série, t. I, 2e Partie, p. 69. Les Mémoires sont paginés séparément.

Dans cet écrit, M. Catalan traite, avec son élégance habituelle, la plupart des questions classiques relatives aux courbes gauches, et trouve, chemin faisant, bon nombre de théorèmes nouveaux.

Catalan (*E.*). — Théorèmes d'Arithmétique. (4 p.).

Conséquences immédiates de la théorie des équations binômes. Exemple : Les nombres 11 ... 1 (m chiffres), 11 ... 1 (n chiffres) ont pour plus grand commun diviseur 11 ... 1 (p chiffres), p étant le plus grand commun diviseur de m, n.

Houtain (*L.*). — Quelques réflexions sur l'enseignement supérieur. (79 p.).

Critique de divers détails de l'enseignement supérieur belge. Essai de classification des Sciences mathématiques.

Terssen (*E.*). — Mémoire sur la résistance des canons frettés. (50 p.).

Hermite (*C.*). — Note sur une formule de Jacobi. (7 p.).

Démonstration de la formule

$$(n+1)D^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n 1.3.5\ldots(2n+1)\sin[(n+1)\arccos x],$$

au moyen de la théorie élémentaire des fractions continues algébriques.

Tome VII; décembre 1878.

Imschenetsky (*V.*). — Note sur les équations aux dérivées partielles. (6 p.).

Soient

$$x_i = q_i + q'_i\sqrt{-1},\quad y_i = p'_i + p_i\sqrt{-1},\quad z = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) = H + G\sqrt{-1};$$

on aura $(H, G) = 0$, (H, G) étant le symbole de Poisson, usité dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Conséquences pour l'intégration d'un système canonique d'ordre $4n$ et de l'équation aux dérivées partielles correspondantes.

Folie (*F.*). — Éléments de la théorie des faisceaux. (111 p.).

Analysé dans le *Bulletin*, 2ᵉ série, t. III, première Partie, p. 278-288.

Tome VIII; décembre 1878.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques ou d'Astronomie.

D. M.

BERICHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG; Mathematisch-physische Classe (¹).

Tome XXVII; 1875.

Neumann (*C.*). — La loi de Weber dans son application aux points de glissement. (1-28).

Si le circuit du courant électrique contient deux conducteurs linéaires qui se touchent en un certain point et entrent par ce point de contact en communication électrique, on peut considérer, dans le mouvement du circuit, plusieurs cas différents. Le point de contact peut se déplacer sur un seul des deux conducteurs ou sur les deux à la fois; en outre, l'angle formé par les deux conducteurs en leur point de contact peut être ou constant ou variable d'un instant à l'autre. De tous ces cas, un seul jusqu'ici a été examiné; car, dans les recherches de Weber, les seules que nous connaissions sur ce sujet, on suppose que le point de contact est mobile sur un seul des deux conducteurs, et en même temps que l'angle de ceux-ci est constamment nul.

L'auteur se propose dans ce Mémoire de reprendre à nouveau ces recherches et de montrer que, dans tous les cas énumérés ci-dessus, la loi de Weber est en concordance parfaite avec la *loi intégrale électromotrice*, c'est-à-dire avec le principe général des courants induits, établi par son père, F. Neumann. Cette loi intégrale n'est vraie que pour des courants uniformes; l'auteur soumettra donc ses recherches à cette restriction.

§ 1. Remarques préliminaires. — § 2. Sur certaines intégrales. — § 3. Action d'un courant uniforme, ayant des points de glissement, sur une particule électrique isolée. — § 4. Suite. Étude du cas où la vitesse de la particule électrique donnée éprouve des changements brusques. — § 5. Action pondéromotrice et électromotrice d'un courant ayant des points de glissement. — § 6. La loi intégrale pondéromotrice pour deux courants circulaires ayant des points de glissement. — § 7. Sur certaines équations différentielles complètement analogues à celles de Lagrange. — § 8. La loi intégrale électromotrice pour deux courants circulaires ayant des points de glissement.

Hankel (*W.*). — Sur l'état électrique des métaux plongés dans l'eau ou dans des dissolutions salines et exposés à l'irradiation du Soleil ou d'une lampe. (299-321).

Tome XXVIII; 1876.

Wiedemann (*G.*). — Sur les lois du passage de l'électricité à travers les gaz. (1-58, 1 pl.).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 267.

Zöllner (*F.*). — Sur les relations physiques entre les phénomènes hydrodynamiques et électrodynamiques. (59-226, 2 pl.). Addition à ce Mémoire. (240-252).

Zöllner (*F.*). — Réfutation de la loi potentielle élémentaire de Helmholtz par des expériences électrodynamiques sur des courants *fermés*. (227-239, 1 pl.).

Neumann (*C.*). — Deux théorèmes sur les éléments superficiels correspondants. (253-255).

1. Soient (x, y, z), (ξ, η, ζ) deux points correspondants liés par trois équations données, ds, $d\sigma$ deux éléments superficiels correspondants, a, b, c et α, β, γ les cosinus de direction de leurs normales respectives; on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} & \alpha \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} & \beta \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial z} & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut appliquer cette formule à la démonstration de l'expression de la mesure de la courbure de Gauss.

2. Si les six coordonnées sont exprimées en fonction de deux paramètres p, q, ce qui détermine, par l'élimination de ces paramètres, deux surfaces (x, y, z), (ξ, η, ζ), alors les éléments superficiels correspondants ds, $d\sigma$ seront liés par la relation

$$\frac{ds}{d\sigma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & a \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & b \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial p} & \frac{\partial\xi}{\partial q} & \alpha \\ \frac{\partial\eta}{\partial p} & \frac{\partial\eta}{\partial q} & \beta \\ \frac{\partial\zeta}{\partial p} & \frac{\partial\zeta}{\partial q} & \gamma \end{vmatrix}.$$

Neumann (*C.*). — Sur la loi d'Ampère. (256-267).

La faveur dont la loi d'Ampère a joui durant un demi-siècle pourrait avoir été ébranlée par les attaques auxquelles elle a été exposée dans ces derniers temps, d'autant plus que cette loi, aux yeux de la plupart des physiciens et des géomètres, repose encore sur l'hypothèse douteuse que l'action d'un courant fermé sur un seul élément de courant est *perpendiculaire* à cet élément.

L'auteur montre dans cette Note que *la loi d'Ampère est indépendante de l'hypothèse en question*, ce qui résulte déjà implicitement des recherches de Stefan.

§ 1. Deux théorèmes mathématiques. — § 2. On peut remplacer les courants électriques par des surfaces magnétiques. — § 3. Les hypothèses d'Ampère. — § 4. Déduction de la loi d'Ampère, indépendamment de deux fonctions qui restent

encore inconnues. — § 5. Détermination de ces fonctions inconnues. — § 6. Remarque finale.

Drobisch (*M.-W.*). — Quelques considérations élémentaires sur l'espace à trois dimensions. (268-274).

Considérations sur la manière dont on peut arriver à la conception d'un espace à plus de trois dimensions.

Tome XXIX; 1877.

Drobisch (*M.-W.*). — Sur la tonalité pure et la gamme tempérée. (1-67).

Hankel (*W.*). — Sur le radiomètre de Crookes. (67-70).

Hankel (*W.*). — Sur la photo-électricité du spath fluor. (71-85, 1 pl.).

Mayer (*A.*). — Sur l'expression la plus générale des forces potentielles intérieures d'un système de points matériels en mouvement. (86-100).

Si l'on pose

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

et si W représente une fonction quelconque de t, des $3n$ fonctions inconnues x_i, y_i, z_i de t, et de leurs dérivées x_i', y_i', z_i', le problème

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W)\,dt = 0$$

conduit aux $3n$ équations différentielles du second ordre

$$m_i x_i'' = \frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_i'}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on considère $m_1, m_2, \ldots, m_n$ comme les masses de n points et x_i, y_i, z_i comme leurs coordonnées rectangulaires pour le temps t, les équations différentielles précédentes seront celles du mouvement d'un système libre de points matériels, dans lequel les composantes agissant à l'époque t sur le point m_i sont

$$(1) \qquad X_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_i'}, \quad \ldots.$$

Des forces exprimées analytiquement sous cette forme s'appellent *forces potentielles*, et la fonction W, dont la connaissance les détermine complètement, est dite leur *potentiel*. En outre, l'auteur entend par *forces intérieures* du système celles qui

provienment uniquement des actions mutuelles des points du système et qui, par conséquent, se feraient à chaque équilibre sur le système, si leurs points d'application se trouvaient reliés à cet instant par des droites rigides, dont l'introduction changerait le système en un corps solide. Le problème qui fait l'objet principal de cette Note consiste à *trouver l'expression analytique la plus générale des forces intérieures d'un système matériel en mouvement, dans l'hypothèse que ces forces ont un potentiel.*

D'après leur définition, les forces intérieures sont caractérisées par les six équations de condition

$$\text{(II)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0, \quad \ldots,$$

$$\text{(III)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Y_i - z_i Z_i) = 0, \quad \ldots.$$

§ 1. Détermination du potentiel effectif d'après les conditions (II). — § 2. Détermination du potentiel effectif d'après les conditions (III). — § 3. Le principe de la force vive. — § 4. Récapitulation des résultats obtenus et conséquences.

Schlömilch (*O.*). — Sur quelques séries infinies. (101-105).

Schlömilch (*O.*). — Sur les sommes de puissances des inverses des nombres naturels. (106-109).

L'auteur a établi, en 1849, une relation entre la fonction

$$\psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \cdots \quad (0 < \mu < 1)$$

et la fonction complémentaire $\psi(1-\mu)$. Il cherche, dans la présente Note, à établir une relation analogue entre les fonctions

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \cdots$$

et $\varphi(1-\mu)$. Il parvient à la formule

$$\frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu} - 1} \, \frac{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu}.$$

Mayer (*A.*). — Les critériums du maximum et du minimum dans les problèmes des isopérimètres. (114-132).

D'après la théorie admise dans les Traités élémentaires, le problème isopérimétrique, qui consiste à trouver le maximum ou le minimum relatif de l'intégrale donnée

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx,$$

où l'on ne considère que les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ telles qu'une suite d'autres inté-

grales données

$$V_k = \int_{x_1}^{x_1} f_k(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)dx \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

conservent des valeurs fixées d'avance, ce problème sera complètement identique avec celui de la recherche du maximum ou du minimum absolu de l'intégrale

$$\int_0^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)dx,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ étant des constantes indéterminées, que l'on déterminerait ensuite de manière que les intégrales V_k prissent les valeurs indiquées. Cette règle est tout à fait exacte tant qu'il ne s'agit que de la simple résolution du problème, c'est-à-dire de la détermination des fonctions inconnues y. Mais, si l'on posait aussi la question de savoir si les fonctions trouvées y correspondent réellement à un maximum ou à un minimum de V, et entre quelles limites, alors, en donnant pour les deux problèmes la même réponse, on serait amené, par exemple, à cette conclusion, que le centre de gravité d'un fil homogène, suspendu par ses deux extrémités, ne prendrait la position la plus basse possible qu'autant que la distance de ses extrémités ne surpasserait pas une certaine limite, ce qui est évidemment absurde. Il est donc clair que les critériums du maximum ou du minimum ne peuvent être identiques dans les deux problèmes. C'est ce qu'a fait voir Lundström, dès l'année 1869 (¹), pour le cas d'une seule fonction inconnue y, dont les dérivées d'ordres quelconques entrent dans l'intégrale proposée, et il a donné en même temps les critériums exacts du maximum et du minimum pour les problèmes d'isopérimètres.

Mais, outre quelques inexactitudes d'expression et de calcul que contient le Mémoire de Lundström, il serait impossible, en suivant sa marche, de démontrer que les critériums, reconnus nécessaires, sont aussi suffisants. On n'y peut parvenir qu'en ramenant, comme l'ont fait Jacobi et Clebsch, la seconde variation à sa forme la plus simple.

M. Mayer, après avoir développé, dans sa dissertation publiée en 1866 (²), les critériums du maximum et du minimum dans le cas général qui comprend tous les problèmes à une seule variable indépendante, traite, dans le présent article, le cas particulier du problème des isopérimètres, en s'attachant à y introduire toute la rigueur possible. C'est l'objet du § 1.

Dans le § 2, il considère une loi de réciprocité remarquable, qui se présente dans les problèmes d'isopérimètres, et d'après laquelle à tout problème de cette classe avec m conditions isopérimétriques correspondent m autres problèmes de même nature, qui se résolvent en même temps que le premier.

Le § 3 est consacré à l'application à un problème, traité déjà pour le plan par Lundström, des critériums et de la loi de réciprocité.

Grassmann (*H.-E.*). — Sur la théorie des rayons réciproques. (133-134).

(¹) *Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3ᵉ série, t. VII, 1870. — Voir *Bulletin*, V, 168.

(²) *Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale.* Leipzig.

Neumann (*C.*). — Sur les coordonnées péripolaires. (134-153).

Dans ce système de coordonnées, un point de l'espace est déterminé d'une part au moyen de son azimut relativement à un axe vertical et à un plan horizontal; d'autre part par l'angle que fait avec le plan horizontal la surface d'une calotte sphérique ayant pour base un cercle fixe dont le centre est la trace horizontale de l'axe vertical et passant par le point considéré, et en troisième lieu par le rapport de la plus grande et de la plus petite distance rectiligne du point donné à la circonférence du cercle fixe.

Tome XXX; 1878.

Neumann (*C.*). — Nouvelle méthode pour la réduction de certains problèmes sur le potentiel. (1-9).

Le problème de trouver une fonction $\Phi(x, y)$ qui dans une aire donnée $\mathfrak{J}$ satisfasse aux conditions du potentiel, savoir, que $\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ soient uniformes et continues, que $\Delta\Phi$ soit nul, et que Φ ait sur le contour de l'aire des valeurs données, peut, comme on sait, se réduire à la recherche de la *fonction de Green*. M. Neumann montre dans cette Note que le problème peut encore se réduire d'une autre manière, qui d'ailleurs n'offre aucun avantage essentiel sur celle de Green.

§ 1. Sur un paradoxe apparent. — § 2. Sur la fonction U considérée plus haut, laquelle est importante pour les recherches qui suivent. — § 3. Exposition de la nouvelle méthode pour une aire $\mathfrak{J}$ dont le contour présente partout une courbure continue. — § 4. Sur le cas particulier où les valeurs f de U données sur le contour de $\mathfrak{J}$ y sont discontinues. — § 5. Possibilité d'appliquer les considérations précédentes à la théorie du potentiel de Newton dans l'espace.

Neumann (*C.*). — Sur deux formules données par Green. (10-12).

Neumann (*C.*). — Sur la composition des accélérations produites suivant la loi de Weber. (12-13).

Bruhns (*C.*). — Présentation de deux planches contenant des dessins de Mars et de la lumière zodiacale, faits par M. Weinek. (14-15, 2 pl.).

Mayer (*A.*). — Sur le problème le plus général du calcul des variations, dans le cas d'une seule variable indépendante. (16-32).

§ 1. La première variation et les équations différentielles du problème. — § 2. La seconde variation et la valeur limite des limites inférieures. — § 3. Les critériums du maximum et du minimum.

Neumann (*C.*). — Développement suivant les potentiels élémentaires. (47-90).

§ 1. La courbe fermée donnée σ. — § 2. Considération préliminaire. — § 3. Sur la dérivée normale de la fonction potentielle de l'aire intérieure ou extérieure

de la courbe ε. — § 4. Série des théorèmes qui servent de base aux recherches suivantes. — § 5. Les potentiels élémentaires Z correspondants aux fonctions trigonométriques Y. — § 6. Introduction des nouvelles fonctions X, qui ont à l'égard des Y la même relation que les Y avec les Z. — § 7. Développement des Y suivant les Z. — § 8. Résumé des formules obtenues. — § 9. Théorèmes généraux sur le développement d'une fonction donnée suivant les Z. — § 10. Application des théorèmes généraux à quelques cas simples. — § 11. Considérations et formules douteuses. — § 12. Éclaircissements sur les formules douteuses obtenues au paragraphe précédent. — § 13. Développement du logarithme de l'inverse de la distance de deux points. — § 14. La densité de la conche de Green. — § 15. Développement de la fonction de Green. — § 16. Considérations accessoires de nature assez incertaine. Introduction de nouvelles fonctions Ξ, H, Z à la place de X, Y, Z. — § 17. Complément des recherches précédentes sur X, Y, Z. — § 18. Remarques finales.

Bruhns (*C.*). — Sur l'éclipse lunaire du 3 avril de l'année 33 de l'ère chrétienne. (98-100).

D'après les calculs revus par Newcomb, l'éclipse commença et finit aux instants où la Lune passait au zénith des méridiens correspondants aux longitudes orientales de 129° et de 108° du méridien de Paris. Elle se leva à Jérusalem vers $6^h 15^m$, et, par conséquent, lorsqu'elle était déjà éclipsée. L'éclipse finit au moment où sa hauteur au-dessus de l'horizon était de 9°.

ABHANDLUNGEN der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. — In-4° (¹).

Tome X (suite); 1871-1874.

Bruhns (*C.*). — Détermination de la différence de longitude entre Leipzig et Vienne, exécutée par voie télégraphique, par MM. C. Bruhns et E. Weiss. (205-270).

D'après les résultats obtenus, le centre de l'Observatoire de Leipzig est à l'ouest du cercle méridien de l'Observatoire de Vienne de $15^m 57^s,663 \pm 0^s,015$. Les différences en longitude entre les sommets du triangle Berlin-Vienne-Leipzig sont donc :

Leipzig-Berlin......	$4^m.\ 0^s,89 \pm 0^s,02$
Berlin-Vienne......	11.56,78 ± 0,02
Leipzig-Vienne.....	15.57,67 ± 0,02

Hankel (*W.*). — Recherches électriques. Neuvième Mémoire : Sur

(¹) Voir *Bulletin*, V, 264.

les propriétés thermo-électriques du spath pesant. (273-342, 4 pl.).

Hankel (*W.*). — Recherches électriques. Dixième Mémoire : Sur les propriétés thermo-électriques de l'arragonite, avec un aperçu sur le développement de la théorie de la thermo-électricité des cristaux. (345-416, 3 pl.).

Neumann (*C.*). — Sur les lois élémentaires qu'on doit attribuer aux forces d'origine électrodynamique. (419-524).

I. *Sur une certaine classe d'intégrales.* — § 1. Préliminaires. — § 2. Sur la transformation des intégrales annulaires en intégrales superficielles. — § 3. Sur certaines intégrales dépendant de deux anneaux donnés. — § 4. Sur une certaine intégrale dépendant d'un anneau et, en outre, d'un seul élément linéaire. — § 5. Sur certaines intégrales dépendant de deux anneaux donnés et du mouvement communiqué à ces anneaux. — § 6. Suite. Considération d'anneaux qui sont flexibles et doués de points de glissement.

II. *Sur le principe général de la force vive.* — § 1. Équations pondéromotrices fondamentales. — § 2. Équations électromotrices fondamentales. — § 3. Attraction mutuelle entre les courants et les charges électriques. — § 4. Détermination du système matériel que l'on a à considérer. — § 5. Les quantités de force vive et de chaleur introduites dans le système donné pendant un élément de temps. — § 6. Le principe ou axiome de la force vive. — § 7. Sur les forces intérieures d'origine ordinaire. — § 8. Sur les forces intérieures d'origine électrostatique. — § 9. Conséquence du principe de la force vive.

III. *Étude des forces découvertes par Ampère et Faraday. Première méthode.* — § 1. Propriétés fondamentales de ces forces. — § 2. Formules qui se déduisent des propriétés fondamentales pour les forces pondéromotrices. — § 3. Formules qui se déduisent des formules fondamentales pour les forces électromotrices. — § 4. Application du principe de la force vive. — § 5. Sur une certaine somme de forces électromotrices. — § 6. Application d'un cas spécial de la loi intégrale électromotrice. — § 7. Lois intégrales qui découlent de la théorie exposée. — § 8. Lois élémentaires qui découlent de la théorie exposée. — § 9. Lois élémentaires pour le cas des grandes distances. — § 10. Application des lois obtenues aux conducteurs matériels.

IV. *Étude des forces découvertes par Ampère et Faraday. Seconde méthode.* — § 1. Propriétés fondamentales de ces forces. — §§ 2 et 3. Formules qui résultent des propriétés fondamentales. — § 4. Application du principe de la force vive. — § 5. Sur une certaine somme de forces électromotrices. — § 6. Application de la loi intégrale électromotrice. — § 7. Lois intégrales qui découlent de la théorie exposée. — § 8. Lois élémentaires résultant de la théorie exposée pour le cas des grandes distances.

Hansen (*P.-A.*). — De la détermination de l'erreur de graduation d'une règle divisée. (527-667, 6 Tableaux).

« Quand je publiai, dans le Tome XVII des *Astron. Nachrichten*, la disposition, inventée par moi, qui permet de réduire à un très petit nombre les traits de division d'un cercle destiné aux mesures angulaires, on connaissait déjà le moyen de déter-

miner les erreurs des divisions d'un cercle, et l'on pouvait recourir à celui qu'avait donné Bessel. Par ma nouvelle disposition, il était devenu possible d'étendre facilement ce procédé à chacun des traits de division du cercle, tandis que, avec la disposition habituelle, cette vérification, bien que théoriquement possible, aurait nécessité un trop énorme travail pour être mise en pratique. Il en est autrement pour les divisions auxiliaires qu'exige ma disposition. Ici l'ancien procédé pour la détermination des erreurs des traits de division ne suffisait plus : il fallait le remplacer par un autre, essentiellement différent et non employé jusqu'alors, que j'ai décrit et expliqué dans le Mémoire cité. Ce procédé, alors nouveau, peut aussi s'appliquer sans modification à la détermination des erreurs de division d'une règle graduée, et il a été utilisé dès cette époque. Toutefois, comme on ne peut pas assurer qu'il ait toujours été convenablement appliqué, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de revenir sur ce sujet et de l'exposer plus en détail. »

Hansen (*P.-A.*). — Recherches dioptriques, en ayant égard à la dispersion et à l'aberration de sphéricité. Deuxième Mémoire. (697-784).

Tome XI; 1874-1878.

Fechner (*G.-Th.*). — Sur la valeur initiale de la somme des écarts minima, sur sa détermination, son emploi et sa généralisation. 1874. (3-76).

I. Introduction. — II. Emploi de la valeur centrale dans le champ de recherches des objets collectifs. Relations plus générales de ces objets, auxquelles elle s'applique. — III. Moyen de détermination et relations diverses de la valeur centrale par rapport à la moyenne arithmétique. — IV. Formules pour la variation de la somme des écarts lorsqu'on déplace son point de départ, et démonstration qui en résulte de la propriété potentielle de la valeur centrale. — V. Sur les valeurs moyennes des puissances en général. — VI. Remarques sur la question de la valeur du principe de la moyenne arithmétique. — VII. Lois de la probabilité des écarts, par rapport aux diverses moyennes de puissances, dans l'hypothèse de la vérité de leur principe. — VIII. Défense de la loi de probabilité des écarts de Gauss dans les écarts thermiques mensuels. Comparaison empirique de la sûreté des trois moyennes de puissances les plus basses. — IX. De quelques moyennes qui ont en commun avec les moyennes de puissances la moyenne arithmétique et le passage de celle-ci aux ordres supérieurs.

Neumann (*C.*). — Sur la loi établie par Weber pour les forces électriques. 1874. (79-200).

Introduction.

I. *Considérations générales sur la loi de Weber.* — § 1. Transformation de la loi de Weber. — § 2. Application de la transformation à un cas particulier. — §§ 3-5. L'objection élevée par Helmholtz contre la loi de Weber. Sur l'épreuve d'une loi physique par l'application à un cas particulier. Sur l'imperfection de la loi de Weber. — § 6. Le principe de la conservation de l'énergie. — § 7. Application du principe de l'énergie à un cas particulier. — §§ 8-9. Réduction de la loi de Weber à un certain potentiel, par l'application du principe d'Hamilton. Réduction

du potentiel obtenu à un plus simple, en admettant une transmission successive. § 10. Récapitulation. Remarque sur la rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière. — § 11. Sur le potentiel introduit par Weber.

II. *La loi de Weber, fondée sur les considérations dualistiques habituelles.* — §§ 1-4. Application de la loi de Weber aux courants uniformes. Les lois intégrales. Les lois élémentaires. Vérification des lois élémentaires. — §§ 5-9. Application de la loi de Weber à des courants quelconques (uniformes ou non). Hypothèses sur la nature des mouvements électriques. Sur la densité de l'électricité libre. Calcul des forces agissantes. Sur l'action en partie pondéromotrice, en partie électromotrice des forces agissantes. Déduction des équations différentielles de Kirchhoff. — § 10. Sur les assertions de Helmholtz. — § 11. Sur les assertions de Weber et de Lorberg.

III. *La loi de Weber, fondée sur certaines considérations unitaires.* — § 1. Détermination précise de ce point de vue unitaire. — § 2. Établissement des équations différentielles. Déduction de la loi de Joule. — § 3. Sur la décomposition des déplacements et des travaux en généraux et en relatifs. — § 4. Deux théorèmes découlant des équations différentielles. — § 5. Sur une remarque de Helmholtz. — § 6. Formules de l'énergie mécanique et calorique. — § 7. Formules de l'énergie mécanique et calorique pour un système de deux corps. — §§ 8-9. Formules de l'énergie mécanique et calorique pour un système d'un nombre quelconque de corps. Loi de l'énergie et du potentiel. — § 10. La loi intégrale pondéromotrice et électromotrice pour des conducteurs matériels. — § 11. La loi intégrale pondéromotrice et électromotrice pour des conducteurs linéaires. — §§ 12-14. Formules de l'énergie mécanique et calorique pour des *portions* des corps considérés. Application au cas des courants uniformes. Application aux conducteurs linéaires, et déduction de la loi d'Ampère. — § 15. Remarques finales.

IV. *Sur les recherches et les remarques de Helmholtz qui se rattachent au contenu du présent Mémoire.* — § 1. L'objection (A) de Helmholtz contre la loi de Weber. — § 2. L'objection (B) de Helmholtz contre la loi de Weber. — § 3. Sur une faute de calcul attribuée à l'auteur par M. Helmholtz. — § 4. Sur la loi du potentiel et de l'énergie. — § 5. Sur la relation de la loi de l'énergie avec la loi de l'induction.

V. *Conclusions relatives aux discussions précédentes et au présent Mémoire.*

Hankel (W.). — Recherches électriques. Onzième Mémoire : Sur les propriétés électriques du spath calcaire, du béryl, de l'idocrase et de l'apophyllite. 1875. (203-271, 3 pl.).

Hansen (P.-A.). — Sur les perturbations des grosses planètes et en particulier de Jupiter. 1875. (275-476).

§ 1. Développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées dont il est fait usage ici. — § 2. Développement des termes généraux des perturbations de la longitude moyenne et du rayon vecteur. — § 3. Développement des perturbations générales de la troisième coordonnée. — § 4. Développement des termes de la longitude moyenne et du rayon vecteur qui correspondent au cas de $i = 0$ dans les coefficients de la fonction perturbatrice et de ses dérivées. — § 5. Développement des termes de la troisième coordonnée qui correspondent au cas de $i = 0$ dans les coefficients de la dérivée de la fonction perturbatrice par rapport à Z. — § 6. Développement général des termes dépendant des carrés et des produits des forces perturbatrices, et qui sont multipliés par t^2. — § 7. Application des développements

précédents à Jupiter. Calcul des perturbations de la latitude de Jupiter, dues à l'action de Saturne. — § 8. Calcul des perturbations de Jupiter dues à l'action d'Uranus. — § 9. Perturbations de Jupiter dues à l'action de Neptune. — § 10. Perturbations de Jupiter par Mars. — § 11. Perturbations de Jupiter par la Terre, Vénus et Mercure. — § 12. Calcul de la partie des termes des perturbations de Jupiter, multipliés par t^2, qui dépend de la variation des coordonnées de Jupiter. — § 13. Calcul des variations séculaires des autres planètes, qui sont nécessaires pour obtenir la partie des perturbations de Jupiter, multipliées par t^2, qui provient des variations des coordonnées des planètes troublantes. — § 14. Calcul de la partie des perturbations de Jupiter, multipliées par t^2, qui dépend des variations des planètes troublantes.

Hankel (*W.*). — Recherches électriques. Douzième Mémoire : Sur les propriétés thermo-électriques du gypse, de la diopside, de l'orthoclase, de l'albite et de la péricline. 1875. (479-539, 4 pl.).

Scheibner (*W.*). — Recherches dioptriques, en particulier sur l'objectif de Hansen. 1876. (I-VIII, 541-620).

§ 1. Notations et formules rigoureuses. — § 2. Développements en séries pour les distances de convergence. — § 3. Fractions continues. — § 4. Grandeur des images. Points caractéristiques du système. — § 5. Mesure de la confusion résultant de l'aberration de sphéricité. Influence de l'absorption et de la réflexion. — § 6. Minimum du cercle de dispersion. — § 7. Introduction de l'achromatisme. — § 8. Calcul du coefficient de dispersion. — § 9. Corrections à cause de l'achromasie des images et de l'accommodation pour différentes distances. — §§ 10-11. Développement des équations de condition. — § 12. Équations de condition pour trois ou quatre réfractions. — § 13. Méthode générale d'approximation. Équations de la première approximation pour trois réfractions. — § 14. Calcul de l'objectif de Hansen. — §§ 15-16. Deuxième approximation. — § 17. Première approximation pour quatre réfractions. — § 18. Système de deux lentilles séparées. Objectif de Gauss. — § 19. Système de trois lentilles contiguës. — §§ 20-21. Étude d'un objectif dialytique à six réfractions. — § 22. Conclusion.

Neumann (*C.*). — La loi de Weber, établie au point de vue unitaire. 1876. (623-639).

§ 1. Préliminaires. Les points de vue unitaire et dualistique. Force d'un courant. Formules collectives. — § 2. Les lois élémentaires. — § 3. Action des points de glissement. — § 4. La loi intégrale pondéromotrice. — § 5. La loi intégrale électromotrice.

Weber (*W.*). — Détermination de mesures électrodynamiques, en particulier sur l'énergie de l'action réciproque. 1878. (643-696, 1 pl.).

§ 1. Guide des recherches expérimentales en Électrodynamique. — § 2. L'énergie de l'action réciproque ramenée à une mesure absolue. — § 3. La loi potentielle électrodynamique déduite de la loi potentielle électrostatique au moyen du prin-

cipe de l'énergie. — § 4. Le principe ordinaire de l'énergie déduit du principe de la conservation de l'énergie. — § 5. La loi générale de la force électrique. — § 6. Lois du mouvement de deux particules électriques soumises à leur seule action mutuelle. — § 7. Rayonnement électrique; en particulier, réflexion et dispersion des rayons. — § 8. Application de la théorie de la réflexion et de la dispersion des rayons électriques à l'éther lumineux et aux gaz, d'après la théorie des chocs moléculaires de Krönig et Clausius. — § 9. Lois du mouvement de deux particules électriques soumises à leur action mutuelle et à une action extérieure. — § 10-11. Lois du mouvement d'une particule électrique renfermée dans une *sphère électrique creuse* et soumise à l'action réciproque électrique et à une action extérieure : 1° difficultés provenant des obstacles qu'oppose la nature des corps aux forces électriques d'expansion ; 2° difficultés qui se rattachent à l'hypothèse d'une valeur constante de L. — § 12. Conclusion.

MITTHEILUNGEN DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN BERN [1].

Année 1870; nos 711-744.

Kutter. — Des lois mathématiques de l'accroissement des arbres forestiers et des taillis. (116-137).

Cherbuliez. — Aperçu historique des recherches sur la vitesse de propagation du son dans l'air. (151-191).

I. Recherches sur la vitesse du son dans l'air jusqu'au temps de Newton. — II. Recherches sur la vitesse du son dans l'air depuis l'établissement de la théorie de Newton jusqu'à la correction de Laplace : A. Théorie de Newton. B. Expériences faites depuis le temps de Newton jusqu'au milieu du XVIIIe siècle.

Année 1871; nos 745-791.

Cherbuliez. — Aperçu historique des recherches sur la vitesse de propagation du son dans l'air (suite). (1-28).

II. C. Recherches théoriques depuis l'établissement de la théorie de Newton jusqu'à la correction de Laplace.

Cherbuliez. — Communications concernant l'histoire de la théorie mécanique de la chaleur. (291-324).

---

(1) Publié par livraison in-8, formant chaque année un Volume.

Année 1872; nos 792-811.

Buss (*W.-A.*). — Sur un nouveau régulateur pour les machines à vapeur, les roues hydrauliques, les turbines, etc. (40-77).

Forster (*A.*). — Sur la pluie d'étoiles filantes du 27 novembre 1872. (77-82).

Année 1873; nos 812-827.

Sidler (*G.*). — La trisection d'un arc de cercle et la conchoïde circulaire. (31-63, 4 pl.).

§ 1. Trisection d'un arc de cercle. — § 2. Nouveau mode de génération de la conchoïde circulaire. — § 3. Normales à cette courbe, cercles doublement tangents, etc. — § 4. Centres de courbure et développée de la conchoïde. — § 5. Aire et longueur de l'arc de la conchoïde circulaire.

Année 1874; nos 828-873.

Benteli (*A.*). — Sur les constructions d'ombre et de lumière. (80-92).

Schönholzer (*J.*). — Sur une application de la formule de Cauchy. (255-263).

Détermination d'intégrales définies à l'aide de la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(x)}{x-a}\,dx = F(a).$$

Année 1875; nos 874-905.

Benteli (*A.*). — Sur le point de fuite en perspective. (229-239, 2 pl.).

Année 1876; nos 906-922.

Budde (*E.*). — Notices sur la théorie du courant électrique stationnaire. (39-55).

Année 1877; nos 923-936.

Graf (*J.-H.*). — Échange du chemin du paramètre et du chemin de l'argument dans une intégrale normale de troisième espèce de fonctions algébriques. (64-71).

Année 1878; nos 937-961.

Hilfiker (*J.*). — Sur la détermination de la constante de la parallaxe du Soleil, en ayant égard principalement aux observations d'oppositions. (86-174).

Notice historique sur la question des parallaxes. Discussion des résultats obtenus par diverses méthodes.

Benteli (*A.*). — Quelques mots sur la projection circulaire. (177-184; 1 pl.).

Année 1879; nos 962-978.

Perty-Astérios : la physionomie de la Lune; essai d'une nouvelle interprétation des travaux de Mädler, Nasmyth et Carpenter. (23-29).

Notice sur cet Ouvrage d'un pseudonyme, publié en 1879 à Nordlingen.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

XLIVe Cahier, t. XXVII; 1874.

Marie (*M.*). — Théorie élémentaire des intégrales simples et de leurs périodes. (1-26).

Marie (*M.*). — Théorie élémentaire des intégrales doubles et de leurs périodes. (27-50).

Marie (*M.*). — Extension de la méthode de Cauchy à la théorie des intégrales doubles. (31-89).

Marie (*M.*). — Théorie élémentaire des intégrales d'ordre quelconque et de leurs périodes. (90-102).

Marie (*M.*). — Théorie des résidus des intégrales d'ordre quelconque. (102-107).

Marie (*M.*). — Classification des intégrales quadratiques des courbes algébriques. (109-121).

Dans ces divers Mémoires, l'auteur poursuit ses recherches sur la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires, recherches dont les principes sont contenus dans le *Mémoire sur les périodes des integrales simples et doubles* présenté par lui à l'Académie des Sciences en 1853.

Badoureau. — Note sur le problème des parties appliqué aux jeux de calcul. (123-132).

Supposons que deux joueurs soient convenus d'avance que le premier qui aura gagné N parties prendra les deux mises; supposons qu'ils aient gagné respectivement m et n parties (m et $n < N$) : ils arrêtent le jeu, et l'on demande comment ils doivent en partager l'enjeu. L'auteur traite cette question d'abord dans le cas où le jeu est un jeu de calcul, où le hasard n'a aucune part, puis dans le cas où le jeu est *mixte;* il rencontre, chemin faisant, quelques identités intéressantes.

Cornu (*A.*). — Détermination nouvelle de la vitesse de la lumière. (132-180).

M. Cornu expose dans ce Mémoire ses belles recherches sur la vitesse de la lumière; quelques pages d'introduction contiennent l'historique et la critique des méthodes astronomiques pour la détermination de cette vitesse, ainsi que de l'expérience faite par L. Foucault en 1862. On sait que M. Cornu a repris les expériences de M. Fizeau, dont ce dernier avait donné le principe en 1849. Au point de vue optique, la méthode de M. Cornu ne diffère nullement de celle de M. Fizeau et consiste toujours à lancer un rayon de lumière entre les dents d'une roue dentée, animée d'une vitesse de rotation très rapide, et à le renvoyer au point de départ au moyen d'un miroir; on observera un minimum ou un maximum dans l'intensité du rayon réfléchi, selon que ce rayon tombera sur la saillie d'une dent ou sur le vide laissé par deux dents consécutives, circonstances qui dépendent évidemment de la vitesse de rotation de la roue. C'est dans la détermination de cette vitesse au moment d'un maximum ou d'un minimum que les expériences de M. Cornu diffèrent essentiellement de celles de M. Fizeau. Ce dernier s'efforçait d'obtenir et de mesurer une vitesse constante : M. Cornu détermine, au contraire, la vitesse à chaque instant au moyen d'appareils enregistreurs. On trouvera dans son Mémoire la description de ses appareils, ainsi que le résumé et la critique de ses observations. On sait que ses expériences ont confirmé d'une façon singulière le résultat obtenu par Foucault.

Hermite. — Sur quelques intégrales définies. (181-196).

La recherche de la valeur des intégrales

$$\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, x\, dx,$$

où $f(\sin x, \cos x)$ désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$, se ramène aisément, en partant d'une formule de décomposition donnée par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse*, à la recherche de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\, x\, dx;$$

il faut nécessairement supposer que, en faisant

$$a = g + ih,$$

h ne soit pas nul, sans quoi la quantité sous le signe $\int$ deviendrait infinie entre les limites d'intégration. En posant $\alpha = e^{ia}$, $z = e^{ix}$, remplaçant dans l'intégrale précédente $\cot\frac{1}{2}(x-a)$ par $i\frac{z+\alpha}{z-\alpha}$, ou plutôt par le développement de cette fonction suivant les puissances ascendantes ou descendantes de α, selon que h est positif ou négatif, on trouve de suite, selon que l'on se trouve dans l'un ou l'autre de ces deux cas,

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\, x\, dx = 2i\pi^2 - 4\pi\left(\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \cdots\right),$$

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\, x\, dx = -2i\pi^2 - 4\pi\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots\right).$$

L'auteur traite, comme exemple, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\, dx}{\sin(x-a)},$$

et parvient, en particulier, aux formules

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\, dx}{\cos(x-ih)} = -4i\pi \operatorname{arc\,tang} e^{-h} \quad (h > 0),$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Il s'occupe ensuite de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

que l'intégration par parties ramène à l'intégrale précédemment étudiée; il montre que la détermination de la valeur de cette intégrale revient à la détermination de la valeur des intégrales de la forme

$$\int_0^{x} \log \sin\frac{1}{2}(x-a)\, dx,$$

et il parvient au résultat suivant,

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int \log\left[2\sin\frac{1}{2}(x-a)\right]dx} = e^{\mp\frac{1}{2}a},$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que le coefficient de i dans a est positif ou négatif.

Enfin les fonctions doublement périodiques conduisent à des résultats analogues; en employant la formule de décomposition, si féconde, que M. Hermite a donnée pour ces fonctions, on ramène la recherche de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2K} f(x)x\,dx,$$

où la fonction $f(x)$, aux deux périodes $2K$ et $2iK'$, n'admet, dans le rectangle des périodes, qu'un nombre fini de pôles, à la détermination de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2K} Z(x-a)x\,dx,$$

où

$$Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)},$$

et l'on a

$$e^{\frac{1}{2K}\int_0^{2K} Z(x-a)x\,dx} = Qe^{\frac{i\pi a}{2K}} H(a),$$

où

$$Q = q^{-\frac{1}{4}}(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

XLV[e] Cahier, t. XXVIII; 1878.

Moutard. — **Sur la construction des équations de la forme**

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda(x, y).$$

(1-11).

Pour qu'il existe une expression formée avec x, y, une fonction arbitraire explicite et ses n premières dérivées, qui, mise à la place de z, vérifie l'équation $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda$, il faut et il suffit que, si l'on pose

$$\Lambda_0 = \lambda, \quad \Lambda_1 = \Lambda_0 - \frac{\partial^2 \log \Lambda_0}{\partial x\,\partial y}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 - \frac{\partial^2 \log \Lambda_0 \Lambda_1}{\partial x\,\partial y}, \quad \ldots,$$

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} - \frac{\partial^2 \log \Lambda_0 \Lambda_1 \ldots \Lambda_{n-1}}{\partial x\,\partial y},$$

la quantité Λ_n soit nulle identiquement, Λ_0, Λ_1, ..., Λ_{n-1} n'étant pas nulles; de

plus, l'intégrale générale de l'équation $s = \lambda z$ peut s'écrire

$$Z = X^{(n)} + A_1 X^{(n-1)} + \ldots + A_n X + Y^{(n)} + B_1 Y^{(n-1)} + \ldots + B_n Y,$$

en désignant par X, X', ..., $X^{(n)}$ une fonction arbitraire de x et ses n dérivées, par Y, Y', ..., $Y^{(n)}$ une fonction arbitraire de y et ses n dérivées et par $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des fonctions de x et de y que l'on exprime aisément au moyen des dérivées successives de $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Cela posé, l'auteur s'occupe de l'intégration de l'équation d'ordre, $2n$, $A_n = 0$; cette intégration peut être effectuée sous forme finie par voie de récurrence; ζ et ω étant deux fonctions de x et de y telles que l'on ait

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y},$$

M. Moutard montre que l'on peut toujours trouver, par une quadrature, une fonction θ telle que l'on ait

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial.\omega\theta}{\partial x} = \omega\frac{\partial\frac{\zeta}{\omega}}{\partial x}, \quad \frac{1}{\omega}\frac{\partial.\omega\theta}{\partial y} = -\omega\frac{\partial\frac{\zeta}{\omega}}{\partial y},$$

et par suite

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \omega\frac{\partial^2\frac{1}{\omega}}{\partial x\,\partial y};$$

de plus, si l'on regarde ω comme une solution particulière, d'ailleurs quelconque, de l'équation $s = \lambda z$, λ étant supposé choisi de manière que $A_n = 0$, et que ζ désigne l'intégrale générale de la même équation, la fonction θ pourra toujours être mise sous une forme linéaire par rapport à deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, et leurs $n+1$ premières dérivées, et cette expression sera, en général, irréductible quant au nombre des dérivées. On déduit de là que, si l'on pose $\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \mu$ ou, ce qui revient au même, $\omega\frac{\partial\frac{1}{\omega}}{\partial x\,\partial y} = \mu$, et qu'on désigne par M_k la quantité formée avec μ comme A_k l'est avec λ, la fonction μ annulera M_{n+1}, sans annuler, en général, aucune des quantités M_k dont l'indice est inférieur à $n+1$. Si l'on remarque maintenant que ω, étant une intégrale particulière quelconque de l'équation $s = \lambda z$, peut désigner l'intégrale générale elle-même, on obtient la conclusion suivante, qui renferme la solution du problème.

Concevons que l'on ait trouvé la forme la plus générale de λ qui annule A_n; on pourra écrire explicitement la valeur la plus générale de z qui vérifie l'équation $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda$, et l'on introduira par là deux fonctions arbitraires; cela fait, $z\frac{\partial^2\frac{1}{z}}{\partial x\,\partial y}$ sera l'intégrale générale de l'équation $A_{n+1} = 0$. Dès lors, on peut construire successivement les intégrales générales des équations $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, ...; la première a déjà été traitée par M. Liouville; d'ailleurs, le raisonnement précédent s'applique à cette même équation et permet d'en obtenir l'intégrale générale.

Poincaré (*H.*). — Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. (13-26).

L'auteur s'occupe des équations différentielles de la forme

$$x\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

où $f(x,y)$ est holomorphe en x et en y.

En désignant par φ la valeur de $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $x=y=0$, MM. Briot et Bouquet ont montré que : si φ n'est pas entier positif, l'équation admet une intégrale holomorphe s'annulant avec x; si φ est commensurable et positif, mais non entier, l'équation admet une infinité d'intégrales holomorphes en $x^{\frac{1}{m}}$, m étant le dénominateur de φ; si φ a sa partie réelle négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'évanouissant avec x que l'intégrale holomorphe; si φ a sa partie réelle positive, l'équation admet, outre l'intégrale holomorphe, une infinité d'intégrales non holomorphes s'annulant avec x. C'est de ces intégrales non holomorphes que s'occupe M. Poincaré; il prouve que, si φ, ayant sa partie réelle positive, n'est pas entier positif, elles sont holomorphes en x et x^φ et que, si φ est entier positif, elles sont holomorphes en x et $x\log x$.

Halphen. — Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et des surfaces du second ordre. (27-89).

Si l'on considère un système de coniques (μ, ν), il peut admettre les singularités suivantes : 1° les singularités A, où la conique se réduit à deux droites en coordonnées ponctuelles, à un point en coordonnées tangentielles; 2° les singularités corrélatives A'; 3° les singularités d'ordre plus élevé B où la conique se réduit à une droite en coordonnées ponctuelles, à un point en coordonnées tangentielles. Cela posé, si le système considéré n'admet que les singularités ordinaires A, A', le théorème de M. Chasles est toujours vrai, c'est-à-dire que le nombre des coniques du système qui sont assujetties à une condition donnée est $\alpha\mu+\beta\nu$, où les nombres α, β ne dépendent que de cette condition. Il n'en est plus de même nécessairement si le système admet des singularités quelconques : le théorème de M. Chasles peut ou non s'appliquer. M. Halphen établit que :

« Pour que ce théorème s'applique à une condition donnée, quel que soit le système, il faut et il suffit que le nombre des coniques qui satisfont à cette condition et touchent une courbe donnée en deux points donnés soit le même que celui des coniques qui satisfont à cette condition et ont avec une courbe donnée, en un point donné, des contacts du troisième ordre. »

Mais le résultat, pour un système à singularités quelconques, ne peut pas se traduire par une formule telle que $\alpha\mu+\beta\nu$, même en y ajoutant d'autres termes analogues en nombre fini et déterminé. On peut cependant en obtenir une *image* simple. Tous les éléments utiles relatifs à un système quelconque se trouvent représentés dans une courbe que l'on peut dire *attachée* au système et qui est donnée par une équation en coordonnées rectilignes. Cette courbe passe à l'origine des coordonnées dans le cas seulement où le système contient la singularité B.

De même aussi, tous les éléments utiles relatifs à une condition quelconque sont représentés dans une courbe *attachée* à cette condition. Voici maintenant le théorème qui fournit la solution générale de la question proposée :

« Soit $\alpha\mu+\beta\nu$ le nombre des coniques satisfaisant à une condition donnée et faisant partie d'un système (μ, ν) à singularités ordinaires. Le nombre des coniques

satisfaisant à la même condition et faisant partie d'un système (μ, ν) quelconque est inférieur à $\alpha\mu + \beta\nu$ et en diffère d'un nombre égal à celui des points qu'ont en commun, à l'origine des coordonnées, la courbe attachée au système et la courbe attachée à la condition. »

Callandreau (O.). — Note sur l'emploi des fractions continues algébriques pour le calcul des coefficients $b_s^{(i)}$ de Laplace. (91-104).

Haton de la Goupillière. — Formules nouvelles pour l'étude du mouvement d'une figure plane. (105-172).

L'auteur traite d'abord le problème suivant :

« Supposons qu'à chaque point d'une courbe on en fasse correspondre un autre dans son plan au moyen d'une abscisse portée sur la normale et d'une ordonnée comptée suivant la tangente, ces deux coordonnées étant des fonctions absolument quelconques, mais spécifiées dans chaque cas, de la direction du rayon de courbure : trouver le lieu de ces points. »

La question est résolue par des formules qui restent les mêmes, quel que soit le mode de construction qui définit le genre des lieux géométriques demandés; elle se trouve en effet ramenée, une fois pour toutes, à une simple élimination à effectuer dans chaque cas, quand les fonctions qui expriment l'abscisse et l'ordonnée auront été spécifiées. L'auteur traite ensuite le problème inverse qui consiste à trouver la courbe, d'où l'on déduirait, par le procédé qui vient d'être expliqué, un lieu donné. Les résultats obtenus sont alors appliqués à l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan, en supposant le mouvement défini au moyen d'une courbe (directrice) et d'une droite (caractéristique) qui roule et glisse sur la courbe d'après une loi déterminée. M. H. de la Goupillière traite une suite de problèmes concernant des enveloppes de droites, des trajectoires de points, le lieu des centres instantanés pour des mouvements ainsi définis; citons, par exemple, le problème suivant :

« Quelle doit être la directrice pour que l'enveloppe d'une droite de la figure soit semblable à la $(p-1)^{\text{ième}}$ développée de cette directrice? »

Enfin, il traite le cas où le mouvement est défini par les enveloppes de deux droites faisant entre elles un angle constant.

Collignon (E.). — Note sur le mouvement des planètes. (173-200).

Picquet. — Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants. (201-244).

L'auteur réunit en un corps de doctrine une suite de propositions sur les déterminants ayant leur point de départ dans le théorème de Laplace sur la décomposition d'un déterminant en produits de déterminants complémentaires et dans le théorème sur la multiplication des déterminants; il donne au début les propriétés des déterminants dont les éléments sont les mineurs d'un déterminant donné et des mineurs de ces déterminants; d'autres propositions concernent le déterminant dont on déduit les éléments de deux déterminants A, B d'ordre n, en substituant de toutes les façons q colonnes de B à q colonnes de A, etc.

Mathieu (*E.*). — **Sur l'application du problème des trois corps à la détermination des perturbations de Jupiter et de Saturne. (245-269).**

XLVIe Cahier, t. XXVIII; 1879.

Lucas (*F.*). — **Géométrie des polynômes. (1-33).**

Soit $F(z)$ un polynôme algébrique du degré p, fonction d'une variable imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$. A chaque valeur λ de ce polynôme correspondent p valeurs de z, racines de l'équation

$$F(z) = \lambda;$$

on peut représenter λ par un point directeur L et les valeurs de z par des points-racines M.

Si L décrit un lieu déterminé, le système des points M en décrit un autre plus ou moins complexe. L'auteur se propose d'étudier dans ce Mémoire les corrélations qui existent entre le lieu des points-racines et celui du point directeur.

Dans la première Partie, M. Lucas établit quelques relations géométriques; il donne une interprétation par la Mécanique, en supposant que les points M soient doués de masses égales à l'unité et repoussent en raison inverse de la distance, et il introduit ensuite la notion des points centraux et des points critiques. Les points centraux sont ceux qui satisfont à l'équation

$$F'(z) = 0,$$

et les points critiques ceux qui donnent à $F(z)$ la même valeur que le z d'un point critique. La suite du travail est consacrée à l'étude de la transformation des contours fermés, des droites et à l'application des résultats généraux au cas des polynômes cubiques.

Jordan (*C.*). — Mémoire sur les caractéristiques des fonctions Θ. (32-63).

MM. Weber et Nöther ont publié récemment d'intéressantes recherches sur les fonctions à trois et quatre variables. Les travaux de ces deux géomètres (¹) ont pour point de départ commun l'étude de certains groupements en systèmes des caractéristiques de ces fonctions. En dehors de son application à la théorie des transcendantes, cette étude a conduit M. Weber à ce fait algébrique remarquable que le premier groupe hypo-abélien à trois couples de variables est isomorphe à celui de l'équation générale du huitième degré.

L'objet du présent Mémoire est d'étendre ces résultats à un nombre quelconque de variables. Pour y parvenir aisément, l'auteur a dû généraliser la question en considérant, parallèlement à la répartition des caractéristiques en paires et impaires adoptées par MM. Weber et Nöther, l'autre mode de répartition qui donne naissance au second groupe hypo-abélien.

(¹) Weber, *Theorie der abelschen Functionen vom Geschlecht* 3, 1876.
Nöther, *Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten* (*Math. A.*, t. XIV).

Soient $S_1, T_1, \ldots, S_n, T_n$ des substitutions d'ordre 2 et échangeables entre elles. Leur combinaison donnera un groupe G d'ordre 2^{2n} et dont les substitutions $S_1^{x_1}$, $T_1^{y_1}, \ldots, S_n^{x_n}, T_n^{y_n}$ pourront être représentées d'une manière abrégée par le symbole $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, auquel les géomètres déjà cités ont donné le nom de *caractéristique*.

M. Jordan appelle *exposant d'échange* de deux substitutions $A = (x_1 y_1, \ldots,$ $B = (x'_1, y'_1, \ldots)$ l'expression

$$(A, B) = x_1 y'_1 + x'_1 y_1 + \ldots \quad (\text{mod. } 2),$$

et il montre d'abord que le groupe G résulte de la combinaison de $2n$ substitutions

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

telles que $(A_i B_k)$ soit congru à 1 ou à 0 suivant que k est égal ou différent de i. Il résout ensuite les quatre problèmes suivants :

« Déterminer dans G les systèmes complets de substitutions telles que leurs exposants d'échange mutuels soient tous égaux à l'unité. »

« Déterminer dans G un système complet tel que les exposants d'échange (ST), (TU), (US) de trois quelconques de ses substitutions aient une somme égale à l'unité.

« Déterminer les systèmes complets de substitutions dont les exposants d'échange mutuels sont tous nuls. »

« Déterminer les systèmes complets de substitutions telles que la somme des exposants d'échange de trois d'entre elles soit nulle. »

Léauté (H.). — Étude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce. (65-99).

L'auteur s'est proposé d'étudier, dans ce travail, les diverses relations qui existent entre les fonctions elliptiques de première espèce et les coordonnées des points d'une biquadratique gauche. Cette question, qui avait été résolue d'une manière générale par Clebsch et qui a fait le sujet de différents travaux de MM. Laguerre et Darboux, a été reprise dans ces derniers temps par M. Harnack; mais l'auteur fait remarquer que son Mémoire a été communiqué à l'Académie une année avant la publication de celui de M. Harnack. Du reste, M. Léauté emploie une méthode qui lui est propre, et il obtient directement et d'une manière rapide les expressions des coordonnées d'un point de la biquadratique gauche.

Clarinval (E.). — Méthode nouvelle pour mesurer la dépense des déversoirs. (101-165).

Léauté (H.). — Méthode d'approximation graphique applicable à un grand nombre de questions de Mécanique pratique. (167-225).

La méthode d'approximation exposée par l'auteur consiste dans la substitution à un arc de courbe fini de l'arc de cercle qui l'épouse le mieux, c'est-à-dire de l'arc de cercle tel que, si l'on considère les distances maxima qui le séparent de la courbe, la plus grande est moindre que pour tout autre cercle.

Ce travail est divisé en quatre Parties.

Dans la première, l'auteur étudie d'abord le cas où l'arc de courbe n'a, dans l'étendue que l'on considère, aucune singularité ; il examine ensuite le cas particulier où cet arc présente un point de courbure maxima ou minima.

Dans la deuxième, l'auteur donne le tracé du cercle quand l'arc considéré présente un point de rebroussement à l'une de ses extrémités, et il applique les règles trouvées aux engrenages à épicycloïde, où le cercle doit passer par le point de rebroussement, et aux engrenages à développante, où il n'est plus assujetti à cette condition. Il est ainsi conduit au tracé par arcs de cercle de ces divers engrenages, et le procédé très simple qu'il est conduit à donner fournit le maximum d'approximation.

Dans la troisième Partie, M. Léauté étend ces recherches au cas plus compliqué où l'arc de courbe présente deux points de courbure maxima ou minima, et il est amené à faire une étude générale des relations qui lient les particularités d'un arc de courbe et le degré de rapprochement qu'il peut avoir avec un cercle.

Enfin, dans la quatrième Partie, il montre comment on peut, dans chaque application, obtenir que l'arc de courbe considéré ait précisément les singularités qui permettent de réaliser le degré d'approximation qu'on veut atteindre, et il donne, comme exemple de la portée de la méthode, la solution pratique et simple du problème le plus général du système articulé à trois tiges.

La méthode suivie en général par l'auteur repose sur les beaux travaux de M. Tchebychef et sur les propriétés et la détermination que cet illustre géomètre a fait connaître de la fonction qui, dans un intervalle donné, diffère le moins possible de zéro.

Dans l'étude du problème des trois tiges (IVe Partie), M. Léauté est conduit à examiner quelques propriétés générales du mouvement d'une figure dans son plan.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK; gegründet von J.-A. GRUNERT, fortgesetzt von R. HOPPE (1).

Tome LXII; 1878.

Wendlandt (*H.*). — Les fonctions de Sturm de seconde espèce. (1-77).

Dans son célèbre « Mémoire sur la résolution des équations numériques », art. 21, Sturm a indiqué une seconde manière de former une suite de fonctions auxiliaires pouvant servir aux mêmes usages que les fonctions V_n qu'il a considérées. « Quand on a deux fonctions consécutives V_{n-1} et V_n, on peut former la suivante V_{n+1} en divisant V_{n-1} par V_n, après avoir ordonné ces polynômes suivant les puissances croissantes de x, au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quotient de la forme $p+qx$ et un reste divisible par x^2; en changeant les signes de tous les termes de

(1) Voir *Bulletin*, II$_2$, 5.

ce reste et le divisant par x^2, on aura la fonction V_{n+1}, qui est ainsi liée à V_{n-1} et V_n par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p+qx) - V_{n+1}x^2. »$$

La combinaison de ce procédé avec le procédé ordinaire conduit encore à d'autres suites de fonctions V_n pouvant être employées pour le même but.

La série des fonctions ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable présente l'avantage de pouvoir être employée dans la discussion des racines des équations transcendantes. M. Wendlandt leur a donné le nom de *fonctions de Sturm de seconde espèce*. Il fait sur leurs propriétés une étude parallèle à celle qui a été développée par divers auteurs sur les *fonctions de première espèce*.

Dostor (*G.*). — Les trois sphères des polyèdres réguliers étoilés. (78-102; fr.).

L'auteur introduit la considération de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre étoilé.

§ 1. Notice sur les polyèdres étoilés. — § 2. Relations générales entre les rayons des trois sphères, l'une inscrite à un polyèdre régulier étoilé quelconque, l'autre tangente aux arêtes et la troisième circonscrite au polyèdre étoilé. — § 3. Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés. — § 4. Relations numériques entre les rayons des trois sphères dans les divers polyèdres réguliers. — § 5. Expressions générales des rayons des trois sphères en valeur de l'arête des polyèdres réguliers étoilés. — § 6. Valeurs numériques des rayons des trois sphères en fonction de l'arête des divers polyèdres réguliers.

Dostor (*G.*). — Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, ... côtés. Calcul des côtés. (103-110; fr.).

Zahradník (*K.*). — Nouvelle propriété des sections coniques. (111-112).

Curtze (*Max.*). — « Inedita Coppernicana », tirés des manuscrits de Berlin, de Frauenburg, d'Upsala et de Vienne. (113-147, 337-373).

I. Le *Commentariolus* de Copernic sur son Livre *De revolutionibus*. — II. La Lettre de Copernic au chanoine Wapowski, à Cracovie, sur le Livre de Jean Werner *De motu octavæ sphæræ*. — III. Autres Notices astronomiques. — IV. Notices mathématiques. — V. Copernic comme médecin. — VI. Quelques nouvelles données sur la vie de Copernic.

Dostor (*G.*). — Nombres relatifs des polygones réguliers de *n* et de 2*n* côtés, suivant que *n* est un nombre impair ou un nombre pair. (148-152; fr.).

Il s'agit ici des polygones étoilés des divers ordres.

Hoppe (*R.*). — Théorie purement géométrique des proportions (153-164).

Le but de l'auteur est d'éviter la considération des nombres irrationnels, en la remplaçant par une définition de la similitude des polygones, fondée uniquement sur des égalités d'angles.

Hoppe (*R.*). — Sommation de quelques séries. (165-174).

Appell (*P.*). — Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. (175-182; fr.).

Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 décembre 1876.

Appell (*P.*). — Sur les fractions continues périodiques. (183-188; fr.).

Bartl (*Carl*). — Sur le chemin suivant lequel un point passe dans un temps minimum d'un milieu au milieu contigu. (189-201).

Bartl (*Carl.*). — Contribution à l'interpolation. (202-211).

Mehmke (*R.*). — Remarque sur le rayon de torsion de courbes gauches. (212-214). — Deux théorèmes sur les surfaces du second degré. (214-215).

Hoppe (*R.*). — Problème de minimum. (215-218).

Trouver l'ellipse d'aire minimum ayant un foyer donné et passant par deux points donnés.

Fuhrmann (*W.*). — Sur le cercle des neuf points du triangle. (218-219). — Développement de $\log(1+x)$. (220).

Spitzer (*S.*). — Détermination de la valeur d'une intégrale définie. (221-222).

Cubr (*E.*). — Calcul du troisième côté d'un triangle dont on connait deux côtés et l'angle qu'ils comprennent. (222-224).

Nouvelle manière d'obtenir une prétendue abréviation du calcul, à l'aide d'un angle auxiliaire.

Netto (*E.*). — Introduction à la théorie des substitutions et ses applications. (225-258).

Čubr (*E.*). — Détermination de la projection centrale, déduite d'une projection orthogonale cotée. (259-266).

Čubr (*E.*). — Comparaison de deux hypothèses concernant la valeur morale de l'argent. (267-284).

Suivant l'une de ces hypothèses, la valeur morale d'un changement d'avoir est exprimée par le rapport de la grandeur absolue du changement à celle de l'avoir après la modification brusque.

Suivant l'autre (celle de Bernoulli), cette valeur morale, qu'il y ait perte ou gain, est mesurée par l'intégrale du rapport de la grandeur absolue d'un changement infiniment petit à la grandeur de l'avoir au moment où se fait ce changement.

Dostor (*G.*). — Propriétés relatives des polyèdres réguliers qui sont conjugués entre eux. (285-289; fr.).

Dostor (*G.*). — Nouvelle méthode pour déterminer les foyers des courbes du second degré. (289-295; fr.).

Hoppe (*R.*). — Mouvement d'une tige suspendue à un fil. (296-309).

§ 1. Équations différentielles générales du mouvement. — § 2. Rotation permanente. — § 3. Stabilité de la position verticale.

Hoffmann (*K.-E.*). — La forme finie des fractions continues périodiques. (310-316).

Scholtz (*A.*). — Six points d'une section conique. (317-324).

Mamke (*G.*). — Problème sur la construction d'une section conique. (325-329).

Zahradník (*K.*). — Contribution à la Trigonométrie. (330-332).

Ligowski. — Sommation de la série $\sum_0^\infty \frac{n^m}{n!}$. (334-335).

Hoppe (*R.*). — Une équation aux dérivées partielles. (336).

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

a pour intégrale

$$\int du\, e^{-\int f(u) du} = \varphi(x) + \chi(y).$$

Wassmuth (*A.*). — Sur les formes de courants plans de même potentiel électromagnétique. (374-389).

Hoppe (*R.*). — Mouvement de deux points matériels liés entre eux par un fil élastique, sans l'intervention de forces étrangères. (390-404).

Mock (*L.*). — Sur le cercle contenu dans la définition de la ligne de puissance (axe radical). (405-421).

Hain (*E.*). — Recherches sur le triangle. (422-442).

Voir *Bulletin*, II_2, 9.

IV. Exemples de systèmes symétriques de transversales. — V. Les anti-points de la circonférence. — VI. Sur quelques sections coniques de symétrie. — VII. Points d'affinité steinérienne. — VIII. Les polaires coniques. — IX. Les polaires droites. — X. Un point de symétrie de premier ordre.

Zahradnik (*K.*). — Nouvelle contribution à la théorie de la cissoïde. (443-447).

Voir les articles du même auteur, *Bulletin*, VIII, 172, et XI, 217.

Wassmuth (*A.*). — Note sur l'expression du potentiel intérieur d'un ellipsoïde homogène. (448).

Tome LXIII; 1879.

Meyer (*G.*). — Sur la théorie des résidus quadratiques et cubiques. (1-49).

Stern, dans son Mémoire intitulé *Recherches sur la théorie des résidus quadratiques*, a commencé par quelques études sur les combinaisons de résidus quadratiques et de non-résidus quadratiques. Ces études se rapportent principalement aux combinaisons de la deuxième classe, c'est-à-dire aux combinaisons résultant de la réunion de *deux* résidus quadratiques ou de deux non-résidus. Stern fait la remarque que ces considérations pourraient aisément être étendues aux combinaisons des classes supérieures. L'objet du présent travail est de développer les résultats indiqués par Stern et de traiter les combinaisons des classes de troisième, de quatrième et de cinquième classe, avec ou sans répétition. L'auteur étend ensuite ses recherches aux résidus cubiques.

Appell (*P.*). — Sur les familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques. (50-55; fr.).

Wallentin (*J.-G.*). — Sur la théorie des séries de différences. (56-61).

I. Sur quelques séries finies de l'Analyse combinatoire. — II. Sur la théorie.

Herwegen (*A.*). — Sur la théorie du courant électrique stationnaire. (62-80).

Hoppe (*R.*). — Sur les lignes de longueur minimum sur les surfaces des centres de courbure. (81-92).

On sait qu'à chaque ligne de courbure répond une ligne de longueur minimum sur la surface des centres de courbure correspondante. Cette ligne minimum a, par conséquent, une propriété qui la distingue de toutes les autres lignes minima partant du même point. On peut se demander quelles sont les lignes de la surface

primitive qui correspondent en général à des lignes minima de la surface des centres de courbure. La solution de ce problème fournirait pour la théorie des surfaces deux nouveaux systèmes de lignes, dont chacun renfermerait une des deux séries de lignes de courbure. Le problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle des lignes minima sur la surface des centres de courbure, exprimée au moyen des éléments de la surface primitive. La formation de cette équation pourrait présenter en elle-même un intérêt suffisant, en ce qu'elle se trouve être plus simple qu'on aurait pu s'y attendre. Elle est du second ordre et en général non linéaire. Le présent travail se borne à l'étude des cas où elle est linéaire et où, comme on le sait, une solution particulière, autre que la ligne de courbure, suffit pour obtenir l'expression du système tout entier.

§ 1. Équation différentielle de la ligne minimum en général. — § 2. Équation différentielle de la ligne minimum sur la surface des centres de courbure. — § 3. Relations avec les grandeurs fondamentales de la surface primitive. — § 4. Conditions pour que l'équation différentielle soit linéaire. — § 5. Solution. — § 6. Solutions particulières.

Zahradník (*K.*). — Rectification au Mémoire intitulé « Nouvelle propriété des sections coniques ». (93).

Voir ci-dessus, p. 115.

Zahradník (*K.*). — Contribution à la théorie de la cardioïde. (94-97).

Voir *Arch. der M. u. Ph.*, t. LIX (*Bulletin*, I_2, 161).

Schubert (*H.*). — Le nombre constant d'un polyèdre et le théorème d'Euler. (97-99).

On entend par *nombre constant* d'un polyèdre le nombre des conditions simples qui suffisent pour le déterminer. Ce nombre est égal à celui des arêtes augmenté de 6.

Hoppe (*R.*). — Complément du théorème d'Euler sur les polyèdres. (100-103).

Démonstration d'un théorème analogue pour les polyèdres non convexes.

Sinram (*Th.*). — Quelques théorèmes sur les séries. (103-108).

Sinram (*Th.*). — Quatrième théorème de Pythagore. (108).

Dobiński (*G.*). — Un développement en série. (108-110).

Développement de e^{e^x}.

Reinhold (*A.*). — Contribution à la théorie de la capillarité. (110-112).

Dostor (*G.*). — Nouvelle détermination analytique des foyers et directrices dans les sections coniques représentées par leurs équa-

tions générales, précédée des expressions générales des divers éléments que l'on distingue dans les courbes du second degré, et suivie de la détermination des coniques à centre par leur centre et les extrémités de deux diamètres conjugués. (113-204; fr.).

Hoppe (*R.*). — Surfaces des centres de courbure qui sont des surfaces développables. (205-214).

§ 1. Condition. — § 2. Situation de la surface développable des centres de courbure. — §§ 3 et 4. Premier et second cas. — § 5. Surface des centres de courbure d'une surface développable.

Hellwig (*C.*). — Les cônes circonscrits à l'angle trièdre. (215-219).

Dostor (*G.*). — Limite de l'erreur que l'on commet en substituant dans un calcul la moyenne arithmétique de deux nombres à leur moyenne géométrique. (220; fr.).

Dostor (*G.*). — Propriétés élémentaires des nombres. (221-224; fr.).

Entleutner (*A.-F.*). — Développement de toutes les propriétés des logarithmes et des fonctions circulaires, en partant de l'intégrale définie. (225-266).

Diekmann (*J.*). — Sur un problème d'élimination de la Géométrie métrique. (267-284).

Hoppe (*R.*). — Sur la condition que doit remplir une surface pour appartenir à un système de surfaces triplement orthogonal. (285-293).

Ce problème, résolu par Cayley, et dont l'étude a été simplifiée par M. Darboux et les résultats par Weingarten, est encore susceptible de quelques simplifications. Dans le travail de Weingarten (*Journal de Crelle*, t. 83; voir *Bulletin*, II_1, 221), la découverte d'une relation qui serait une conséquence de l'orthogonalité se trouve séparée de la démonstration de la propriété de cette relation d'être une condition suffisante. Mais on peut, par une considération qui se rattache au problème, développer la condition qui doit être regardée dès le principe comme suffisante, sous une forme nouvelle et plus simple.

Lorenz (*Norbert von*). — Sur quelques théorèmes concernant la théorie du triangle. (294-309).

Hoepflingen-Bergendorf (*H. v.*). — Sur la théorie de l'attraction

de certains solides de révolution dont la forme diffère peu d'une sphère ou d'une couche sphérique. (310-325).

Helm **(*G.*). — Démonstration élémentaire de la loi de la gravitation de Newton, déduite des trois lois de Kepler. (326-328).**

Radicke **(*A.*). — Sur la division de l'angle. (328-331).**

Hoppe **(*R.*). — Questions d'exercice sur la Géographie mathématique. (331-333).**

Gebhard **(*H.*). — Sur l'intégration des expressions irrationnelles. (334-336).**

Hain **(*E.*). — Sommation géométrique d'une série arithmétique. (336).**

Klinger. **— Contributions à la Géographie mathématique. (337-368).**

Hoppe **(*R.*). — Sur la condition pour qu'une droite variable puisse être la normale principale d'une courbe, et questions qui s'y rattachent. (369-379).**

Dobiński **(*G.*). — Séries goniométriques. (380-392).**

Dobiński **(*G.*). — Sommation de quelques séries d'arcs. (393-400).**

Hain **(*E.*). — Les axes radicaux des cercles de symétrie les plus importants du triangle. (401-402).**

Hain **(*E.*). — Sur la division des côtés d'un triangle. (403-406).**

Hain **(*E.*). — Sur l'involution. (407-412).**

Broda **(*K.*). — Contributions à la théorie de la divisibilité. (413-428).**

Herzog **(*J.*). — Problème sur les sections coniques. (429-430).**

Étant donné un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal de projection, le couper suivant une hyperbole, de telle sorte que la projection horizontale et la projection verticale soient l'une et l'autre des hyperboles équilatères.

Dostor **(*G.*). — Centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère**

quelconque et centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide polygonale. (431-433; fr.).

Dostor (G.). — Surface d'un polygone sphérique étoilé quelconque. (433-434; fr.).

Dostor (G.). — Sommation directe et élémentaire des quatrièmes, cinquièmes et sixièmes puissances des *n* premiers nombres entiers. (435-440; fr.).

Sinram (*Th.*). — Nouveau calcul du volume d'un prismatoïde. (440-443).

Sinram (*Th.*). — Note sur l'ellipse. (443-444).

Sinram (*Th.*). — Quelques problèmes sur le calcul des combinaisons. (445-447).

Polster (*Fr.*). — Transformation de la série de Leibnitz qui donne la valeur de π. (447-448).

Tome LXIV : 1879-1880.

Hoffmann (*K.-F.*). — Sur le développement en fraction continue des irrationnelles du second degré. (1-8).

Hoffmann (*K.-F.*). — Transformation des irrationnelles du $n^{ième}$ degré en fraction continue. (9-18).

Appell (*P.*). — Sur une propriété caractéristique des hélices. (19-23; fr.).

Farkas (*J.*). — Résolution des équations algébriques trinômes. (24-29).

Zrzavý (*F.*). — Discussion d'une intégrale multiple. (30-45).

Il s'agit de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty d\alpha \int_a^b f(x)\cos[\alpha\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions uniformes et finies pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.

Dostor (G.). — Moments d'inertie des surfaces et solides de révolution appartenant à la sphère. (46-56; fr.).

Dostor (*G.*). — Évaluation d'un certain déterminant. (57-59; fr.).

Hoppe (*R.*). — Recherches sur la ligne de longueur minimum. (60-73).

« Si l'on a sur une surface une série continue de lignes minima, coupées à angles droits par une série continue de parallèles géodésiques, alors, en chaque point d'intersection, la binormale des premières courbes est identique avec la tangente des secondes, et, réciproquement, tout système orthogonal de courbes sur une surface, jouissant de la propriété que les binormales de l'une des séries coïncident avec les tangentes de l'autre série, est un système orthogonal géodésique. Cette circonstance nous permet de détacher de la théorie des surfaces le problème de la ligne minimum et de le traiter exclusivement sur le terrain de la théorie des courbes. Nous ne considérerons donc pas la surface comme donnée, mais nous attribuerons à une courbe une variation telle qu'elle devienne une ligne minimum sur la surface qu'elle engendre. »

§ 1. Formules de développement. — § 2. Condition d'un système orthogonal géodésique. — § 3. Résultats des déterminations précédentes. — § 4. Conditions pour qu'à différentes surfaces appartienne une ligne minimum déterminée de la même manière. — § 5. Ligne minimum plane. — § 6. Ligne minimum hélicoïdale.

Spitzer (*S.*). — Solution de quelques problèmes de Calcul des probabilités. (74-94).

Appell (*P.*). — Sur un théorème concernant les séries trigonométriques. (95-96; fr.).

Hoppe (*R.*). — Chute libre d'un point à la surface de la Terre. (96-105).

Sucharda (*Ant.*). — Démonstration d'un théorème sur les projections. (105-108).

Il s'agit d'un théorème énoncé par Staudigl, *Sitzungsb. d. Akad. d. Wiss. zu Wien*, t. LXIV, 1871. Voir *Bulletin*, VII, 214.

Ameseder (*Ad.*). — Remarques sur la génération d'un faisceau uniforme de rayons et d'un système biforme de rayons de deuxième classe. (109-112, 1 pl.).

Veltmann (*W.*). — Les coordonnées triaxiales dans les équations du premier et du second degré. (113-142).

Ameseder (*Ad.*). — Sur les podaires des sections coniques. (143-144).

Ameseder (*Ad.*). — Sur la théorie des podaires des sections coniques. (145-163).

Ameseder (*Ad.*). — Théorie des podaires négatives. (164-169).

Ameseder (*Ad.*). — Podaires négatives des sections coniques. (170-176).

Ameseder (*Ad.*). — Astroïdes. (177-181).

Mack. — Étude d'une courbe quelconque et d'un de ses cercles de courbure au point de vue de leur situation mutuelle au point d'osculation. (182-188).

Hoppe (*R.*). — Théorèmes les plus simples de la théorie des espaces à plusieurs dimensions. (180-213).

« Dans un grand nombre de formules de la Géométrie analytique, on remarque facilement que, au lieu des trois coordonnées, on pourrait introduire, d'après une analogie évidente, un nombre quelconque n de variables de même nature; le résultat analogue doit alors satisfaire à la condition d'une interprétation géométrique partielle, obtenue en considérant, soit immédiatement, soit après une transformation de coordonnées, la projection de la figure qu'on a déterminée, sur l'espace à trois dimensions, c'est-à-dire en annulant les coordonnées $n-3$ à $n-3$.

» A une série de telles propositions, qui se présentent d'elles-mêmes, j'en ajouterai quelques autres, découvertes d'abord par le calcul, mais également simples quant au résultat. Je ne me propose pas ici de préparer la voie à une théorie générale. L'utilité d'une semblable entreprise peut aisément devenir illusoire en ce que, en face de la multitude de méthodes possibles, on la laisserait tout à fait de côté, les problèmes particuliers pouvant être résolus par une voie plus courte. L'étude des figures à n dimensions me paraît surtout présenter cet avantage (qui n'est pas le seul) de rendre sensible la loi du passage de deux à trois dimensions, loi que l'on peut rarement conclure à l'aide des deux termes connus de la progression. C'est dans cette vue que j'aborde à la fin de cet article un problème qui donne une loi assez compliquée pour le passage au delà de trois dimensions, savoir le calcul de l'angle de n dimensions.

» Quant au sens et à l'interprétation de la Géométrie à n dimensions, je la considère comme une théorie reposant sur une base purement analytique et dont les conceptions doivent être définies par la pure analyse. Dans cette manière de voir, elle ne présente plus aucune différence essentielle vis-à-vis de la Géométrie ordinaire. Notre système habituel d'étendue à trois dimensions est semblablement un produit de l'intelligence, qui se distingue du système général par cela seul qu'il est nécessaire et suffisant pour la représentation objective des données de nos sensations, en conséquence de quoi il a été créé instinctivement, et, par un usage continuel, il nous est devenu familier et intuitif; tandis que les phénomènes sensibles ne nous ont fourni aucune occasion qui nous forçât à introduire un plus grand nombre de dimensions, et que faute d'exercice nous n'avons pas appris à surmonter la difficulté que nous éprouvons à nous représenter un tel système. La nature ne nous a donné qu'une étendue à deux dimensions du sens de la vue, et encore cela ne correspond pas exactement à l'intuition sur le plan, la vision étant conformée sphériquement et nous forçant ainsi à introduire hypothétiquement le rayon vecteur invisible comme une grandeur analytique, comparable aux dimensions de

l'image. C'est par un acte d'une nature toute semblable que nous avons pu nous élever à l'idée d'un plus grand nombre de dimensions.

» Comme il n'existe ainsi aucune différence d'origine entre ces conceptions, on est pleinement en droit d'employer dans la théorie de l'espace à plus de trois dimensions les mêmes termes dont on fait usage dans le cas de trois dimensions. Seulement, lorsque ces termes n'ont pas le même sens dans le plan et dans l'espace, j'ai préféré créer des termes nouveaux. »

Hoppe (*R.*). — Remarques sur la transformation de la série de Leibnitz, dans le Tome précédent (447). (214-215).

Voir plus haut, p. 122.

Simon (*H.*). — Théorème sur les sécantes et les cordes de la parabole, avec quelques conséquences. (215-217).

Hoppe (*R.*). — Extension de la solution particulière connue du problème des trois corps. (218-223).

Hoppe (*R.*). — Équation de la courbe d'un cordon avec un nœud indénouable. (224).

Mack. — Sur certains carrés qui se rattachent à deux cercles donnés. Deux problèmes de Géométrie analytique. (225-252).

Lorenz (*N. v.*). — Sur une série de nouveaux problèmes relatifs au triangle. (253-266).

Hain (*E.*). — Sur la Géométrie de la droite. (267-273).

Hoppe (*R.*). — Application géométrique de l'addition des intégrales elliptiques. (274-295).

« L'intersection d'un cylindre de révolution et d'une sphère donne naissance à un grand nombre de figures, dont la mesure peut s'exprimer, et dans la plupart des cas assez simplement, au moyen des intégrales elliptiques.

» La portion de cylindre renfermée dans la sphère dépend des seules intégrales de seconde espèce ou des intégrales de première et de seconde espèce, suivant que le cylindre est complètement traversé ou simplement entaillé par la sphère. Dans le cas limite où le cylindre est touché intérieurement par la sphère, l'intégrale n'est plus elliptique, mais algébrique.

» La surface cylindrique partage la sphère en deux parties, dont il suffit de calculer une seule directement, la partie extérieure par exemple. Celle-ci est généralement composée d'intégrales elliptiques de première et de seconde espèce et d'un terme circulaire avec une partie algébrique; lorsque la surface cylindrique passe par le centre de la sphère, l'expression se compose très simplement d'intégrales de seconde espèce ou des deux premières espèces, dans les mêmes cas que la valeur de la surface cylindrique.

» La longueur de la courbe d'intersection est généralement hyperelliptique; seu-

lement, quand le cylindre est tangent intérieurement à la sphère, elle se réduit aux intégrales de seconde espèce.

» Le volume compris entre les deux surfaces est toujours une intégrale de troisième espèce. »

Soient

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad (x-b)^2+y^2=c^2$$

les équations de la sphère et du cylindre.

§ 1. Surface du cylindre traversé ($a>b+c$). — § 2. Surface du cylindre entaillé ($a<b+c$). — § 3. Réunion des deux cas. — § 4. Surface sphérique extérieure au cylindre. — § 5. Longueur de la courbe d'intersection. — § 6. Volumes limités par les deux surfaces. — § 7. Ellipses.

Sinram (*Th.*). — Contribution à la résolution des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré. (296-309).

Dostor (*G.*). — Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers et des cinq premières puissances des n premiers nombres impairs. Relation entre ces diverses sommes. (310-320; fr.).

Dostor (*G.*). — Méthodes expéditives pour l'extraction de la racine cubique des nombres entiers ou décimaux. (321-332; fr.).

Hoffmann (*K.-E.*). — Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. (333-336).

Grunert (*J.-A.*). — Sur la première méthode de Newton pour la construction d'une section conique passant par cinq points donnés. (337-349).

Dostor (*G.*) — Question sur les nombres. (350-352; fr.).

Dostor (*G.*). — Sommation des cubes d'un certain nombre d'impairs consécutifs. (353-355; fr.).

Dostor (*G.*). — Propriétés de la suite naturelle des nombres impairs. (356-360; fr.).

Dostor (*G.*). — Somme des carrés et somme des cubes des $n+1$ nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n+1$. (361-362; fr.).

Hoppe (*R.*). — Sur le mouvement libre d'un corps sans l'action d'un couple. (363-372).

« Je reprends ici la solution de ce problème, déjà traité analytiquement par Jacobi et synthétiquement par Poinsot, parce que cette solution, pour le fond

comme pour la forme, a été toujours considérée comme une des plus remarquables découvertes, et que je puis faire voir, au contraire, qu'elle se présente de la manière la plus directe sans qu'on ait à recourir à aucun artifice lorsqu'on suit la voie analytique, où l'on ne risque pas de s'égarer. Quelque estime que m'inspire les nouveaux points de vue révélés par Poinsot, je ne puis me ranger à son avis lorsqu'il affirme que cette solution est une preuve que souvent des problèmes difficiles peuvent se résoudre simplement par des considérations synthétiques. Il serait bien plus facile de lui faire cette concession pour sa théorie de la nutation, qui constitue réellement une œuvre considérable, bien que ses raisonnements ne diffèrent pas essentiellement des raisonnements analytiques et qu'il ne s'agisse surtout que de l'adoption d'une forme répondant mieux à la tournure d'esprit de l'auteur. Pour ce qui est du présent Mémoire, si l'on considère que Poinsot a employé près de vingt pages de calcul pour tirer de ses constructions les déterminations analytiques, on verra que cette solution synthétique n'atteint pas le même but pratique que le calcul direct et ne conduit pas par le plus court chemin à une représentation explicite des grandeurs cherchées. »

§ 1. Solution directe du problème sans discussion. — § 2. Discussion et développement.

Hoppe (*R.*). — Démonstration élémentaire de l'existence d'un centre des forces parallèles. (373-378).

§ 1. Des moments statiques. — § 2. Du centre des forces parallèles.

Hoppe (*R.*). — Sur la seconde intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (379-386).

L'auteur examine dans quels cas cette seconde intégrale peut se déduire de la première par la différentiation.

Appell (*P.*). — Sur les séries divergentes à termes positifs. (387-392; fr.).

Spitzer (*S.*). — Intégration de deux équations différentielles. (393-397).

L'auteur considère les deux équations

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)^n dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)^n dy = 0,$$
$$x y''' = \mathrm{A}(xy' - \mu y).$$

Hain (*E.*). — Sur la construction des systèmes de points symétriques. (398-406).

Dostor (*G.*). — Surfaces des triangles dont les sommets sont les pieds des bissectrices d'un triangle donné. (407-425; fr.).

Dostor (*G.*). — Distances mutuelles entre les pieds des six bissectrices d'un triangle. (426-431; fr.).

Curtze (*M.*). — Courte réplique à M. Th. Żebrawski, membre de l'Académie de Cracovie. (432-434).

Au sujet des remarques publiées dans le *Bullettino* de Boncompagni à propos du travail inséré dans le même recueil par M. Curtze, sous le titre « Sur l'orthographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitellion) ».

Cantor (*G.*). — Remarque sur les séries trigonométriques. (434-435).

Critiques sur la Note de M. Appell. (*Voir* plus haut, p. 123).

Hoppe (*R.*). — Remarque sur les séries trigonométriques. (435-438).

Réponse à la Note précédente.

Hoppe (*R.*). — Centre de gravité d'un polygone. (439).

Hoppe (*R.*). — Problèmes d'exercice sur la Planimétrie. (440).

Hoppe (*R.*). — Triangle rationnel dont les côtés sont trois nombres entiers consécutifs. (441-443).

Hoppe (*R.*). — Sur quelques questions de principe de la théorie infinitésimale. (444-447).

Meissel. — Contribution à la Trigonométrie sphérique. (447-448).

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH BÖHMISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN PRAG (1).

Année 1876.

Weyr (*Em.*). — Remarque sur une espèce particulière de coniques situées en involution. (42-46).

Weyr (*Ed.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (172-203).

Voir *Bulletin*, III$_{1}$, 154.

---

(1) Voir *Bulletin*, III$_{1}$, 118.

Studnička (*F.-J.*). — Sur la relation entre les carrés magiques et la théorie des déterminants. (269-271).

Année 1877.

Weyr (*Ed.*).— Sur le développement des irrationnelles du second degré en fractions continues. (65-72).

Voir *Bulletin*, I_2, 173.

Studnička (*F.-J.*). — Propriétés nouvelles des coefficients binomiaux, déduites de la généralisation d'une proposition de la théorie des quantités complexes. (92-93).

Studnička (*F.-J.*). — Contribution à la théorie des déterminants. (120-125).

En désignant par A_{ik} les mineurs du déterminant

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn},$$

on tire de la formule

$$\Delta . \Sigma \pm a_{22} a_{33} \ldots a_{n-1, n-1} = \Sigma \pm A_{nn} A_{11}$$

l'expression de Δ au moyen des quatre mineurs A_{11}, A_{1n}, A_{1n}, A_{nn} et des mineurs $\Sigma \pm a_{22} \ldots a_{n-1, n-1}$ de degré $n - 2$, ce qui permet de calculer Δ plus rapidement qu'on ne le fait d'ordinaire.

Comme application, l'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème connu sur les numérateurs et les dénominateurs de deux réduites d'une fraction continue; puis il calcule la valeur d'un déterminant symétrique dont la diagonale ne contient que des zéros.

Zahradník (*K.*). — Lieu géométrique des points correspondants à des triangles de contact constants par rapport à la cissoïde. (125-128).

Par un point P passent trois tangentes à une cissoïde; les trois points de contact doivent être les sommets des triangles d'une constante. Alors le lieu de P est une courbe du cinquième degré ayant un point double au point double de la cissoïde.

Weyr (*Em.*). — Les courbes de troisième ordre considérées comme courbes d'involution. (131-133).

On suppose, sur une conique C_2, une involution de tangentes du quatrième degré. La courbe d'involution I_3, c'est-à-dire le lieu des points d'intersection des tangentes d'un groupe, est une courbe générale du troisième degré. Désignons par $T_1T_2T_3T_4$ et $T'_1T'_2T'_3T'_4$ deux groupes de l'involution; par K_2 et K'_2 deux coniques, inscrites respectivement à ces groupes et $\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4$ les tangentes communes à K_2 et à K'_2; enfin, par K''_2 une conique inscrite au quadrilatère Θ. Alors les tangentes communes à C_2 et à K''_2 formeront un groupe de l'involution. On fait dégénérer K_2, K'_2 et K''_2

[illegible] opposés des [illegible] pour [illegible] une construction simple de [illegible].

Zahradník (K.). — Sur la cardioïde. (184-190).

L'auteur considère : [illegible] de contact d'[illegible] qui lie le pôle avec le centre de gravité du triangle de [illegible].

Weyr (Ed.). — Sur la représentation conforme de [illegible] moyen de la projection centrale. (273-276).

Si, en projetant une surface sur une autre, on conserve les angles, [illegible] sont semblables, ou l'une est la transformation de l'autre [illegible] réciproques, le centre de projection étant aussi le centre [illegible]

Zrzavý (F.). — Formule simple pour le calcul de la [illegible] méridienne d'après les coordonnées sphériques rect[illegible] moyen d'une Table auxiliaire. (278-280).

On entend par convergence méridienne la différence entre l'angle [illegible] l'azimut α' d'un rayon partant d'un point donné.

Studnička (F.-J.). — Sur la représentation indépen[illegible] $n^{ième}$ dérivée d'une puissance dont la base et l'expos[illegible] fonctions différentes d'une même variable. (368-373).

La dérivée s'obtient sous la forme du produit de u^v par un détermin[illegible] (*Derivationsdeterminante*).

Studnička (F.-J.). — Nouvelles contributions au Calcul [illegible]tiel. (393-399).

Dérivée $n^{ième}$ de $\frac{u}{v}$; application aux dérivées de tang x, cot x, séc x, [illegible] recherche des maxima et des minima des fonctions $\frac{u}{v}$.

Année 1878.

Studnička (F.-J.). — Sur l'équation du plan osculateur. (3[illegible]

Schmidt (G.). — Démonstration simple des équations du mou[illegible]ment d'Euler. (79-81).

Günther (S.). — Sur l'équation indéterminée $x^2 + y^2 = a^2$. ([illegible] 119).

Weyr (Ed.). — Remarques sur deux théorèmes de Dynami[illegible] (133-146).

L'auteur détermine tous les systèmes mécaniques qui, sollicités par des

quelconques, suivent ou le principe du mouvement du centre des masses ou le principe des aires, relativement soit à un axe, soit à deux axes, etc. Il démontre un théorème général comprenant ces deux principes comme cas particuliers par la considération du déplacement général d'un corps rigide.

Šolín (*J.*). — Sur quelques propriétés des nombres de Clapeyron. (146-157).

Il s'agit des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, liés par les relations

$$4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0, \quad \ldots.$$

L'auteur obtient des propriétés nouvelles de ces nombres pour faciliter le calcul des moments des appuis (*Stützenmomente*) et des réactions d'un support continu composé de champs égaux.

Matzka (*W.*). — Contribution à une exposition systématique en Algèbre des logarithmes naturels dans le sens de Neper et d'Euler. (206-235).

Kořistka (*K.*). — L'altitude au-dessus du niveau de la mer de Carlsbad et de ses environs. (235-246).

Gruss (*G.*). — Sur les fonctions elliptiques. (246-249).

Zahradník (*K.*). — Sur le lieu des centres de courbure du point de base d'un faisceau de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre. (250-253).

Ce lieu est une courbe cubique ayant un point double au point de base du faisceau.

Matzka (*W.*). — Sur les limites de fonctions fondamentales en analyse. (262-272).

Bečka (*G.*). — Sur quelques problèmes de la théorie de l'involution quadratique. (272-289).

Günther (*S.*). — Contribution à la théorie des nombres congrus. (289-294).

Un entier a, d'après Woepcke, est appelé *congru* s'il existe une solution rationnelle des équations

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 - a = z^2.$$

Un entier a étant donné, il s'agit de reconnaître s'il est congru ou non.

Kantor (*S.*). — Note relative à la théorie de l'involution cubique sur une conique. (312-316).

Théorèmes intéressants relatifs au cas où l'involution donnée se trouve sur un cercle.

Ed. W.



COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXIX; 1880.

N° 14; 5 avril.

Hermite. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (761).

Villarceau (*Y.*). — Application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. (767).

Resal. — Sur quelques théorèmes de Cinématique. (769).

Sainte-Claire Deville (*H.*) et *Troost.* — De la détermination des hautes températures. (775).

Faye. — Sur le cyclone du 24 janvier dernier à la Nouvelle-Calédonie. (785).

Boussinesq. — Sur la manière de présenter la théorie du potentiel dans l'hypothèse généralement admise de la discontinuité de la matière. (792).

Alluard. — Hiver de 1879-1880 à Clermont et au Puy-de-Dôme. (795).

Faye. — Remarques au sujet de la Communication de M. *Alluard.* (798).

Alluard. — Observatoire météorologique du Puy-de-Dôme. Verglas du 21 novembre 1879. (799).

Rozé (*C.*). — Étude sur la chronométrie : de la compensation. (807).

Laguerre. — Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre. (809).

Soit $F(x) = 0$ une telle équation, dont le premier membre satisfait à l'équation

$$Py'' + Qy' + Ry = 0.$$

M. Laguerre établit que l'expression

$$\Omega = PR + PQ' - QP' - \frac{n+2}{4(n-1)} Q^2$$

est positive ou nulle pour toute racine de l'équation $F(x) = 0$.

Si donc Ω n'est pas positif pour toutes les valeurs de x, on a un moyen d'obtenir des limites entre lesquelles sont comprises les racines; par exemple, pour le polynôme de degré n qui satisfait à l'équation

$$y'' - xy' + ny = 0,$$

M. Laguerre indique la limite supérieure $\frac{2(n-1)}{\sqrt{n+2}}$.

Deprez (*M.*). — Sur le mesureur d'énergie. (812).

Morisot. — Sur la chaleur spécifique et la conductibilité des corps. (814).

N° 15; 12 avril.

Stephan (*E.*). — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (837).

Jamin. — Sur l'explication de l'expérience de MM. Lontin et de Fonvielle. (839).

Lucas. — Sur les fonctions cyclotomiques. (855).

Les fonctions cyclotomiques ne diffèrent que par un changement de variables des *fonctions numériques simplement périodiques* introduites par M. Lucas.

Les lois signalées par M. Sylvester ont été démontrées dans son Mémoire (*American Journal of Mathematics*, t. I, p. 210, 290-300). M. Lucas signale en outre les théorèmes suivants :

Pour que $p = 2^{4k+3}$ soit premier, il faut et il suffit que la fonction cyclotomique d'indice $p+1$ soit divisible par p pour $x = \sqrt{-1}$.

Pour que $p = 2^{12k+5} - 1$ soit premier, il faut et il suffit que la fonction cyclotomique d'indice $p+1$ soit divisible par p, en supposant $x = 3\sqrt{-1}$, ...

Bresse. — Réponse à une Note de M. Boussinesq. (857).

Rozé (*C.*). — Études sur la chronométrie : de la compensation. (858).

Deprez (*M.*). — Sur un nouvel indicateur dynamométrique. (861).

Amagat (*H.*). — Sur la déformation des tubes de verre sous de fortes pressions. (863).

Ader. — Sur quelques expériences nouvelles d'attractions magnétiques. (864).

N° 16; 19 avril.

Resal. — Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. (889).

Royer (*E.*). — Théorie des phénomènes capillaires. (908).

Fonvielle (*W. de*). — Sur le gyroscope électromagnétique. (910).

Schaberle. — Découverte d'une comète. (911).

Henry et *Bigourdan*. — Observations de la comète Schaberle. (911).

Chase (*P.*). — Sur les positions des principales planètes. (912).

Radau (*H.*). — Remarques sur la formule de quadrature de Gauss. (913).

Deprez (*M.*). — Synchronisme électrique de deux mouvements quelconques. (915).

Bouty (*E.*). — Mesure des forces électromotrices, thermo-électriques au contact d'un métal et d'un liquide. (917).

Coutzolenc. — Sur une pompe automate à mercure. (920).

N° 17; 26 avril.

Resal. — Sur le problème inverse du mouvement d'un point matériel. (938).

Cornu (*A.*). — Sur la loi de répartition suivant l'altitude de la substance absorbant dans l'atmosphère les radiations solaires ultra-violettes. (946).

Stephan. — Observation de la comète Schaberle, faite à l'Observatoire de Marseille. (958).

Smith (*L.*). — Sur la météorite tombée le 10 mai 1879, près d'Estherville (États-Unis). (958).

***Moncel** (Th. du).* — **Sur les courants thermo-électriques développés au contact d'un métal et d'un liquide. (964).**

Boussinesq. — Quelques considérations à l'appui d'une Note du 29 mars sur l'impossibilité d'admettre en général une fonction des vitesses dans toute question d'Hydraulique où les frottements ont un rôle notable. (967).

***Fonvielle** (W. de).* — Sur la dépendance de deux gyroscopes électromagnétiques soumis à un même circuit d'induction. (969).

Mannheim. — La surface de l'onde considérée comme surface limite. (971).

Partant de l'étude faite par notre regretté collaborateur Painvin sur le complexe formé par les droites qui sont les arêtes d'un dièdre droit circonscrit à un ellipsoïde (*Bulletin*, t. II, p. 368, 1re Partie), M. Mannheim établit que : Si un angle droit acb circonscrit à un ellipsoïde est tel que son plan soit normal à cette surface aux points de contact a, b de ses côtés, son sommet appartient à une surface de l'onde.

Quel que soit le déplacement du plan mobile acb, son foyer est au point de rencontre f des normales A, B en a, b; la droite cf est la normale à la surface de l'onde, en c.

Baillaud. — Sur le calcul numérique des intégrales définies. (974).

Si dans les évaluations de l'intégrale

$$\int_0^1 y\,dt$$

on remplace y par un polynôme entier de degré n ayant les mêmes valeurs que y pour $n+1$ valeurs de t, on arrive au résultat indiqué par Gauss, en remarquant que les valeurs de t sont les racines d'un polynôme

$$T = t^{n+1} + \alpha_1 t^n + \ldots + \alpha_{n+1},$$

dont les coefficients satisfont à l'équation

$$\mu = \frac{\alpha_{n+1}}{h} + \frac{\alpha_n}{h+1} + \cdots + \frac{1}{h+n-1} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n+1).$$

La résolution de ces opérations s'effectue de suite en remarquant que μ ne peut différer que par un facteur constant de

$$\nu = \frac{(h-1)(h-2)\ldots(h-n-1)}{h(h+1)\ldots(h+n+1)},$$

et en effectuant la décomposition en fractions simples de cette fraction rationnelle en h.

Picard (*E.*). — Sur les équations linéaires simultanées et sur une classe de courbes gauches. (976).

Voir plus bas.

Appell. — Sur la série $F_2(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$. (977).

Si on pose

$$f(u,v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1} (1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha' > 0, \quad \gamma - \alpha - \alpha' > 0,$$

on a

$$\int\int f(u,v)(1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}\,du\,dv = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{[illegible]} F_2(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y),$$

l'intégrale double étant étendue aux valeurs réelles de u et de v telles que l'on ait

$$u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 1 - u - v \geqq 0.$$

Mercadier. — Sur l'influence de la température sur la durée de la période d'un diapason. (980).

Mascart. — Sur la théorie des courants d'induction. (981).

Guebhard (*A.*). — Sur une méthode expérimentale propre à déterminer les lignes de niveau dans l'écoulement stationnaire de l'électricité à travers les surfaces conductrices. (984).

Bouty (*E.*). — Mesure absolue du phénomène de Peltier au contact d'un métal et de sa dissolution. (987).

Pellat (*H.*). — Mesure de la différence de potentiel de deux métaux en contact. (990).

Gouy. — Sur la théorie de la double réfraction circulaire. (992).

Amagat (*H.*). — Influence de la température sur la compressibilité des gaz sous de fortes pressions. (993).

N° 18; 5 mai.

Tisserand. — Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. (1021).

Ces transcendantes sont définies par l'égalité

$$B_n^{i} = \frac{1}{1.2\ldots n} x^n \frac{d^n b^{i}}{dx^n},$$

où

$$b^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta}}\, d\theta, \quad 0<\alpha<1.$$

M. Tisserand établit que la fonction $B_n^{(k)}$ de α, où k reste fixe et où n augmente indéfiniment, croît indéfiniment quand α est supérieur à $\frac{1}{2}$ et tend vers zéro quand α est inférieur à $\frac{1}{2}$.

Sylvester. — Sur la loi de réciprocité dans la théorie des nombres. (1053).

Sur le calcul du symbole $\frac{Q}{P}$ de Jacobi.

Chase (*E.*). — Paraboloïdes cométaires. (1061).

Picard (*E.*). — Sur les équations linéaires simultanées et sur une classe de courbes gauches. (1065).

Les équations

$$\frac{du}{dt} = -Av + Bw,$$

$$\frac{dv}{dt} = Au - Cw,$$

$$\frac{dw}{dt} = -Bu + Cv,$$

où A, B, C sont des fonctions doublement périodiques de t aux périodes $2K$ et $2iK'$, lorsque les intégrales sont uniformes, ont toujours un système d'intégrales formé de fonctions doublement périodiques. M. Picard examine en particulier le système suivant

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{R}, \quad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r},$$

où R, r désignent les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche, exprimés au moyen de l'arc s, et où il suppose que ces rayons sont des fonctions doublement périodiques de la variable.

Plus particulièrement il étudie le cas où

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a}\,\mathrm{dn}\left(\frac{s}{a}\right), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

a, b étant des constantes et n un nombre entier.

En supposant $n = 1$, on obtient une courbe déjà rencontrée par M. Hermite, comme cas particulier de l'élastique.

Callandreau (*O.*). — Sur la formule de quadrature de Gauss. (1067).

L'auteur montre comment, pour la formule de Gauss et pour d'autres analogues,

on peut reconnaître le sens de l'erreur et même parfois obtenir une expression approchée du terme complémentaire.

Desboves. — Théorème sur les équations cubiques et biquadratiques. (1069).

Pictet (*R*.). — Équation générale donnant la relation qui existe pour tous les liquides entre leur température et la tension maxima de leurs vapeurs à cette température. (1070).

Boutigny. — Résumé des lois qui régissent la matière à l'état sphéroïdal. (1074).

N° 19; 10 mai.

Tisserand. — Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. (1093).

Hermite. — Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques. (1096).

Il s'agit de cette proposition : Si le module k est une quantité imaginaire quelconque, en sorte que

$$k^2 = \alpha + i\beta,$$

et si l'on fait

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(\alpha+i\beta)\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\alpha-i\beta)\sin^2\varphi}},$$

la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$ est essentiellement positive : cette démonstration repose sur la considération de l'intégrale double

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{[1-(1-\alpha-i\beta)\sin^2\varphi][1-(\alpha-i\beta)\sin^2\psi]}}.$$

Sylvester. — Sur la loi de réciprocité dans la théorie des nombres. (1104).

Levy (*M*.). — Sur le nouveau siphon établi sur le canal Saint-Martin et sur les travaux d'assainissement du quartier de Bercy. (1107).

Pellet (*E*.). — Sur les fonctions linéaires. (1111).

Si les racines d'une équation de degré $n\mu$ se partagent en n groupes de μ racines, les racines d'un groupe pouvant être représentées par x, $\theta(x), \ldots, \theta^{\mu-1}(x)$, où $\theta(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}$, la substitution $x = \frac{\lambda' y - \lambda}{1-y}$ ramène l'équation à la forme

$$F(y^\mu) = 0,$$

F désignant une fonction entière; λ et λ' sont les racines supposées distinctes de l'équation

$$a'\lambda^2 + (a - b')\lambda - b = 0.$$

Zeuthen. — Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques. (1114).

Picard (*E.*). — Sur les équations linéaires simultanées et sur une classe de courbes gauches. (1118).

Picard (*E.*). — Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. (1119).

Gouy. — Sur la théorie des phénomènes d'interférence où intervient la polarisation rotatoire. (1121).

Guebhard. — Sur les lignes équipotentielles d'un plan formé de deux moitiés inégalement conductrices. (1124).

Odalski.— Sur les actions mutuelles d'aiguilles aimantées plongées dans des liquides. (1126).

N° 20; 17 mai.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. *Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année 1880. (1130).

Rayet. — Positions de la comète *b* de 1880, déterminées à l'Observatoire de Bordeaux. (1153).

Callandreau (*O.*). — Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. (1154).

Kantor (*S.*). — Sur le nombre des groupes cycliques dans une transformation de l'espace. (1156).

Mondésir (*P. de*). — Les tensions des vapeurs saturées ont des

modes de variation différents selon qu'elles sont émises au-dessus ou au-dessous du point de fusion. (1158).

André (*C.*). — Sur l'interversion des températures de l'air avec la hauteur. (1161).

N° 21; 24 mai.

Faye. — Sur les variations séculaires de la figure mathématique de la Terre. (1185).

Callandreau (*O.*). — Sur des transcendantes qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des perturbations planétaires. (1201).

Bruno (*Faà de*). — Sur un théorème général dans la théorie des covariants. (1203).

Posons

$$\delta = a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \cdots$$

et soit

$$f(x, y) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$$

la forme donnée.

Tout covariant est une fonction entière symbolique du δ appliquée au dernier terme a_n.

Dedekind. — Sur la théorie des nombres complexes idéaux. (1205).

Appell. — Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions Θ. (1207).

Soit

$$f(x) = (a_1 x + b_1) \ldots (a_5 x + b_5)$$

et

$$\int_{t_0}^{x} \frac{\alpha t + \beta}{\sqrt{f(t)}}\, dt, \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha' t + \beta'}{\sqrt{f(t)}}\, dt.$$

Les deux intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à l'équation

$$y^2 - f(x) = 0,$$

l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2$$
$$= \sqrt{(\alpha\, dy - \alpha'\, dx)(\lambda_1 dy - \mu_1 dx) \ldots (\lambda_5 dy - \mu_5 dx)},$$

où

$$\lambda_n = \alpha b_n - \beta a_n, \quad \mu_n = \alpha' b_n - \beta' a_n \quad (n = 1, \ldots, 5),$$

a pour intégrale générale

$$\Theta(x + A, y + B) = 0.$$

Le Paige (*C.*). — Sur l'élimination. (1210).

Mouchot. — Utilisation industrielle de la chaleur solaire. (1212).

N° 22; 31 mai.

Jamin. — Sur une lampe électrique automatique. (1235).

Faye. — Sur les idées cosmogoniques de Kant, à propos d'une réclamation de priorité de M. Schlötel. (1246).

Radau (*R.*). — Sur les réfractions de Bessel. (1264).

Picard (*E.*). — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. (1267).

M. Picard montre comment on peut construire *a priori* des fonctions de deux variables analogues aux fonctions hypergéométriques d'une seule variable, telles que Riemann les a considérées, il considère pour cela une fonction $F(x, y)$ holomorphe pour toutes valeurs de x et de y distinctes entre elles, dont aucune ne coïncide avec aucun des points 0, 1, ∞, telle que, en quatre déterminations de cette fonction, existe une relation linéaire à coefficients constants, telle enfin que, lorsque l'une des variables s'approche d'un des points critiques, ou lorsque les deux variables deviennent égales, trois des branches de la fonction se présentent sous certaines formes définies; il montre alors que cette fonction satisfait à deux équations différentielles et en donne diverses propriétés. Il retombe ainsi, par une voie tout autre, sur des fonctions déjà étudiées par M. Appell (séance du 16 février).

Farkas. — Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques. (1269).

Brassine (*E.*). — Détermination de trois axes d'un corps solide sur lesquels les forces centrifuges exercent, par suite de la rotation, un effet maximum. (1271).

Mathieu (*E.*). — Sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle. (1272).

Ader. — Téléphone à surexcitation magnétique. (1274).

Macé (*J.*) et *Nicati* (*W.*). — Étude de la distribution de la lumière dans le spectre. (1275).

N° 22; 7 juin.

Carrère. — Théorèmes sur la décomposition des polynômes. (1329).

Mannheim. — Nouvelle génération de la surface de l'onde et constructions diverses. (1333).

La proposition suivante, qui est le point de départ de l'auteur dans cette Communication, est la généralisation d'un résultat précédemment obtenu par lui :

Si un angle droit *acb* dont les côtés sont respectivement tangents à deux ellipsoïdes homofocaux donnés est tel que son plan soit normal à ces deux surfaces en chacun des points de contact *a*, *b* de ses côtés, son sommet appartient à une surface de l'onde.

La normale à cette surface en *c* est la droite qui joint le sommet *c* au milieu de la droite *ab*. Le plan de l'angle droit *acb* est tangent au sommet *c* à un hyperboloïde homofocal aux ellipsoïdes donnés, etc.

Poincaré. — Sur les formes cubiques ternaires. (1336).

L'auteur se propose d'appliquer à l'étude arithmétique des formes ternaires la méthode employée par M. Hermite pour les formes décomposables en facteurs linéaires et les formes quadratiques.

Il classe les transformations linéaires

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

suivant la nature des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - s & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - s & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - s \end{vmatrix};$$

puis il classe les formes cubiques en sept groupes, suivant la nature de la courbe qu'on obtient en les égalant à zéro, et donne une suite de théorèmes algébriques sur les groupes auxquels doivent appartenir les substitutions qui permettent de reproduire une forme d'un certain groupe; passant ensuite aux propriétés arithmétiques, il définit et étudie les substitutions réduites et les formes réduites.

Pellet (E.). — Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. (1339).

L'auteur montre comment la théorie des fonctions cyclotomiques conduit à une méthode pour former directement des fonctions irréductibles de degré λ, lorsque le nombre λ ne renferme que les facteurs premiers du module augmenté de l'unité.

Escary. — Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. (1341).

David. — Sur la partition des nombres (1344).

Cabanellas. — Mesure directe de la résistance intérieure des machines magnéto-électriques en mouvement. (1346).

N° 24; 14 juin.

Léauté. — Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. (1404).

L'auteur résout d'abord la question suivante :

Trouver le polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses n dérivées, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, soient égales à $n+1$ quantités données $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$.

Ce polynôme peut se mettre sous la forme

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n,$$

où les P sont des polynômes en x et h de degré égal à leur indice, indépendants des Y, et dont M. Léauté donne diverses propriétés ; finalement, il donne pour représenter une fonction y dans l'intervalle de h à $+h$ le développement suivant, où le symbole $\mathfrak{M}$ signifie la moyenne prise entre ces limites.

$$y = \mathfrak{M}(y) + \frac{3x}{3.1!}\mathfrak{M}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{3x^2-h^2}{3.2!}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{3x^3-3h^2x}{3.3!}\mathfrak{M}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \frac{3x^4-6h^2x^2+\frac{7}{5}h^4}{3.4!}\mathfrak{M}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) + \cdots$$

Lefébure. — Sur la résolution de l'équation $x^n + y^n = z^n$. (1406).

Becquerel (H.). — Recherches expérimentales sur la polarisation rotatoire magnétique dans les gaz. (1407).

Périssé. — Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres, pour résister aux efforts gauchissants. (1413).

Darboux. — Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires. (1466).

Les transcendantes b_s^λ étudiées par M. Tisserand et M. Callandreau se ramènent aux fonctions $P(\lambda, s)$ étudiées par Legendre; on a

$$b_s^{(\lambda)} = 2P(\lambda, s), \quad \text{et} \quad P(\lambda, s) = \frac{\Gamma(\lambda+s)\,a^\lambda}{\Gamma(s)\Gamma(\lambda+1)} F(s+\lambda, s, \lambda+1, a^2),$$

où F désigne une série hypergéométrique; partant d'une formule donnée par M. Kummer dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, formule qui met en

évidence, dans une telle série, la partie qui devient discontinue dans le voisinage d'un point singulier, et appliquant les méthodes exposées dans son Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, M. Darboux donne une valeur approchée des dérivées d'ordre très élevé de ces fonctions; une application numérique montre que l'approximation, très remarquable pour de faibles valeurs de l'indice supérieur, diminue quand ces valeurs augmentent notablement; l'auteur indique, dans une Communication postérieure, une seconde manière d'obtenir cette formule d'approximation en partant de l'équation

$$\frac{\Gamma^2(s)\Gamma(2-2s)}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{da^n}P(\lambda,s)=\int_0^1 t^{2s+\lambda+n-1}(1-t^2)^{1-2s}\left[\frac{1}{(1-at)^{n+1}}+\frac{(-1)^{\lambda+n}}{(1+at)^{n+1}}\right]dt.$$

Hennessy. — Sur la figure de la planète Mars. (1419).

Jordan (*C.*). — Sur l'équivalence des formes. (1422).

L'auteur donne une suite de théorèmes concernant l'équivalence des formes de l'espèce suivante

$$F=\text{norme}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)+\ldots+\text{norme}(a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n).$$

Mondésir (*P. de*). — Les tensions des vapeurs saturées ont des modes de variation différents selon qu'elles sont émises au-dessus ou au-dessous du point de fusion. (1413).

N° 25; 21 juin.

Faye. — Sur la réduction des observations du pendule au niveau de la mer. (1443).

Janssen. — Sur les effets de renversement des images photographiques par les prolongations de l'action lumineuse. (1447).

Faye. — Rapport sur un Mémoire de M. Peirce concernant la constance de la pesanteur à Paris et les corrections exigées par les anciennes déterminations de Borda et de Biot. (1463).

Elliot. — Sur le problème de l'inversion. (1466).

L'auteur a indiqué précédemment (séance du 23 février) deux propriétés des fonctions $\Theta^{(q)}$ où entrent p intégrales abéliennes normales de première espèce et q intégrales normales de troisième espèce. En remplaçant ces intégrales par des quantités arbitraires, $\Theta^{(q)}$ devient une fonction de $p+q$ variables indépendantes. Il montre actuellement comment, à l'aide de ces fonctions $\Theta^{(q)}$ et en suivant la marche de Riemann, on peut intégrer un système d'équations différentielles abéliennes étendues à des intégrales de troisième espèce.

Sébert. — Sur un appareil destiné à enregistrer la loi du mouve-

ment d'un projectile, soit dans l'âme d'une bouche à feu, soit dans un milieu résistant. (1468).

Darboux (*G.*). — Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires. (1472).

Trépied. — Sur la méthode de Cauchy pour le développement de la fonction perturbatrice. (1474).

Appell. — Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante. (1477).

Soient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales.

Toute fonction algébrique entière de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et des dérivées de ces fonctions qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées multipliée par une puissance de $e^{\int a_1 dx}$.

Picard (*E.*). — Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre. (1479).

M. Klein a donné (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1877) une méthode pour reconnaître si une équation différentielle linéaire donnée du second ordre, à coefficients rationnels, peut, ou non, être intégrée complètement au moyen des fonctions algébriques. M. Picard montre que cette méthode conduit à déterminer les équations de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions doublement périodiques et pour lesquelles toute intégrale y satisfait à une équation de la forme

$$y^m + A_1 y^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

où les A sont des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan.

Farkas. — Sur les fonctions elliptiques. (1482).

Terquem (*A.*). — Sur quelques modifications apportées à la construction de la lampe Bunsen et des lampes monochromatiques. (1484).

Neyreneuf. — Sur l'écoulement des gaz. (1487).

N° 26; 28 juin.

***Desains* (*P.*) et *Curie* (*P.*). — Recherches sur la détermination des longueurs d'onde des rayons calorifiques à basse température. (1506).**

***Villarceau* (*Y.*). — Sur les régulateurs à ailettes construits par M. Bréguet. (1515).**

***Gostinsky*. — Sur une nouvelle forme de galvanomètre. (1534).**

***Sebert*. — Sur un appareil destiné à enregistrer la loi du mouvement d'un projectile, soit dans l'âme d'une bouche à feu, soit dans un milieu résistant. (1535).**

***Callandreau*. — Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires. (1540).**

***Farkas* (*J.*).— Sur l'application de la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. (1542).**

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (1). — 2e série.

Tome XIX; 1880, 1er semestre.

UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. — Composition mathématique pour l'admission, en 1879, à l'École Polytechnique. Remarques géométriques. (5-12).

Cet « ancien élève » nous fait l'effet d'être passé aujourd'hui au nombre des maîtres, surtout en matière de Géométrie pure. Les lecteurs des *Nouvelles Annales* l'ont déjà rencontré plusieurs fois et doivent commencer à le connaître. La question à propos de laquelle l'auteur présente ici d'intéressantes remarques est celle-ci : « On a une conique à centre et un point M sur la courbe; par ce point et les extrémités d'un diamètre quelconque, on fait passer un cercle. Prouver que le centre de ce cercle a pour lieu une autre conique passant par le centre de la première. »

---

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 55.

Laurent (*H.*). — Sur la réduction des polynômes du second degré homogènes à des sommes de carrés. (12-27).

Cet article constitue une fort intéressante étude sur l'équation en s. Il se subdivise de la manière suivante : Réduction d'un polynôme du second degré à une somme de carrés par une substitution orthogonale. — Discussion de l'équation en s. — Démonstration d'un lemme pour l'examen du cas où l'équation en s a des racines multiples. — Cas où l'équation en s a des racines égales. — Utilité de la théorie précédente. — Quelques mots sur la réduction simultanée de deux polynômes à une somme de carrés.

L'étude de M. Laurent s'applique à des polynômes à n variables. Les *substitutions orthogonales*, qu'il emploie constamment, sont une généralisation des formules de transformation qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre.

Fouret (*G.*). — Sur la construction de la tangente à la courbe $\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$, $f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ désignant des fonctions rationnelles des lignes trigonométriques de l'angle ω, de ses multiples ou de ses parties aliquotes. (28-42).

L'auteur, dans l'hypothèse indiquée, donne une formule générale de tang V, V étant l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, et en déduit une intéressante construction de la tangente. Il applique ensuite cette méthode à la spirale hyperbolique, à la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, à la courbe $\rho = \frac{\sin\omega}{2\omega - 3\cos\omega}$ (composition d'admissibilité à l'École Polytechnique, 1879).

Rouché (*E.*). — Sur la machine pneumatique. (42-44).

L'auteur indique de très heureuses modifications dans le calcul habituel de la loi de décroissement de la force élastique de l'air contenu dans le récipient, en tenant compte de l'espace nuisible.

D'Ocagne (*M.*). — Remarque sur un problème d'Analyse combinatoire. (44-46).

Il s'agit de la recherche du nombre N_m des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe de m côtés intérieurs à ce polygone. On trouve $N_m = C_m^4$.

Bibliographie. — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique; par *A. Mannheim*. Préface. (46-48).

Laguerre. — Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines. (49-57, 97-105).

M. Laguerre s'est proposé de perfectionner la méthode de Newton, qui consiste à déterminer une quantité rendant positives les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^m(x)$.

Il considère, au lieu de ces fonctions, les polynômes $f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_m$, $f_1(x) = A_0 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}, \ldots, f_m(x) = A_0$. Puis il montre comment cette suite peut permettre de déterminer une limite supérieure du nombre des racines supérieures au nombre positif a, et aussi du nombre des racines comprises entre les deux nombres positifs a et b. Il y a lieu de constater à ce sujet l'article antérieur du même auteur *Sur la règle des signes de Descartes* (*Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 5). L'article se termine par des considérations sur le théorème de Budan et par l'exposé de plusieurs propriétés fort curieuses se rattachant à cette théorie.

Weill. — Théorème sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences. (57-59).

Ce théorème, que l'auteur démontre et dont il déduit quelques conséquences particulières, consiste en ce que, lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux circonférences, sa surface reste proportionnelle à celle du polygone ayant pour sommets les points de contact des côtés du premier avec la circonférence intérieure.

Weill. — Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe. (60-62).

Cet article comprend en outre la recherche du centre de gravité et du point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les pieds des trois normales.

Fouret (*G.*). — Sur les questions 699, 799, 800, 932 et 1316, concernant les cycloïdes et épicycloïdes. (63-68).

Ces diverses questions ont pour objet des propriétés très intimement liées entre elles et dont le présent article fait ressortir la connexité. *Voir* sur le même sujet *Bulletin de la Société Philomathique*, 6e série, t. V, p. 91.

Longchamps (*G. de*). — Sur le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique. (68-71).

La construction indiquée repose sur une propriété du cercle osculateur. L'article contient en outre une expression du rayon de courbure qui permet de le construire par une quatrième proportionnelle.

Longchamps (*G. de*). — Théorème d'Algèbre. (71-73).

Ce théorème a pour objet de fournir une limite supérieure des racines positives d'une équation. C'est une application, et parfois un perfectionnement, d'une règle donnée par M. Laguerre.

Kœnigs (*G.*). — Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales. (74-76).

Démonstration de plusieurs theorèmes dignes d'intérêt, reposant surtout sur les propriétés des coniques ou surfaces polaires réciproques.

Biehler (*Ch.*). — Sur une application de la méthode de Sturm. (76-81).

Il s'agit de l'équation qui donne tang $\frac{\alpha}{m}$ quand on connaît tang α. En lui appliquant la méthode de Sturm, on met en relief toutes les circonstances qui caractérisent les racines de cette équation.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation de 1878 : « Lieu géométrique relatif à la sphère. » (82-86).

Courbe (*H.*). — Solution d'une question de Licence (1879) : « Courbes tracées sur un paraboloïde. » (86-89).

Lucas (*Éd.*). — Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs. (89-91).

M. Lucas montre qu'Euler a dû être conduit à ce théorème par ses recherches sur l'équation indéterminée $x^3+y^3 = Az^3$. Il établit en outre le théorème suivant : Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs. »

Macé de Lépinay (*A.*). — Sur un lieu géométrique. (91-94).

Par deux points fixes sur une conique, on fait passer une circonférence : lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux courbes.

Correspondance. — M. Haton de la Goupillière : « Sur les propriétés de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. » (94-96).

Amigues (*E.*). — Note sur la série de Taylor. (105-109).

L'auteur se propose de simplifier une démonstration de M. Jules Kœnig (*Nouv. Ann.*, 1874) qui repose sur les propriétés élémentaires des séries. Il retrouve ensuite une forme très générale du reste, déjà obtenue par M. Bourget (*Nouv. Ann.*, 1870) au moyen d'un autre calcul.

Biehler (*Ch.*). — Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy. (110-115).

Il s'agit des déterminants que l'on doit égaler à zéro pour exprimer que deux équations ont une racine commune. Le déterminant considéré par Cauchy et celui de M. Sylvester sont identiques entre eux, à un facteur numérique près.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la composition des forces dans le plan. (115-120).

Article contenant des considérations intéressantes, mais bien moins nouvelles certainement que ne le croit l'auteur, sur le *centre* d'un système de forces dans un plan. C'est une de ces questions auxquelles la méthode des équipollences s'applique le plus heureusement; elle a été traitée par M. Bellavitis et par bien d'autres géomètres.

E. G. — Démonstration géométrique d'une propriété des foyers extérieurs au plan d'une conique. (120-122).

Il s'agit de la propriété en vertu de laquelle, du foyer d'une conique, on voit sous un angle constant la portion d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes.

Le Cointe (le *P.*). — Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle. (122-133).

Le lieu en question est celui qui a été étudié dans le même Volume (p. 91) par M. Macé de Lépinay, et dont nous avons parlé plus haut. Ce problème a fait l'objet de nombreux articles précédemment publiés dans les *Nouvelles Annales*. Le P. Le Cointe se propose d'en compléter la solution en ne particularisant pas l'énoncé. Il trouve pour le lieu cherché une conique et deux points isolés, et il étudie les propriétés de cette conique.

Lemoine (*E.*). — Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales deux à deux, et solution de la question 1272. (133-138).

M. Lemoine reprend, en les complétant et les coordonnant, des propriétés fort curieuses déjà données par lui au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences (Nantes, 1875) et qui concernent les tétraèdres en question. La solution de la question 1272 en est une conséquence.

Bibliographie. — Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les Éléments de Géométrie cinématique, par M. Mannheim; Paris, 1880. Compte rendu par M. P. Haag. (138-143).

Questions proposées. — 1341 à 1343. (144).

Lucas (*Éd.*). — Sur un théorème de M. Laguerre. (145-147).

C'est une simplification fort élégante du principal résultat obtenu par M. Laguerre dans l'article (même Volume, p. 49-57, 97-105), dont nous avons rendu compte ci-dessus, sur les limites des racines d'une équation.

Lévy (*Lucien*). — Sur le même théorème. (148).

M. Lévy remarque que la limite supérieure indiquée par M. Laguerre est toujours au moins égale à celle que donne la méthode de Newton.

Biehler (*Ch.*). — Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. (149-152).

Les considérations que présente l'auteur se rapportent à l'équation

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A + Bi,$$

Il s'agit de l'équation qui donne tang $\frac{\alpha}{m}$ quand on connaît tang α. En lui appliquant la méthode de Sturm, on met en relief toutes les circonstances qui caractérisent les racines de cette équation.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation de 1878 : « Lieu géométrique relatif à la sphère. » (82-86).

Courbe (*H.*). — Solution d'une question de Licence (1879) : « Courbes tracées sur un paraboloïde. » (86-89).

Lucas (*Ed.*). — Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs. (89-91).

M. Lucas montre qu'Euler a dû être conduit à ce théorème par ses recherches sur l'équation indéterminée $x^3+y^3=Az^3$. Il établit en outre le théorème suivant : Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs. »

Macé de Lépinay (*A.*). — Sur un lieu géométrique. (91-94).

Par deux points fixes sur une conique, on fait passer une circonférence : lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux courbes.

Correspondance. — M. Haton de la Goupillière : « Sur les propriétés de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. » (94-96).

Amigues (*E.*). — Note sur la série de Taylor. (105-109).

L'auteur se propose de simplifier une démonstration de M. Jules Kœnig (*Nouv. Ann.*, 1874) qui repose sur les propriétés élémentaires des séries. Il retrouve ensuite une forme très générale du reste, déjà obtenue par M. Bourget (*Nouv. Ann.*, 1870) au moyen d'un autre calcul.

Biehler (*Ch.*). — Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy. (110-115).

Il s'agit des déterminants que l'on doit égaler à zéro pour exprimer que deux équations ont une racine commune. Le déterminant considéré par Cauchy et celui de M. Sylvester sont identiques entre eux, à un facteur numérique près.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la composition des forces dans le plan. (115-120).

Article contenant des considérations intéressantes, mais bien moins nouvelles certainement que ne le croit l'auteur, sur le *centre* d'un système de forces dans un plan. C'est une de ces questions auxquelles la méthode des équipollences s'applique le plus heureusement; elle a été traitée par M. Bellavitis et par bien d'autres géomètres.

p. 110-115; *voir* plus haut); réclamation de priorité. » (184-192).

Publications récentes. — 1. Lettera inedita di Carlo Federico Gauss a Sofia Germain, pubblicata da B. Boncompagni; Florence. — 2. Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, par J. Petersen, traduit par O. Chemin; Paris, 1880. — 3. Axonometria ó perspectiva axonométrica, por don Eduardo Torroja; Madrid, 1879. — Remarques sur les fractions périodiques, par C.-A. Laisant; Bordeaux, 1879. (192).

Biehler (*Ch.*). — Sur un procédé d'élimination. (202-206).

Condition nécessaire et suffisante pour que deux équations de même degré aient une racine commune.

Lucas (*Éd.*). — Sur les cas généraux d'impossibilité de l'équation $x^3+y^3=Az^3$. (206-211).

Généralisation d'une question proposée par M. Sylvester et précédemment résolue (voir *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, p. 507). M. Lucas emploie la méthode de Fermat, fondée sur la décomposition en facteurs, et il démontre ou énonce plusieurs propositions, très dignes d'intérêt, concernant les équations $x^3+y^3=Az^3$ et $xy(x+y)=Az^3$.

Barbarin (P.). — Note sur le planimètre polaire. (212-215).

Le planimètre dont M. Barbarin donne une description et une théorie très résumées est celui de M. Amsler. C'est l'un des instruments les plus ingénieux et les plus pratiques que l'on puisse imaginer pour la détermination des aires planes.

Genty. — Constructions diverses et solutions de problèmes graphiques relatifs aux coniques. (216-224).

Solution des deux problèmes généraux suivants : « Étant donnés deux points communs à deux coniques et trois autres points de chacune d'elles (ou trois points communs et deux autres points de chacune d'elles), trouver la seconde corde commune (ou le quatrième point commun). » Suivent des applications à des constructions diverses se rapportant aux coniques, notamment en ce qui concerne les axes et le centre de courbure.

Laguerre. — Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles. (224-236).

Après une remarque sur l'équation qui donne tang $\frac{\alpha}{m}$, l'auteur établit une proposition importante, due à M. Hermite, et qu'il démontre très simplement par la représentation géométrique des imaginaires. Il donne ensuite plusieurs propriétés

intéressantes sur la réalité des racines des équations. *Voir* une Note du même auteur dans le *Bulletin de la Soc. Math.* (t. V, p. 26).

CORRESPONDANCE. — M. Bourguet : « Solution des deux questions suivantes : 1° antipodaire de l'ellipse par rapport au centre; 2° lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. » (236-240).

PUBLICATIONS récentes. — 1. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali, per F. Casorati; 1878. — 2. Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants, par Picquet; Paris, 1878. (240).

Laguerre. — Théorèmes généraux sur les équations algébriques. (241-253).

Dans cet article, on trouve un emploi fort intéressant de la représentation géométrique des imaginaires, qui conduit à de nombreuses propriétés sur les racines des équations algébriques. Plusieurs applications sont destinées à mettre en lumière ces propriétés. C'est une suite aux précédents articles de M. Laguerre sur la théorie des équations et dont nous avons rendu compte plus haut. Il serait désirable de voir ces divers Mémoires de M. Laguerre réunis en un seul corps de doctrine et en un Volume unique, qui rendrait de réels services à l'enseignement.

Weill. — Note sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques. (253-261).

L'auteur établit dix-sept théorèmes, soit sur les triangles jouissant de la propriété en question, soit sur les polygones jouissant de la même propriété, et notamment sur les déplacements de ces triangles ou polygones.

Vénard (*Ch.*). — Sur une règle de M. Laguerre. (261-264).

La règle qu'étudie l'auteur est celle donnée par M. Laguerre dans le même Volume (p. 49) pour la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation, et dont il a été rendu compte plus haut. Comparaison avec la règle de Newton.

D'Ocagne (*M.*). — Applications de Géométrie cinématique plane. (264-277).

L'auteur a pour but de présenter quelques applications élémentaires de cette branche de la Géométrie que l'on doit à M. Mannheim. Il obtient de la sorte plusieurs résultats nouveaux. L'article se divise ainsi : Question sur la parabole. — Sur le centre de courbure de l'ellipse. — Sur le point où la droite de Simson touche son enveloppe. — Une suite est annoncée.

Lucas (*Éd.*). — Sur un problème de Diophante. (278-279).

Le problème traité par M. Lucas est celui qui a pour objet de trouver quatre

nombres tels que leurs produits deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés. *Voir* sur le même sujet *Nouv. Ann.*, 2e série, t. X, 1871, p. 323.

Lucas (*Éd.*). — Note sur la construction des normales à l'ellipse. (279-280).

Cette construction très simple est fondée sur une propriété des perpendiculaires abaissées d'un sommet sur les normales issues d'un point donné. Voir *Nouv. Ann.*, 2e série, t. IX, p. 348, et t. XV, p. 5.

Correspondance. — M. Talayrach : « Sur le théorème de Poncelet concernant les polygones inscrits et circonscrits à deux circonférences. » (280-287).

Publications récentes. — 1. A Treatise on some new geometrical methods, by James Booth; 2 vol. Londres, 1877. — 2. Formules et Tables d'intérêts composés et d'annuités, par F. Vintéjoux et J. de Reinach; Paris, 1879. — 3. Théorie des fonctions abéliennes, par Ch. Briot; Paris, 1879. — 4. Théories et questions pouvant servir de complément à un Cours de Mathématiques élémentaires, par L. Maleyx; Paris, 1879. — 5. Cours de Calcul infinitésimal, par J. Hoüel; t. III; Paris, 1880.

L.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (1).

Tome XCVI, nos 2281-2304; 1879-1880.

Luther (*Rob.*). — Observations de petites planètes faites en 1879 au micromètre circulaire de l'équatorial de Düsseldorf. (1-6).

Luther (*Wilh.*). — Éphéméride pour l'opposition de (35) Leucothea en 1879-1880. (7-8).

Nobile (*A.*). — Sur une nouvelle manière de déterminer la flexion astronomique dans les instruments méridiens. (9-14).

La méthode de M. Nobile consiste à mesurer, avec le fil de déclinaison de l'oculaire, le déplacement de l'image d'un point lumineux voisin de l'axe de rotation; les rayons émanés de ce point arrivent dans l'oculaire après trois réflexions totales sur

---

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 27.

des prismes invariablement fixés sur le cube de l'instrument, sur le barillet de l'objectif et enfin au centre de l'objectif. L'appareil qui doit être monté sur le cercle de Reichenbach de l'Observatoire de Capodimonte est encore dans la période d'essai, mais les résultats paraissent devoir être satisfaisants. L'instrument permettra de mesurer la flexion astronomique pour une distance zénithale quelconque, à condition qu'on admette qu'elle est symétrique de part et d'autre du zénith.

Zelbr (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète III de 1879 (comète de Palisa). (13-16).

Watson (*J.-C.*). — Note sur le nom des planètes découvertes par lui en 1877. (15-16).

(174) Phædra ou Phèdre,

(175) Andromache ou Andromaque,

(179) Clytæmnestra ou Clytemnestre.

Lohse (*O.*). — Note sur les apparences de la tache rouge de l'hémisphère sud de Jupiter. (17-18).

La tache a été vue pour la première fois à Potsdam le 5 juin, et depuis elle semble avoir conservé la même couleur, la même forme et la même position.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète III de 1879 (comète de Palisa), faites en septembre au Collège Romain. (19-20).

Pickering (*E.-C.*). — Observations de la comète I de 1879 (comète de Swift), faites à l'équatorial de 15 pouces d'Harvard College, de juin à septembre. (21-24).

Spörer. — Observations des taches solaires faites en 1879 à l'Observatoire de Potsdam. (23-28).

Winnecke (*A.*). — Note sur la marche de la pendule Hohwü n° 25 de l'Observatoire de Strasbourg. (27-32).

Le pendule est compensé au mercure et la marche diurne est représentée avec une exactitude très grande par la formule

$$\text{mouv. diurne} = 0^s,000 + 0^s,0125(b - 750) - 0^s,0110(t - 20),$$

où b est la hauteur du baromètre exprimée en millimètres et t la température en degrés centigrades.

Hartwig (*E.*). — Observations, éléments et éphéméride de la comète II de 1879 (comète d'Hartwig). (31-32).

Börsch. — Lois des erreurs et exactitude des nivellements géométriques, déduites des observations. (33-38).

Konkoly (*N. von*). — Note sur les observations [illegible] de la comète III de 1879 (comète de Palisa). [illegible]

Le spectre de la comète se composait de [illegible] longueurs d'onde :

I....................
II...................
III..................

Common (*A.-A.*). — Observations du satellite [illegible] de Mars faites à Londres le 21 septembre 1879. [illegible]

Bredikhine (*Th.*). — Observations de la comète [illegible] Brorsen, faites à Moscou en mars, avril et mai 1879. [illegible]

Šafařík (*A.*). — Observations sur les changements de [illegible] α de la Grande Ourse. (45-46).

Howe (*H.-A.*). — Note sur la détermination [illegible] position d'un micromètre à étoiles doubles. [illegible]

M. Howe propose de faire cette détermination à l'aide [illegible] sur le micromètre lorsque la lunette équatoriale est [illegible] le méridien.

Palisa. — Découvertes des planètes [illegible] et [illegible], faites à Pola [illegible] 8 et 13 octobre 1879. (47-48).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découvertes de la planète [illegible], faites à Clinton le 13 octobre 1879. (47-48).

[illegible] — Découvertes des planètes [illegible] et [illegible], faites à Pola [illegible] et 11 octobre 1879. (47-48).

[illegible] (*H.*). — Note sur la répartition des erreurs [illegible] dans une série d'équations. (49-62).

[illegible] (*A.*). — Observations de la comète II de 1867 (comète Tempel), faites à Arcetri en juillet 1879. (61-64).

[illegible] (*A.*). — Sur la possibilité d'éviter les étoiles circumpolaires dans les déterminations du temps local. (65-74).

La méthode de M. Nobile consiste à observer les passages de deux étoiles d'ascensions droites peu différentes, situées de telle sorte que les erreurs d'azimut soient [illegible] de signes contraires, et de déclinaisons telles que l'on ait

$$\tan\delta + \tan\delta' = 2\tan\varphi.$$

Les résultats de l'observation sont très satisfaisants et l'économie de temps grande.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète III de 1879 (comète de Palisa), faites en septembre et octobre 1879 à l'Observatoire du Collège Romain. (75-77).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète II de 1879 (comète d'Hartwig), faites en septembre 1879 au Collège Romain. (79-80).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (200), faite le 22 octobre 1879 à Clinton. (79-80).

Börsch. — Lois des erreurs et exactitude des nivellements géométriques déduites des observations (suite). (81-90).

Winnecke (*A.*). — Note sur la marche de la pendule Knoblich n° 1963, de l'Observatoire de Strasbourg. (91-92).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des comètes III de 1879 (comète de Palisa) et II de 1879 (comète d'Hartwig), faites à Athènes en septembre et octobre 1879. (91-94).

Schur et *Winnecke* (*A.*). — Observations de la Lune et des étoiles de la Lune, faites en 1878 à l'Observatoire de Strasbourg. (95-108).

Geelmuyden (*H.*). — Note sur la détermination de la parallaxe de l'étoile OEltzen 11677. (109-110).

L'étoile, qui a un mouvement propre considérable de $-0^s,424$ en ascension droite et de $-0'',137$ en déclinaison, a une parallaxe sensible de $0'',25$ environ.

Block (*E.*). — Note sur deux nébuleuses brillantes, situées dans l'amas d'Éridan et non observées par Herschel. (109-112).

Doberck (*W.*). — Détermination des orbites des étoiles doubles 4 du Verseau et μ^2 d'Hercule. (111-112).

Palisa. — Découverte de la planète (210), faite à Pola le 12 novembre 1879. (111-112).

Seeliger (*H.*). — Note sur les mesures d'étoiles doubles faites par M. Mädler. (113-120).

Downing (*A.-M.-W.*). — Recherches sur la détermination de la parallaxe moyenne du Soleil d'après les observations méri-

diennes de déclinaison de Mars et des étoiles voisines faites à Leide et Melbourne pendant l'opposition de 1877. (119-128).

La parallaxe solaire serait

$$\pi = 8'', 960 \pm 0'', 051.$$

Breusing. — Notes sur l'invention du nonius ou vernier. (129-134).

L'idée théorique du vernier, qui consiste à prendre n divisions d'une règle ou d'un cercle pour les partager en ($n \pm 1$) parties égales remonte à C. Clavius (*Christophori Clavii Bambergensis Opera*, vol. V, Moguntiæ, 1611, fol.); mais c'est P. Vernier qui a le premier (*La construction, l'usage et les proprietez du quadrant nouveau*, Bruxelles, 1631) placé la petite plaque ainsi divisée à l'extrémité de l'alidade mobile.

Marth (A.). — Données pour calculer la position des satellites de Mars pendant l'opposition de 1879. (133-138).

Meissel. — Notes sur un problème de Trigonométrie sphérique. (139-140).

Étant données les trois sommes $A + a$, $B + b$, $C + c$ des angles et des côtés d'un triangle sphérique, trouver ses éléments.

Peter (B.). — Observations de la comète I de 1879 (comète de Swift), faites en juin, juillet et août à l'équatorial de Leipzig. (141-144).

Vogel (H.-C.). — Note sur une nouvelle nébuleuse dans l'amas du Cygne. (143-144).

Cette nébuleuse, découverte par M. T.-W. Webb, est l'étoile + 41°, n° 4004 du Catalogue de Bonn. L'étoile, qui est de 8,5 grandeur, se montre, avec un très fort grossissement, comme une nébuleuse ronde de 3″ à 4″ de diamètre. La lumière de cette nébuleuse donne un spectre continu traversé par une seule ligne brillante.

Lehmann-Filhès (R.). — Recherches sur les comètes et les courants météoriques dont la distance périhélie est très faible. (145-152).

L'aphélie des comètes qui passent le plus près du Soleil est par 90° environ de longitude; c'est par cette même longitude que se trouvent les principaux points radiants.

Becker (E.). — Mémoire sur la marche de la pendule n° 1952 de Knoblich. (151-156).

Abetti (A.). — Observations de la comète périodique de Brorsen, de la comète I de 1879 (comète de Swift) et des planètes (8) et

(129), faites en juin et juillet 1879 à l'Observatoire de Padoue. (157-160).

Palisa (*A.*). — Découverte de la planète (211), faite à Pola le 11 décembre 1879. (159-160).

Weiler (*A.*). — Recherches sur les équations différentielles du mouvement dans le problème des trois corps. (161-184).

Winnecke (*A.*). — Remarques sur la Note du professeur Oudemans relative à l'invention de l'oculaire négatif et remarques sur la découverte de la lune de Mars par Schyrlaeus de Rheita. (183-188).

Vogel (*H.-C.*). — Notes sur les spectres des comètes de Winnecke (1877, II) et de Palisa (1879, III). (189-190).

L'une et l'autre comète ont un spectre formé de trois bandes lumineuses traversées par un faible spectre continu.

Lorenzoni. — Occultations de α du Scorpion et δ des Gémeaux, observées à Padoue les 28 juillet et 4 novembre 1879. (189-190).

Webb (*T.-W.*). — Note sur ses observations de la nébuleuse nouvelle du Cygne. (191-192).

La nébuleuse (étoile zone $+41°$, n° 4004 d'Argelander) n'est pas ronde; elle a un noyau bien net situé vers le nord et du côté du premier bord. Son spectre est formé de trois lignes brillantes ayant pour longueurs d'onde 500^{μ}, 496^{μ}, 487^{μ}.

Newcomb (*S.*). — Appel aux astronomes pour l'observation de Polymnie.

Oppenheim (*H.*). — Détermination de l'orbite de (122) Gerda. (191-200).

Les calculs sont fondés sur l'ensemble des observations de 1872 à 1877.

Winnecke. — Note sur la variation d'éclat de la nébuleuse $h\,882 = \mathrm{H}\,1,20$, $\alpha = 11^{h}\,17^{m}\,11^{s}$, $\delta = +12°\,7'$ (1860,0). (201-206).

Gasparis (*A. de*). — Sur la variation de la longitude du nœud, de l'inclinaison et du demi-paramètre dans les orbites planétaires. (205-208).

Albrecht. — Note sur un problème de Trigonométrie sphéroïdique inverse de celui résolu par Bessel. (209-218).

De la latitude géographique de deux stations et de leur distance déduire les azimuts aux deux points et la longueur de la ligne géodésique qui passe par ces deux points.

Darwin (*G.-H.*). — Sur l'effet séculaire du frottement des marées. (217-222).

Dans la Note actuelle, M. Darwin résume les Mémoires qu'il a publiés sur ce sujet dans les *Transactions Philosophiques* de 1879. On sait que la conclusion principale à laquelle arrive l'auteur est que la Terre et la Lune formaient à l'origine deux masses en contact tournant sur elles-mêmes dans un intervalle d'environ trois heures. Le passage à la situation actuelle aurait exigé cinquante-quatre millions d'années.

Doberck (*W.*). — Éléments de O.Σ235. (221-222).

Pritchett (*C.-W.*). — Note sur ses observations de la tache rouge de l'hémisphère sud de Jupiter. (223-224).

La tache rouge est probablement presque fixe sur la planète, et ses observations donnent la durée de la rotation de l'astre; les durées mesurées jusqu'ici au moyen de taches des bandes sont inexactes, ces dernières étant rapidement mobiles.

Peter (*B.*). — Observations de petites planètes, faites en 1879 à l'Observatoire de Leipzig. (225-236).

Seeliger (*H.*). — Remarques sur la méthode d'interpolation de Cauchy. (235-240).

Hall (*A.*). — Observations de l'étoile double β du Lièvre. (239-240).

Lehmann-Filhès (*R.*). — Note sur la détermination du point radiant d'un courant météorique à l'aide d'un nouveau météoroscope.

Strasser (*G.*). — Observations de la comète périodique de Brorsen, des comètes I de 1879 (comète de Swift) et III de 1879 (comète de Palisa), faites de mars à septembre 1879 à l'Observatoire de Kremsmünster. (249-250).

Abetti (*A.*). — Observations de petites planètes, faites en 1879-1880 à l'Observatoire de Padoue. (251-254).

Observatoire de Göttingue. — Observations de la comète III de 1879 (comète de Palisa), faites en octobre 1879. (253-254).

Bruhns (*C.*). — Observations des comètes III de 1879 (comète de Palisa) et II de 1879 (comète d'Hartwig), faites en août et septembre à Leipzig. (255-256).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1879. (257-272).

Gould. — Note sur l'apparition d'une grande comète dans l'hémisphère sud le 5 février 1880. (271-272).

Palisa. — Découverte de la planète (212), faite à Pola le 6 février 1880. (271-272).

Beebe (*W.*) et *Hazen* (*H.-A.*). — Observations de la comète périodique de Brorsen, de la comète I de 1879 (Swift) et de la comète III de 1879 (Palisa), faites en 1879 à l'Observatoire de Gale College à New-Haven. (273-274).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les taches solaires, faites en 1879 à Athènes. (275-278).

Fabritius (*W.*). — Note sur le calcul de l'inclinaison du grand cercle dans la détermination des orbites par trois observations. (279-886).

Vogel (*H.-C.*). — Observations des spectres de la nébuleuse nouvelle découverte dans le Cygne par M. Webb et de l'étoile nouvelle signalée par M. Baxendell dans le Petit Chien. (287-288).

Le spectre de la nébuleuse se compose d'un spectre continu faible et de trois bandes brillantes.

Le spectre de l'étoile, rouge orangé, est un très beau spectre à bandes noires.

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (213) faite à Clinton le 17 février 1880. (287-288).

Peters (*C.-H.-F.*). — Note sur les mouvements propres des étoiles du Catalogue de Weisse : 12^h n° 69, 12^h n° 124. (289-290).

Tacchini (*P.*). — Observations de Neptune, Jupiter et Mars, faites en novembre 1879 à l'Observatoire du Collège Romain. (291-292).

Dubjago (*D.-V.*). — Éphéméride pour l'opposition de Diana (78) en mars et avril 1880. (293-294).

Wolf (*R.*). — Notes sur la variation des taches solaires et les périodes des étoiles filantes périodiques. (295-298).

Le minimum des taches solaires a eu pour date 1878,9.

Les étoiles filantes d'avril, août et novembre sont sujettes à une période qui, d'après les observations anciennes et récentes, peut être fixée ainsi :

Nom de l'essaim.	Époque.	Période principale.
Aprilides	1122,33	50,07 années.
Perséides	1532,96	103,60 »
Léonides	1366,85	33,28 »

Herschel (Major *J.*). — Note sur les observations du pendule qui doivent être entreprises dans l'Inde par le *Survey of India*. (297-298).

Doberck (*W.*). — Note sur la monture de l'équatorial de Markree et sur la détermination des constantes des grands équatoriaux. (297-304).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de petites planètes faites en 1879 à l'Observatoire d'Hamilton College. (305-320).

Palisa. — Découverte de la planète (211), faite à Pola le 1[er] mars 1880. (319-320).

Hermite (*Ch.*). — Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module. (321-326).

Vogel (*H.-W.*). — Sur les nouvelles lignes du spectre de l'hydrogène et le spectre des étoiles blanches. (327-330).

Les nouvelles lignes de l'hydrogène observées photographiquement dans le spectre d'un tube de Geissler ont pour longueurs d'onde :

$H\varepsilon$	[illegible]
$H\zeta$	3887
$H\eta$	3834
$H\theta$	3795

Elle se retrouvent exactement dans le spectre des étoiles blanches photographié par Huggins.

Plummer (*J.-J.*). — Observations de la comète périodique de Brorsen, faites d'avril à juin 1879 à l'Observatoire d'Orwel Park. (329-334).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de petites planètes, faites en 1879 à l'Observatoire d'Hamilton College. (333-336).

Gasparis (*A. de*). — Note sur une relation de distance dans le problème des trois corps. (337-344).

Spoerer. — Observations de taches solaires, faites à Potsdam en 1879. (343-346).

Todd (*D.-P.*). — Observations d'éclipses de satellites de Jupiter, faites à Washington pendant l'opposition de 1879. (347-352).

Low (*M.*). — Note sur l'influence d'une correction dans la position des étoiles sur les hauteurs du pôle observées dans la mesure de l'arc de méridien de la Prusse orientale. (353-358).

Hartwig (*E.*). — Observation de l'éclipse partielle de Soleil du 18 juillet 1879, à l'aide de l'héliomètre de l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (359-364).

Gould (*B.-A.*). — Note sur la grande comète qui s'est montrée le 2 février 1880 dans l'hémisphère austral. (363-366).

La comète avait une tête d'environ 2′ à 3′ de diamètre, sans noyau sensible; sa chevelure s'étendait sur un arc de 40° environ et était d'un éclat presque uniforme La comète n'a pu être que très imparfaitement observée dans les instruments de Cordoba.

Doberck (*W.*). — Formules pour le mouvement apparent de trente-huit étoiles doubles des Catalogues de W. et O. Struve. (365-368).

Winnecke (*A.*). — Observations d'occultations d'étoiles et d'éclipses de satellites de Jupiter, faites en 1878 et 1879 à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (369-374).

Millosevich (*E.*). — Observations de planètes faites en février 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (375-378).

Rancken (*R.-F.*). — Mesure de la latitude de l'Observatoire de Stockholm. (379-380).

La latitude est + 59°20′33″,04.

Liais (*E.*). — Note sur la grande comète qui s'est montrée le 2 février 1880 dans l'hémisphère sud. (379-382).

Copeland (*R.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète I de 1880 (grande comète australe). (381-382).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (215), faite à Clinton le 19 mars 1880. (383-384).

Tome XCVII, nos 2305-2328; 1880.

Peters (*C.-F.-W.*). — Mesure de la longueur du pendule à seconde à Altona. (1-36).

Les observations ont été faites avec un pendule à réversion, construit par Lohmeier et qui avait déjà servi au Dr Neumayer pour faire des observations analogues à Melbourne. Les séries d'observations sont au nombre de deux : la première a été faite en juin et en juillet; la seconde en décembre 1872, à une température très différente de la première, ce qui a rendu facile le calcul du coefficient de température.

La moyenne de huit observations donne pour longueur du pendule simple à seconde, à l'Observatoire d'Altona,

$$\lambda = 994^{mm},3244.$$

L'altitude du point d'observation au-dessus du niveau de la mer étant $30^m,9$, si l'on prend pour densité moyenne des couches géologiques voisines (sable) 1,8 et pour densité moyenne de la Terre 5,67, on trouve, pour la réduction au niveau de la mer,

$$+ 0^{mm},0074,$$

en sorte que la longueur du pendule à seconde est, à Altona,

$$\lambda = 994^{mm},3318.$$

Tebbutt (*J.*). — Éclipses des satellites de Jupiter, observées à Windsor (N.-S.-W.) de juillet 1879 à janvier 1880. (37-40).

Doberck (*W.*). — Formules pour le mouvement de quelques étoiles doubles. (39-40).

Les calculs de M. Doberck ont porté sur vingt-sept étoiles doubles de Struve.

Robbers (*J.*). — Éléments et éphéméride de la planète (182) Elsbeth, pour son opposition en septembre 1880. (41-44).

Gould (*B.-A.*). — Note sur la grande comète de 1880, comète I de 1880. (43-46).

La comète, dont la chevelure n'avait pas moins de 35°, a été observée à Cordoba du 6 au 15 février 1880. D'après les éléments approximatifs calculés par M. Gould, il y aurait quelque ressemblance entre cette comète et la grande comète de 1843; mais la période de 37 ans, comprise entre 1843 et 1880, n'est pas commensurable avec la période de 175 ans assignée par Hubbard à la comète de 1843.

Pritchett (*C.-W.*). — Observations de Phobos et Deimos, faites

en 1879 à l'Observatoire de Morrisson, Glasgow (Missouri). (45-48).

Rümker (*G.*). — Observations de petites planètes, faites au cercle méridien de Hambourg en 1878 et 1879. (49-56).

Gould (*B.-A.*). — Note sur la grande comète de février 1880, comète I de 1880. (57-62).

M. Gould montre qu'il ne paraît pas impossible que la comète actuelle soit identique avec celles de 1668, 1702 et 1843.

Weiss (*E.*). — Recherches sur la grande comète australe de 1880. (61-64).

Pour M. Weiss l'identité de la grande comète de 1843 et de la comète australe de 1880 est certaine.

Schäberle. — Découverte de la comète II de 1880, faite le 6 avril 1880. (63-64).

Glan (*P.*). — Description d'un nouveau spectroscope propre à l'observation des protubérances. (65-68).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur la tache rouge observée sur Jupiter pendant l'opposition de 1879. (67-70).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la nébuleuse découverte dans le Cygne par M. Webb. (69-70).

Pritchett (*H.-S.*). — Mesures micrométriques du diamètre de Mars, faites en 1879 à l'Observatoire Morrisson de l'Université de Glasgow (Missouri). (69-74).

Le diamètre moyen à la distance 1 est 9",486. Il est plus grand que celui (9",328) déduit par Bessel de ses mesures héliométriques et plus petit que celui (11",10) employé dans les calculs du *Nautical Almanac*.

Bruns (*H.*). — Remarques sur les recherches de M. Albrecht relatives à la méthode de Bessel pour calculer la distance de deux points sur un sphéroïde. (73-74).

Seeliger (*H.*). — Notes sur les mesures d'étoiles doubles faites par Mädler. (73-76).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur la position de l'étoile variable découverte dans le Petit Chien par M. Baxendell. (75-76).

Tebbutt (*J.*). — Note sur la grande comète australe de 1880. (75-76).

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques de la comète I de 1880, grande comète de février 1880. (75-76).

Holetschek (*J.*) et *Zelbr* (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète II de 1880, comète Schäberle. (77-78).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète II de 1880, faites à l'équatorial du Collège Romain. (77-78).

Zelbr (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète II de 1880. (79-80).

Peter (*B.*). — Observations de la comète II de 1880, faites à Leipzig. (79-80).

Knorre (*V.*). — Découverte de la planète (215), faite à Berlin le 7 avril 1880. (79-80).

Palisa. — Découverte de la planète (216), faite à Berlin le 10 avril 1880. (79-80).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur l'éclat de la planète Mars, faites à Bonn de 1848 à 1849 et à Athènes de 1864 à 1879. (81-94).

Peter (*B.*). — Observations de la comète II de 1880, comète Schäberle, faites à l'équatorial de Leipzig. (93-94).

Martin (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880. (91-96).

Weiler (*A.*). — Le problème des trois corps d'après la nouvelle théorie des perturbations. (97-112).

Notice nécrologique sur le professeur C.-A.-F. Peters. (113-114).

Christian-Auguste-Frédéric Peters était né à Hambourg le 7 septembre 1806. En 1821, H.-C. Schumacher se l'associa comme calculateur. En 1826, il prenait part à la triangulation du pays de Hambourg. En 1829-1830, il aidait son maître dans ses observations sur le pendule.

De 1834 à 1839 il a le titre d'assistant à l'Observatoire de Hambourg et à cette dernière date il quitte sa ville natale pour être attaché à l'Observatoire de Poulkova,

où il fut successivement adjoint (1842) et membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg (1847).

En 1849 il devint professeur d'Astronomie à Königsberg.

Enfin, à la mort de A.-C. Petersen, la direction de l'Observatoire d'Altona lui fut confiée; il la conserva jusqu'en 1872, époque à laquelle il se transporta à Kiel, où il est mort le 8 mai 1880.

La direction des *Astronomische Nachrichten* est maintenant confiée au professeur C.-F.-W. Peters.

Pickering (*E.-C.*). — Observations des satellites de Mars, faites en 1879 à l'observatoire de Harvard College, Cambridge (U.-S.). (115-128).

Oppenheim (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880. (127-128).

Weiler (*A.*). — Le problème des trois corps d'après la nouvelle théorie des perturbations (suite). (129-144).

Pickering (*E.-C.*). — Observations des satellites de Mars, faites en 1879 à l'observatoire de Harvard College, Cambridge (U.-S.). (145).

Peters (*C.-H.-F.*). — Note sur l'éclat de Frigga (77), d'après des observations faites à Hamilton College. (147-150).

Les éclats observés pendant les oppositions qui se sont succédé depuis 1862 ayant été corrigés des variations tenant aux différences de distance et aux distances zénithales, les nombres montrent qu'il y a dans l'éclat de la planète une variation périodique certaine.

Oppolzer (*Th. v.*). — Recherches sur le mouvement de la comète périodique de Winnecke (comète III de 1819) et l'existence d'un milieu résistant. (149-154).

L'accélération de la comète de Winnecke est favorable à l'hypothèse d'un milieu résistant.

Pritchett (*C.-W.*). — Observations des conjonctions des satellites de Saturne, faites à l'Observatoire de Glasgow (U.-S.) en 1879. (153-156).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète II de 1880, comète de Schäberle, faites au Collège Romain en avril et mai 1880. (157-158).

Burnham (*S.-W.*). — Observations du satellite de Sirius, faites en 1879-1880 à l'Observatoire de Dearborn, Chicago. (157-158).

Millosevich (*E.*). — Éléments paraboliques de la comète II de 1880, comète de Schäberle. (159-160).

Weiler (*A.*). — Le problème des trois corps d'après la nouvelle théorie des perturbations (suite). (161-176).

Ferrero (*A.*). — Note sur un procédé pour établir l'accord entre plusieurs bases d'une triangulation. (177-182).

Börsch (*A.*). — Note sur l'influence de la position du zéro d'un cercle dans les équations de la compensation d'un réseau géodésique. (181-186).

Meyer (*M.-W.*). — Calcul d'une orbite elliptique pour la grande comète australe de 1880, comète II de 1880. (185-186).

Tacchini (*P.*). — Observations de petites planètes, faites en 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (189-190).

Doberck (*W.*). — Formules pour quelques étoiles doubles. (191-192).

Weiler (*A.*). — Le problème des trois corps d'après la nouvelle théorie des perturbations (suite et fin). (193-208).

Souchon (*A.*). — Note sur un point de la théorie analytique du système du monde. (209-220).

Le Mémoire de M. Souchon est relatif aux formules qui expriment la variation différentielle de l'époque due au carré des forces perturbatrices. Les formules de l'auteur, qui comprennent les termes du second ordre provenant des excentricités et des inclinaisons, sont plus complètes que celles de la *Mécanique céleste* et que celles de Pontécoulant.

Neugebauer (*P.*). — Éphéméride pour l'opposition de Fidès (37). (219-220).

Coppland (*R.*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Observations de la comète II de 1880, comète de Schäberle; éléments et éphéméride de cette comète. (221-224).

Todd (*D.-P.*) — Fautes d'impression dans les Tables de multiplication de Crelle. (223-224).

Dans le produit de 112 × 437 il faut lire 489 au lieu de 499.
» 265 × 881 » 2334 » 2234.

Oppolzer (*Th. v.*). — Remarques sur le mouvement anormal de quelques comètes et l'existence d'un milieu résistant. (225-236).

La résistance opposée au mouvement des comètes par le milieu planétaire, résistance qui explique si bien l'accélération des comètes d'Encke et de Winnecke, ne peut suffire à identifier les grandes comètes de 1843 et 1880; elle n'explique pas non plus les anomalies du mouvement de la grande comète de 1811. Il ne reste donc qu'à chercher si la formation de la queue des comètes de 1811, 1843 et 1880 ne pourrait pas fournir une explication des irrégularités de leurs mouvements; peut-être aussi dans ces comètes le noyau visible ne représente-t-il pas le centre de gravité.

Martin. — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880, comète de Schäberle, pour les mois de juillet et août 1880. (235-236).

Young (*C.-A.*). — Observations de la comète II de 1880, faites à l'Observatoire de Princeton (U.-S.) (237-238).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double 35 de Pégase. (239-240).

L'étoile qui a un mouvement propre très considérable a un compagnon qui tourne très rapidement autour d'elle. L'angle de position aurait changé de près de 4° en un an. Les mesures sont d'ailleurs très difficiles par suite du voisinage des étoiles (1″) et par suite de leur grande différence d'éclat; le compagnon est de douzième grandeur.

Doolittle (*C.-L.*). — Observations des satellites de Jupiter, faites en 1879 à l'Observatoire Sayre, de l'Université de Lehigh (Pensylvanie). (241-252).

Palisa (*J.*). — Note sur la découverte des planètes (153) et (137). (253-254).

Oppolzer (*Th. v.*). — Note sur la planète, vue par Wartmann en 1831. (253-254).

La planète vue par Wartmann en 1831, et signalée par Arago en 1836, n'est autre chose qu'Uranus.

Gould (*B.-A.*). — Observations méridiennes des étoiles de comparaison de la comète d'Encke en 1878. (255-256).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites à l'équatorial de Düsseldorf en 1879-1880. (257-262).

Luther (*W.*). — Éphéméride pour l'opposition de (84) Clio en décembre 1880. (263-264).

Bredikhine (*Th.*). — Note sur le calcul des forces répulsives des queues des grandes comètes de 1680, 1744, 1769 et 1880. (265-266).

Schäberle (*J.-M.*). — Éléments et éphéméride de la comète II de 1880, comète de Schäberle. (265-268).

L'éphéméride est préparée pour la réapparition de la comète en septembre, octobre et novembre 1880.

Tebbutt (*J.*). — Observations de Pallas, faites à Windsor (N.-S.-W.) pendant son opposition de décembre 1879 et janvier 1880. (269-272).

Howe (*H.-A.*). — Nouvelle solution approchée du problème de Kepler. (273-276).

M. Howe donne un procédé facile pour la solution rapide et vraiment très approchée de l'équation qui donne l'anomalie vraie et le rayon vecteur au moyen de l'anomalie moyenne.

Büttner (*H.*). — Éléments de la comète I de 1878, découverte par M. Swift le 6 juillet 1878. (277-278).

Tacchini (*P.*). — Observations de planètes et de comètes, faites en avril et mai à l'Observatoire du Collège Romain. (279-282).

Doberck (*W.*). — Éléments de ζ du Cancer. (283-286).

Les éléments sont fondés sur l'ensemble des observations faites de 1781 à 1872.

Doberck (*W.*). — Formules pour le mouvement de quelques étoiles doubles. (285-286).

Gould (*B.-A.*). — Observations de la comète périodique de Tempel, comète de six ans, faites en 1879 à l'Observatoire de Cordoba. (287-288).

Seeliger (*H.*). — Considérations sur la probabilité du partage des erreurs accidentelles. (289-304).

Jedrzejewicz. — Observations d'étoiles doubles, faites à son observatoire particulier de Plonsk. (305-318).

L'auteur fait connaître son mode d'observation et les résultats que lui a donnés l'étude des vis micrométriques de son équatorial de Merz.

Hall (*A.*). — Observations du compagnon de Sirius, faites à Washington de janvier à mai 1880. (319-320).

Ceraski (*W.*). — Découverte d'une étoile variable nouvelle. (319-320).

L'étoile du Catalogue d'Argelander qui a pour position

$$0^h 49^m 39^s$$
$$81°5',6$$

varie de la grandeur 9 à la grandeur 7,5 dans deux heures environ.

Palisa (*J.*). — Observations de comètes et de planètes, faites à Pola pendant le second semestre de 1879. (321-334).

Kortazzi (*J.*). — Observations de la comète II de 1880, comète de Schäberle, faites en avril, mai et juin à l'Observatoire de Nicolaïef. (335-336).

Lohse (*O.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites à Potsdam en juin et juillet. (335-336).

Oppolzer (*Th. v.*). — Éléments et éphéméride de la comète périodique de Winnecke (comète III de 1819) pour son apparition de décembre 1880 à janvier 1881. (337-342).

Le calcul des éléments est fondé sur l'ensemble des observations des trois apparitions de 1858, 1869 et 1875.

Meyer (*M.-W.*). — Éléments de la grande comète de 1880. (343-346).

Le calcul est fondé sur l'ensemble des observations faites à Melbourne et Cordoba du 6 au 19 février 1880. — L'orbite est sensiblement elliptique, avec une excentricité de 88°6'56",0 et un grand axe de 11,08653.

Strasser (*G.*). — Observations de planètes, faites en 1878 et 1879 à l'Observatoire de Kremsmünster. (347-352).

Lehmann-Filhès (*R.*). — Note sur la distribution des points radiants à la surface de la sphère céleste. (353-372).

Marth (*A.*). — Éphéméride des cinq satellites intérieurs de Saturne d'août 1880 à mars 1881. (371-384). G. R.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (¹).

Tome VI; 1880.

Michaelis (*Dr G.-J.*). — Sur le principe de la conservation de l'énergie. (1-18).

L'auteur s'occupe d'abord des principaux principes mécaniques applicables à des forces qui dépendent du mouvement des particules qu'elles affectent et qui admettent une fonction des forces de Schering. Ensuite, il traite plus amplement du principe de la conservation de l'énergie et s'efforce de réunir quelques considérations de Helmholtz, Weber, etc.

Schoute (*Dr P.-H.*) — De la projection sur une surface. (19-48).

Après avoir donné un aperçu critique des différentes méthodes qui mènent à la détermination du nombre des normales à une surface qui passent par un point donné, l'auteur énonce plusieurs théorèmes nouveaux par rapport à la projection d'une courbe sur une surface, son satellite, sa surface projetante, etc. Un extrait de cette étude est inséré dans l'*Annuaire de l'Association Française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Montpellier, 1879).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur quelques jeux de dés. (49-66).

L'auteur considère la probabilité de jeter le nombre p avec n dés, probabilité qu'il représente par le symbole $P_{(p,n)} : b^n$, $P_{(p,n)}$ étant le nombre des cas favorables et b^n celui des cas possibles. Il développe la valeur des expressions $P_{(p+1,n)} - P_{(p,n)}$ et $P_{(p,n+1)} - P_{(p,n)}$ en se servant de la notation

$$a^{\frac{b}{c}} = a(a+c)(a+2c)\dots[a+(b-1)c],$$

nommée *faculté analytique*, et applique les résultats au jeu ordinaire à deux dés, au jeu des doubles, au jeu quinque-nove et au jeu hasard à deux dés.

Van den Berg (*F.-J.*). — Un triangle pesant donné repose avec chacun de ses sommets sur une des faces d'un angle trièdre donné : déterminer la position d'équilibre du triangle dans les deux cas où l'on néglige le frottement de ses sommets sur les faces du trièdre et où l'on en tient compte (²). (67-97).

(¹) Voir *Bulletin*, III₂, 175.

(²) Sujet de prix proposé par la Société (1878, n° 3).

Après avoir donné la solution complète du problème en question, aussi bien par la Géométrie que par l'Analyse, l'auteur considère quelques cas spéciaux. Par rapport au cas plus général d'un polygone plan dont les *n* sommets s'appuient sur *n* plans donnés, il observe que la position n'est possible qu'autant que $n < 7$, etc.

Bierens de Haan (*D.*). — Sur quelques jeux de dés (suite). (113-123).

Considération du jeu anglais *krabs* à deux dés, du jeu *passe-dix* à deux et à plusieurs joueurs, du jeu *pair ou impair*, du jeu nommé à tort *parfaite égalité* et du jeu *krabs* à trois dés.

Samot (*D.-J.-A.*). — Les principes de la science de l'assurance sur la vie (suite) ([1]). (123-143).

Moors (*B.-P.*). — Théorie de la cubature du demi-hectolitre mesure de blé. (144-170).

***a*. Détermination du diamètre moyen d'une mesure cylindrique à peu près circulaire, dont le bord supérieur et le fond se trouvent dans des plans parallèles. — *b*. Rapport entre une erreur du diamètre de la mesure et une erreur dans la hauteur. — *c*. Détermination de la hauteur moyenne d'une mesure à bord ondulant et à fond plan. — *d*. Détermination de la hauteur moyenne d'une mesure à bord ondulant et à fond courbé. — *e*. Description des instruments de précision. — *f*. Application. — *g*. Annotations.**

Kapteyn (Dr *N.-P.*). — Résumé des questions discutées dans les conférences scientifiques de la Société Mathématique (1878-1879). (170-171).

Kamerlingh Onnes (*H.*). — Sur le mouvement relatif (suite) ([2]) (173-182).

Chapitre III (suite). 10. Variation des éléments des ellipses d'oscillation par rapport à d'autres axes que les axes de symétrie. — 11. Évitement des déviations du pendule de Foucault, causées par la rotation du point de suspension.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur l'équation de l'hyperboloïde déterminé par trois directrices, en rapport avec l'équilibre de quatre forces dans l'espace. (183-195).

L'auteur démontre par la Géométrie et par l'Analyse que quatre droites ne peuvent être les porteurs de quatre forces en équilibre dans l'espace qu'autant qu'elles sont des génératrices de même espèce d'un même hyperboloïde, théorème énoncé par Möbius.

Schaefer (*J.-H.*). — Réduction des formules qui déterminent dans

---

([1]) *Voir* t. V, p. 46.
([2]) *Voir* t. V, p. 166.

la question des inondations la quantité d'eau qui entre à d'autres qui font connaître en peu de temps le temps nécessaire à l'inondation totale pour le cas où l'eau est affectée par le flux et le reflux. (196-202).

I. Introduction. — II. Application de la méthode en se servant de déversoirs imparfaits. (*A suivre.*)

Landré (*Corn.-L.*). — De la perspective d'une sphère. (203-207).

L'auteur évalue la grandeur de l'erreur commise par le peintre qui remplace la perspective elliptique par un cercle.

Landré (*Corn.-L.*). — Sur un théorème des déterminants. (208-211).

L'auteur signale une erreur commise par M. Dostor dans ses *Éléments de la théorie des déterminants*, renfermée dans l'équation

$$\begin{vmatrix} bb'+cc' & ba' & ca' \\ ab' & cc'+aa' & cb' \\ ac' & bc' & aa'+bb' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2bcc' & -2cbb' \\ -2acc' & 0 & -2caa' \\ -2abb' & -2baa' & 0 \end{vmatrix}.$$

Landré (*Corn.-L.*). — Sur la formule d'Euler. (212-215).
Landré (*Corn.-L.*). — Bibliographie. (216-218).

Compte rendu de l'Ouvrage *Beginselen der Stereometrie* (*Éléments de Stéréométrie*) du Dr C.-J. Matthes, professeur à l'Université d'Amsterdam.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (98-112 et 219-223).

P.-H. Schoute.

ARCHIVES NÉERLANDAISES des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par E.-H. von Baumhauer (¹).

Tome XI; 1876.

Hoorweg (*J.-L.*). — Sur la propagation du son d'après la nouvelle théorie des gaz. (131-177).

Si l'on veut établir les équations aux dérivées partielles du mouvement des fluides gazeux en prenant pour point de départ la nouvelle théorie de Clausius sur

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 15.

la constitution des gaz, on rencontre des difficultés que les auteurs des Traités de Physique les plus répandus sont loin d'avoir résolues d'une manière satisfaisante. D'autre part, l'ancienne théorie a fourni tant de résultats importants, confirmés par l'expérience, qu'il serait regrettable d'être obligé de la sacrifier à la théorie nouvelle. M. Hoorweg cherche, dans son Mémoire, à concilier les deux théories.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur une meilleure méthode pour faire les mesures héliométriques, à l'occasion d'un passage de Vénus sur le Soleil. (186-196).

Stamkart (*F.-J.*). — Description de la boussole d'intensité. (197-228).

Stamkart (*F.-J.*). — Note sur l'emploi de la boussole d'intensité pour trouver la déviation de l'aiguille aimantée à bord d'un navire. (229-238).

Stamkart (*A.-A.*). — L'intensité horizontale du magnétisme terrestre, observée au moyen de la boussole d'intensité, à bord du navire *Petronella-Catharina,* capitaine C.-H. van der Veen, pendant un voyage de Batavia à Macao, suivi du retour à Batavia et de là en Hollande, en 1860 et 1861. Communiqué par F.-J. Stamkart. (239-246, Tableau).

Donders (*F.-C.*). — Essai d'une explication génétique des mouvements oculaires. (401-457).

I. Lignes de fixation parallèles. — II. Convergence. — III. Torsion parallèle. — IV. Torsion symétrique indépendante. — Appendices.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur les ondes sonores cylindriques. (458-466).

Bosscha (*J.*). — Sur l'équilibre d'une goutte entre deux plaques horizontales. (467-475).

Cohen Stuart (*L.*). — Sur un cas de discontinuité. (476-480, 1 pl.).

« Beaucoup de mathématiciens admettent tacitement, et quelques-uns l'énoncent en termes formels, que si, x variant d'une manière continue, $f(x)$ change subitement de valeur, cela implique toujours, pour la fonction dérivée $f'(x)$, une rupture de continuité, à savoir par le passage à l'infini; en conséquence, que $\int_a^b f'(x)dx$, regardé comme la valeur que prend $\Sigma f'(x)\Delta x$ lorsque x croît de a à b et que Δx tend indéfiniment vers zéro, pourrait être posé égal à $f(b)-f(a)$ aussi longtemps que $f'(x)$ reste fini.

« Un exemple propre à montrer que cela n'est pas vrai d'une manière absolument générale, et donnant d'ailleurs lieu à des remarques qui méritent quelque attention, est fourni par la discontinuité de

$$f(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$$

$\left(\text{comme cas particulier de } r^{-s^{\frac{1}{x}}}\right)$ pour $x = 0$. »

Tome XII; 1877.

Mees (*R.-A.*). — De l'influence du mouvement d'une source vibratoire sur l'intensité des vibrations émises. (1-16, 1 pl.).

Korteweg (*D.-J.*). — Sur la probabilité des divers résultats possibles d'une élection pour laquelle les votants de deux opinions différentes se partagent en sections par la voie du sort. (65-95).

« Lorqu'un certain nombre de personnes devant procéder à des votes ou à des nominations se partagent par la voie du sort en plusieurs sections de force numérique égale, sous la condition que chaque section émettra ensuite un seul vote ou effectuera une seule nomination, le résultat obtenu dépend en partie du hasard.

» Supposons qu'il y ait, en général, ks votants qui se répartissent en k sections, toutes également nombreuses, et que a voix appartiennent à la majorité, b à la minorité; la probabilité d'une répartition telle que dans m bureaux triomphe la majorité, dans n la minorité, sera alors une fonction de a, b, m, n, que nous représenterons dans la suite par

$$P^{a,b}_{m,n},$$

ou, lorsqu'il n'en pourra résulter aucun malentendu, par

$$P_{m,n}.$$

C'est cette fonction que nous allons chercher à déterminer. »

Baehr (*G.-F.-W.*). — Note sur le mouvement elliptique. (97-101, 1 pl.).

Schols (*Ch.-M.*). — La formule d'interpolation de Tchebychef suivant la méthode des moindres carrés. (102-112).

Démonstration directe des formules de Tchebychef, de laquelle, en outre, ressort la signification des grandeurs qui entrent dans ces formules.

Benthem (*A.*). — Théorie des nombres complexes et bicomplexes. (113-176).

Extrait d'un Mémoire publié sous le titre de *Theorie der functiën van veranderlijke complexe getallen* (*Nieuw Archief van het Wiskundige Genootschap*, t. I, II et III). Voir *Bulletin*, I_2, 12, 13, et III_2, 170.

Chap. I. *Les fonctions algébriques de nombres complexes constants*. § 1. Les formes

complexes ordinaires. § 2. Réduction des formes complexes. § 3. Autre forme des nombres complexes.

CHAP. II. *Les fonctions transcendantes.* § 4. Les fonctions exponentielles. § 5. Les fonctions logarithmiques.

CHAP. III. *Les fonctions bicomplexes.* § 6. Les fonctions bicomplexes.

CHAP. IV. *La polydromie des fonctions.* § 7. Cause de la polydromie. § 8. Fonctions algébriques monodromes. § 9. La fonction algébrique générale. § 10. Les fonctions exponentielles et logarithmiques. § 11. Les fonctions bicomplexes.

CHAP. V. *L'analyse des fonctions de nombres complexes.* § 12. Considérations générales. § 13. Les intégrales des fonctions monodromes. § 14. Les intégrales des fonctions polydromes.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur l'absorption de la lumière d'après la théorie de M. Maxwell. (177-188).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur le nombre relatif des chocs que subit une molécule, suivant qu'elle se meut au milieu de molécules en mouvement ou au milieu de molécules supposées en repos, et sur l'influence que les dimensions des molécules, dans la direction du mouvement relatif, exercent sur le nombre de ces chocs. (201-216).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur le nombre des chocs et la distance de choc moyenne dans les mélanges gazeux. (217-228).

Van Geer (*P.*). — Sur l'emploi des déterminants dans la méthode des moindres carrés. (229-240).

Korteweg (*D.-J.*). — Sur le calcul de la distance moyenne de choc des molécules gazeuses, dans le cas où l'on tient compte de toutes leurs dimensions. (241-253).

Korteweg (*D.-J.*). — Calcul de l'accroissement de tension qu'un gaz éprouve par suite du choc des molécules. (254-261).

Rink (*H.-J.*). — Sur la propagation du son. (262-284).

Van der Berg (*F.-J.*). — Sur les écarts de la ligne géodésique et des sections planes normales entre deux points rapprochés d'une surface courbe. (353-398, 1 pl.).

Van der Waals (*J.-D.*). — L'influence de la pression sur la température du maximum de densité de l'eau. (457-469).

Tome XIII; 1878.

Heringa (*P.-M.*). — Considérations sur les phénomènes capillaires. (1-34, 1 pl.).

Examen critique des théories de Laplace, de Gauss et de Poisson.

Michaelis (*G.-J.*). — Sur quelques cas de mouvement dans un fluide incompressible. (67-90).

Donders (*F.-C.*). — La détermination numérique du pouvoir de distinguer les couleurs. (91-98).

Donders (*F.-C.*). — Une lunette pancratique. (99-109).

L'auteur indique le moyen de construire une lunette avec laquelle on puisse obtenir, par le déplacement des lentilles entre certaines limites, tous les grossissements en une série continue.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Théorie de la lunette pancratique de M. Donders. (110-140).

§ 1. Problème de la lunette pancratique. Double solution, dont l'une seulement satisfait aux conditions posées. Cette solution donne encore des lunettes de deux constructions différentes. — § 2. Déplacement nécessaire de l'objectif ou de l'oculaire pour un déplacement fini de la lentille du milieu, celle-ci étant supposée positive. Distance focale de la lunette entière, si ce déplacement de l'objectif ou de l'oculaire n'a pas lieu. — § 3. Considérations sur le cas où, pour les deux limites du grossissement, la longueur de la lunette est supposée la même. — § 4. Solution du problème lorsqu'on emploie l'oculaire pour corriger la distance focale. — § 5. Solution du problème en employant l'objectif pour corriger la distance focale. — § 6. Limite supérieure de F. — § 7. Lunette pancratique à lentille du milieu négative. Solution du problème. Limite inférieure de f. — § 8. Limite supérieure de f. — § 9. Exemple de calcul. — § 10. L'épaisseur des lentilles. — § 11. Déduction plus simple des équations principales du problème. — § 12. Solution plus simple en négligeant le déplacement de l'objectif ou de l'oculaire. — § 13. Lieu des diaphragmes internes ou externes. — § 14. La lunette pancratique peut-elle être construite achromatiquement? — Appendice.

Bosscha (*J.*). — Sur des lunettes à grossissement variable. (141-148).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur la détermination des distances focales des lentilles à court foyer. (149-172).

Baehr (*G.-F.-W.*). — Note sur l'attraction. (197-212).

Van der Stok (*J.-P.*). — Sur les variations de la déclinaison

magnétique en Néerlande, déduites de vingt années d'observation au Helder. (213-246).

Bosscha (*J.*). — Sur l'intensité des courants électriques du téléphone de Graham Bell. (247-256).

Bierens de Haan (*D.*). — Notice sur les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x\cos^2 x} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x\cos^2 x},$$

où F est une fonction goniométrique. (389-417).

Tome XIV; 1879.

Onnen (*H.*). — Notes concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes. (1-75, 3 pl.).

1. Construction et calcul du rayon de courbure d'une ligne cycloïdale. — 2. L'équation essentielle proprement dite d'une ligne cycloïdale. — 3. Examen des cycloïdales décrites simultanément par les divers points du plan de la courbe génératrice, quand celle-ci touche la courbe directrice en un point donné. Cercle des points d'inflexion. Focale. — 4. Examen des cycloïdales décrites par les divers points d'une droite liée à la courbe génératrice. — 5. Anti-cycloïdales. Cycloïdales semblables, produites par deux courbes génératrices qui roulent sur la même directrice. — 6. La ligne génératrice ou la ligne directrice est un cercle ou une droite. — 7. Hypocycloïdes et épicycloïdes. — 8. Points d'inflexion et sommets des hypocycloïdes. — 9. Considérations géométriques. — 10. Considérations analytiques. — 11. Formes de passage fournies par les valeurs limites de $\frac{a}{b}$. — 12. Tableau des différentes formes des courbes cycloïdiques.

Rijke (*P.-L.*). — Sur le microphone. (76-96, 1 pl.).

Mees (*R.-A.*). — Sur la théorie du radiomètre. (97-129).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur une détermination simple de la fonction caractéristique. (130-142).

Il s'agit de la *fonction caractéristique* définie par Hamilton dans son célèbre Mémoire *On a general method in Dynamics*.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur l'orbite annuelle que les étoiles fixes semblent décrire au ciel par suite de l'aberration de la lumière. (143-154).

Bergsma (*P.-A.*). — L'influence des phases de la Lune sur la température de l'air à Batavia. (155-162).

Le résultat des observations semble indiquer : 1° que la température moyenne des vingt-quatre heures, la température moyenne des heures du jour (7^h avant midi et 5^h après midi) et l'oscillation diurne moyenne de la température sont plus fortes pendant la pleine lune et l'octant suivant que pendant les autres phases; 2° que, au contraire, la température moyenne des heures de la nuit (7^h après midi et 5^h avant midi) est plus basse lors des mêmes phases que lors des autres phases lunaires; 3° que cette double variation de la température de l'air, dépendante des phases de la Lune, laquelle variation doit être regardée comme un phénomène unique, ne peut être un effet direct de la chaleur rayonnée vers la Terre par la surface de la Lune, mais qu'elle est très probablement un résultat secondaire produit par une variation de la clarté du ciel, variation dépendante des phases lunaires.

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur le principe de la moindre action. (163-179).

Snellen (*M.*). — Sur le télémétéorographe d'Olland. (180-208).

Bierens de Haan (*D.*). — Note sur le nombre de fois qu'avec un nombre donné de dés on peut jeter une somme donnée et sur une application de cette règle. (370-392).

Seelheim (*F.*). — Les lois de la perméabilité du sol. (393-462).

Harting (*P.*). — Déterminations thermométriques faites dans un puits de 369^m de profondeur, à Utrecht. (463-480).

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI. In-4° (1).

Tome XXXI; 1877-1878.

Azzarelli (*M.*). — Exercices géométriques. (6-39).

1° Chercher les formules générales qui représentent les courbes dont la rectification dépend de l'arc d'une courbe donnée.

2° Chercher l'équation des courbes dont la rectification dépend de l'arc

$$ds = \frac{dz}{z}\sqrt{z^2 - a^2}.$$

3° Trouver l'équation des courbes dont la rectification dépend de l'arc

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{a}}\sqrt{a + z}.$$

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 102.

4° Trouver l'équation des courbes dont la rectification dépend de celle de la cycloïde ordinaire.

Ces courbes sont des épicycloïdes et des hypocycloïdes.

5° Trouver l'équation générale de toutes les lignes dont la rectification se réduit à dépendre d'une fonction qui représente l'ordonnée d'une hyperbole conique.

6° Trouver l'équation générale des courbes dont la rectification dépend de l'ordonnée d'une ellipse.

Ces courbes sont des épicycloïdes ou des hypocycloïdes.

7° Trouver l'équation générale des courbes dont la rectification dépend de l'arc de lemniscate ou d'intégrales elliptiques de première espèce.

La courbe est une lemniscate de Bernoulli, dont les coordonnées x et y sont permutées et dont l'axe est incliné par rapport à l'axe des abscisses.

8° Trouver les courbes dont la rectification dépend d'arcs d'ellipse ou d'intégrales elliptiques de seconde espèce.

9° Trouver les courbes dont la rectification dépend de celle d'une parabole conique.

Pepin (*Th.*). — Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances. (40-148).

La question qui fait l'objet des recherches du P. Pepin a déjà été traitée partiellement par Cauchy dans le *Bulletin de Férussac*, t. XII, et dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVII. L'auteur, en reprenant ces recherches à un point de vue plus général, démontre successivement :

1° Que les théorèmes de Jacobi sur les résidus cubiques ne sont que des cas particuliers de théorèmes plus généraux ; que pour tout ordre $n^{ième}$ de résidus, pourvu que le nombre n soit premier, on peut former, au moyen des facteurs complexes $R_{1,1}$ des nombres premiers $n\varpi + 1$, une fonction $\psi(p)$ qui jouit de propriétés analogues à celle que présente, pour les résidus cubiques, le rapport considéré par Jacobi :

$$\frac{L + 3\sqrt{-3}\,M}{L - 3\sqrt{-3}\,M};$$

2° Que les théorèmes énoncés par Cauchy, sur le même sujet, dans le *Bulletin de Férussac* sont susceptibles d'une démonstration plus générale que celle qu'a donnée le célèbre mathématicien.

Ferrari (*St.*). — Sur la relation entre les maxima et les minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. VIIIe Communication. (168-178).

Les cinq perturbations magnétiques de l'année 1874 coïncident avec les cinq accroissements des taches pendant la même année.

Ferrari (*St.*). — Annonce de la mort du P. Secchi. (246).

Foglini (*J.*). — Mémoire sur les invariants, covariants et contravariants des fonctions homogènes. (249-316).

Azzarelli (*M.*). — Équation de la ligne géodésique et applications. (327-341).

L'auteur, après avoir démontré les propriétés principales de la ligne géodésique, applique ses formules aux surfaces du second ordre.

Azzarelli (*M.*). — Note sur la résolution de l'équation du troisième degré. (355-366).

La méthode de M. Azzarelli consiste à augmenter les racines de l'équation d'une quantité h déterminée, de manière que le premier membre

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r$$

de l'équation soit transformable en la somme algébrique de deux cubes, cas auquel les solutions s'expriment facilement au moyen des trois racines cubiques imaginaires de l'unité.

Cette condition pouvant toujours être remplie, la méthode de M. Azzarelli conduit à une solution simple de l'équation.

Ferrari (*St.*). — Note sur la relation entre les maxima et les minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. (383-396).

Les perturbations coïncident avec le maximum d'activité solaire.

Pepin (*Th.*). — Note sur quelques équations biquadratiques et indéterminées. (397-427).

L'auteur se propose la résolution de quelques équations de la forme

$$Au^2 = Bx^4 + Cy^4,$$

où les coefficients A, B, C sont premiers entre eux deux à deux. Les exemples choisis montrent comment, dans certains cas, on peut déterminer toutes les solutions possibles de ces équations d'une manière implicite au moyen de formules qui permettent de les obtenir toutes successivement dans leur ordre croissant de grandeur.

Les équations particulières examinées par l'auteur sont les suivantes :

$$u^2 = 3y^4 - 2x,$$
$$8u^2 = 7y^4 + x^4,$$
$$5u^2 = 7x^4 - 2y^4.$$

De Rossi Re (*V.*). — Démonstration du cinquième postulatum d'Euclide. (461-473).

Tome XXXII; 1878-1879.

Ferrari (*G. St.*). — Note sur les protubérances et les taches solaires observées en 1877 à l'Observatoire du Collège Romain. (46-57).

Le nombre des protubérances et des taches est allé en diminuant d'une manière constante pendant l'année 1877. En même temps, ainsi que cela résulte des obser-

vations magnétiques de Prague et de Rome, l'amplitude des variations diurnes de la déclinaison a décru d'une manière régulière. Il y a donc corrélation directe entre les deux phénomènes.

Pepin (*Th.*). — Recherches sur quelques équations indéterminées du second et du quatrième degré. (79-128).

L'auteur a déjà communiqué à l'Académie des *Nuovi Lincei* des formules nouvelles pour réduire à un carré la valeur numérique d'un polynôme du quatrième degré, formules qui, il est vrai, ne résolvent qu'en partie le problème proposé, de trouver toutes les valeurs rationnelles de la variable x qui réduisent à un carré la valeur numérique d'un polynôme $\varphi(x)$ de la forme $a + ex^4$. Dans le Mémoire actuel il étend ses recherches au cas d'un polynôme de la forme $a + cx^2 + ex^4$.

Le problème revient alors à résoudre en nombres entiers une équation biquadratique

$$(1) \qquad ax^4 + 2bx^2y^2 + cy^4 = u^2.$$

Si l'un des coefficients extrêmes est un carré, on peut transformer le problème et, quelquefois, le résoudre complètement par la méthode connue de la décomposition en facteurs. Mais cette méthode n'est plus applicable quand aucun des coefficients extrêmes n'est un carré. On peut alors commencer par résoudre l'équation

$$(2) \qquad a\xi^2 + 2b\xi\zeta + c\zeta^2 = u^2.$$

Si la première équation est possible et qu'elle soit vérifiée lorsqu'on pose $x = p, y = q$, il est évident qu'on résoudra la seconde en portant $\xi^2 = p^2, \zeta^2 = q^2$. Ainsi, pour que l'équation (1) soit résoluble en nombres entiers, il est, avant tout, nécessaire que l'équation (2) admette des solutions en nombres entiers. Or, dans les cas où l'équation (2) est possible, on peut en exprimer toutes les solutions par des formules générales renfermant deux nombres arbitraires. La résolution de l'équation (1) se trouve par là ramenée à celle d'un système de deux équations du second degré

$$\mu x^2 = a' f^2 + b' fg + c' g^2,$$
$$\mu y^2 = a'' f^2 + b'' fg + c'' g^2,$$

dans lesquelles $a', b', c', a'', b'', c''$ sont des nombres entiers connus, f et g deux nombres arbitraires premiers entre eux, et μ le plus grand diviseur commun des deux seconds membres.

Le P. Pepin étudie alors les conditions de possibilité de l'équation (2), puis il recherche une solution particulière de l'équation (1); cette dernière étant obtenue, il montre comment elle peut servir à la détermination de l'ensemble des solutions.

Ce premier point étant acquis, l'auteur s'occupe alors de l'équation *biquadratique*

$$ax^4 + 2bx^2y^2 + cy^4 = z^2$$

qu'il résout d'une manière complète.

Ajoutons que chacune des théories générales de ce Mémoire est élucidée par l'application des formules à un exemple numérique particulier.

Ferrari (*G. St.*). — Note sur les observations de l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1879. (129-138).

Le P. Ferrari analyse les observations faites aux environs de Denver (territoire de Wyoming, Colorado) par les RR. PP. Sestini, Degni, etc., professeurs au Collège de Georgetown.

Les observateurs ont constaté l'existence de la bande de lumière diffractée qui parcourt le sol avant l'éclipse totale; ils ont vu également les grains de Baily. Enfin les Rév. Pères chargés des observations spectroscopiques ont constaté un renversement complet du spectre à l'instant de la totalité.

Foglini (*G.*). — Notice nécrologique du P. Dominique Chelini (152-165).

Le P. D. Chelini, des Écoles Pies, né à Gragnano (duché de Lucques) le 18 octobre 1802 et mort à Rome le 16 novembre 1878, a publié de nombreux Mémoires de Mécanique et de Géométrie.

La Notice du P. Foglini est accompagnée d'une bibliographie complète de ses œuvres.

Pepin (*Th.*). — Sur la réduction d'une formule biquadratique à un carré. (166-203).

Les problèmes résolus par le R. P. Pepin dans le Mémoire actuel sont les suivants :

1° *Trouver une substitution rationnelle*

$$x = \frac{\alpha\theta^n + \alpha_1\theta^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{\gamma\theta^n + \gamma_1\theta^{n-1} + \ldots + \gamma_n}$$

qui transforme en un carré un polynôme du quatrième degré $\varphi(x)$, *ou démontrer qu'il n'en existe pas.*

La solution n'est possible que si le polynôme $\varphi(x)$ a une racine double.

2° *Rendre rationnelle l'expression*

$$\sqrt{(a + 2bz + ez^2)(c' + 2b'z + c'z^2)}.$$

Ferrari (*G. St.*). — Maxima et minima des taches solaires et perturbations magnétiques extraordinaires en 1876. (225).

Les perturbations magnétiques ont principalement lieu quand des taches se forment sur le Soleil.

Ferrari (*G. St.*). — Note sur les protubérances et les taches solaires observées en 1878 à l'Observatoire du Collège Romain. (229-238).

Le nombre des protubérances, la surface du Soleil troublée par les taches et l'amplitude des variations diurnes de l'aiguille aimantée ont diminué d'une manière constante et la marche des trois phénomènes est parallèle.

Lais (*G.*). — Notes historiques sur l'Observatoire du Vatican. (239-248).

Grégoire XIII, à l'époque où il s'occupait, avec L. Lilio, I. Danti, etc., de la réforme du calendrier, avait fait construire au Vatican un petit observatoire renfermant un grand gnomon destiné à la détermination de la durée de l'année. Cet observatoire, abandonné en 1787, date de la fondation de l'Observatoire du Collège Romain, a été utilisé depuis pour quelques observations météorologiques.

Pepin (*Th.*). — Études sur quelques questions d'Arithmétique supérieure. (249).

1° *Résolution en nombres entiers d'un système d'équations du second degré.*

Le système d'équations

$$2v^2 = u^2 + t^2,$$
$$3w^2 = t^2 + 2u^2,$$

que le P. Pepin se propose de résoudre, a déjà été étudié par M. Lucas (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878); l'auteur en donne une solution plus générale et plus complète que celle des mathématiciens français.

2° *Sur une propriété des piles de boulets à base carrée.*

M. Lucas a démontré (*Nouvelles Annales*, t. XVII) que le nombre des boulets n'est égal à un carré que dans le cas où la pile contient 24 boulets sur le côté de la base. Suivant l'auteur, le théorème de M. Lucas est probablement vrai, mais sa démonstration n'est pas complète.

3° *Observations sur un Mémoire arithmologique de Krafft.*

Krafft a publié, dans le Tome III des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, un Mémoire sur la recherche des diviseurs des nombres, où l'on trouve un théorème attribué à Euler, qui donne lieu au problème suivant, dont le P. Pepin donne une solution complète.

4° *Trouver les valeurs entières de a et de m pour lesquelles l'expression*

$$a + 1 \pm \sqrt{2a - m}$$

devient un nombre rationnel et multiple de m.

Azzarelli (*M.*). — Exposition élémentaire de la quadrature des espaces curvilignes limités par des courbes du second ordre. (331-360).

La démonstration du professeur Azzarelli est fondée sur l'expression des quantités par des formules de la forme

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

formules qui conduisent au théorème de Moivre, à la sommation des sinus et cosinus d'arcs en progression arithmétique, etc. Les courbes du second ordre sont d'ailleurs considérées comme des projections coniques ou cylindriques d'un cercle.

G. R.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT, herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft, E. SCHOENFELD und A. WINNECKE. — Leipzig, in-8° (1).

Tome XIV; 1879.

Auwers (A.). — Corrections au Catalogue des étoiles fondamentales adoptées par la Commission des zones. (2-3).

Ces conclusions sont relatives aux ascensions droites de neuf étoiles du Catalogue publié dans le Tome XIII des *Vierteljahrsschrift*.

NOTICE nécrologique sur Friedrich Emil von Asten, par H. R. (3-10).

Von Asten, né à Cologne le 26 janvier 1842, est mort à Poulkova le 15 août 1878. Élève d'Argelander à l'Université de Bonn de 1862 à 1865, il était devenu calculateur à Poulkova en 1870. Von Asten a publié un grand nombre de Mémoires, dont les principaux sont relatifs au mouvement de la comète d'Encke, de la comète périodique de Tempel, des satellites d'Uranus.

NOTICE nécrologique sur Wilhelm Engelmann.

W. Engelmann, né à Lemgo le 1er août 1808, est mort à Leipzig le 23 décembre 1878. C'était le grand imprimeur scientifique de Leipzig.

CATALOGUE des publications reçues par la Société astronomique. (15-21).

* *Schiaparelli (G.-V.)*. — *Osservazioni....* Observations astronomiques et physiques sur l'axe de rotation et la topographie de la planète Mars. Rome, 1878; in-4°, 136 pages et 5 planches. (22-40). [O. Struve].

* *Gerhardt (C.-G.-J.)*. — *Geschichte....* Histoire des Mathématiques en Allemagne. Munich, 1877; XII et 307 pages. (40-48). [S. Günther].

* *Riel (C.)*. — *Der Thierkreis....* Le Zodiaque de Dendera et la durée de l'année. Leipzig, 1878; in-4°, 100 pages et une planche lithographique. (49-52). [S. Günther].

---

(1) Voir *Bulletin*, III$_1$, 36. Les articles marqués d'un astérisque sont des analyses bibliographiques.

* *Lamp* (*E.*). — *Der scheinbare Ort*.... La position apparente de l'étoile polaire. Kiel, 1874; in-8°, 67 pages. (52-59). [Kr.].

* *Bazley* (*Th.-S.*). — *The stars*.... Les étoiles dans leur course, double série de Cartes avec un Catalogue, propres à identifier, à toute époque de l'année, toutes les étoiles au-dessus de la 5ᵉ-6ᵉ grandeur renfermées dans l'Atlas de Heiss et facilement visibles à la latitude de l'Angleterre. Londres, 1878; 46 pages et 24 Cartes in-folio. (59-66). [Sch.].

* *Oppolzer* (*Th. v.*). — *Entwickelung*.... Développement du quotient différentiel de l'anomalie vraie et du rayon vecteur suivant les puissances de l'excentricité dans le cas des orbites voisines de la parabole; 8 pages in-8°. Extrait des procès-verbaux de l'Académie de Vienne pour novembre 1878. (66-68). [Sch.].

* *Günther* (*S.*). — *Studien zur Geschichte*.... Études sur l'histoire de la Géographie mathématique et physique. Halle, 1877-1878; in-8°, 331 pages. (68-79). [A. Wittstein].

Nyrén (*M.*). — *Ueber die*.... Note sur la cosmogonie d'E. Swedenborg, considérée au point de vue de l'histoire de l'hypothèse nébulaire de Kant et de Laplace. (80-91).

Les *Principia rerum naturalium sive novorum tentaminum phænomena mundi elementaris philosophice explicandi* (Leipzig, 1734, 3 vol. in-folio) de Swedenborg renferment plusieurs Chapitres, entre autres le troisième : *De chao universali Solis et planetarum, deque separatione ejus in planetas et satellites*, où il montre qu'il était arrivé à une cosmogonie voisine de celle de Laplace par l'hypothèse d'une matière cosmique diffuse dans laquelle des forces internes devaient produire des tourbillons ramenant les corps à leur plus petit volume possible.

Bruhns. — Catalogue des petites planètes et comètes découvertes en 1878. (93-97).

Les planètes découvertes sont au nombre de 12, de (180) à (191); leur éclat est variable de la 10ᵉ à la 12ᵉ grandeur.

Les comètes observées sont au nombre de trois :

Comète 1878, I, découverte par M. Swift le 6 juillet.

Comète 1878, II, découverte le 3 août par M. Tebbutt et le 7 août par M. Gould.

Comète 1878, III, (comète de Tempel, 1873, II) retrouvée le 19 juillet par M. Tempel.

Notice nécrologique sur V.-S.-M. van der Willigen, par H.-G. van de Sande Bakhuyzen. (98-106).

Van der Willigen, né le 9 mai 1822 à Rockanje (île de Voorne), est mort à Leyde le 19 février 1878; il était connu des astronomes pour ses travaux sur l'aberration de la lumière, la constante de la réfraction, la mesure des longueurs d'onde du spectre solaire et la détermination de l'indice de réfraction d'un très grand nombre de corps.

Compte rendu annuel des travaux des principaux observatoires (année 1878). (111-185).

A la suite des Notes sur le même sujet que nous avons publiées dans le Tome III (2e série) du *Bulletin*, nous donnons ici un résumé rapide des Communications faites à la Société astronomique par les directeurs des principaux Observatoires sur les travaux de l'année 1877-1878.

Basle (Ed. Hagenbach.). — L'Université ayant reçu en 1860 un legs de 60000fr pour la création d'un Observatoire, les constructions ont commencé en 1874 et sont aujourd'hui terminées. L'établissement renferme :

1° Un équatorial de 109mm d'ouverture libre, construit par la Société Genevoise pour la construction d'instruments de Physique, avec un objectif de Merz;

2° Un petit instrument méridien de 67mm d'ouverture;

3° Une pendule de Kloblich de Hambourg. (111-113).

Berlin (Förster.). — On a fait à Berlin de nombreuses observations méridiennes des 521 étoiles de Bradley; leur Catalogue sera prochainement publié par les soins de M. Auwers. A l'équatorial de 9 pouces, il a été déterminé 111 positions de petites planètes; à ce même instrument on a adapté un nouveau micromètre, de l'invention de M. Knorre, destiné à enregistrer rapidement la différence de déclinaison de deux étoiles.

Berlin. — Berliner Jahrbuch (T. Tietjen). — Le *Jahrbuch* pour 1880 a été publié; il contient les éphémérides pour 1879 des 539 étoiles fondamentales de la Société astronomique et 62 éphémérides de petites planètes.

Bonn (Schoenfeld.). — Le travail des zones a été continué activement, mais le temps a été très défavorable; les réductions sont aussi activement poussées.

Breslau (J.-C. Galle.). — L'Observatoire est surtout un établissement météorologique. M. Galle s'est occupé de la publication d'un Mémoire sur le climat de Breslau d'après les observations faites depuis 1791. (122-125).

Bruxelles (J.-C. Houzeau.). — Les observations relatives à l'étude des 10000 étoiles choisies par M. E. Quetelet ont été terminées et les réductions sont poussées avec la plus grande activité; M. de Mailly fait espérer la publication prochaine du Catalogue. Le cercle de Troughton a été pourvu d'un bain de mercure pour la détermination du nadir; un bain de mercure est également adapté à la lunette méridienne de Gambey pour l'étude des variations de l'inclinaison.

Les instruments méridiens sont actuellement employés à des observations de α et δ Petite Ourse, en vue d'une détermination nouvelle de la latitude, et à des observations des étoiles de la Lune.

Aux équatoriaux, on a observé les éclipses des satellites de Jupiter et leurs passages sur le disque de la planète.

Les *Annales* de l'Observatoire ont été divisées en deux Parties, et les Tomes I et II de la Partie astronomique sont publiés. Le Tome I renferme une *Uranométrie générale;* le Tome II, les observations méridiennes des années 1873, 1874 et 1875. (125-131).

Cincinnati (O. Stone.). — Il a été fait en 1878, par MM. Stone et Howe, environ 500 observations d'étoiles doubles. On a en outre observé les taches du Soleil, le passage de Mercure du 6 mai 1878 et l'éclipse du 29 juillet de la même année. (132-133).

Düsseldorf (R. Luther.). — Il a été fait des observations de 23 petites planètes. (133-134).

Francfort-sur-le-Mein (Epstein.). — Observations de jaugeage du ciel. (134-136).

Gotha (A. Krueger.). — Les observations de la zone entre 55° et 65° de déclinaison nord ont été poussées aussi activement que le temps l'a permis. Les Tables auxiliaires pour la réduction à 1875,0 sont calculées et un grand nombre de réductions déjà effectuées. (136-137).

Hambourg (G. Rümker.). — Observations méridiennes pour le service de l'étude des chronomètres; observations de nébuleuses. Le ciel a été très mauvais toute l'année. (137-139).

Kremsmünster (G. Strasser.). — Observations méridiennes ou équatoriales des grosses et des petites planètes. (140-141).

Leipzig (Bruhns.). — Une série d'observations méridiennes a été entreprise pour l'étude des variations de l'équation personnelle dans l'observation des passages des étoiles brillantes ou faibles. On a également déterminé la position des étoiles employées par M. Gill pour la détermination de la parallaxe de Mars. Enfin il a été fait des observations méridiennes des petites planètes.

A l'équatorial, le Dr Peter a observé 51 petites planètes et déterminé 181 de leurs positions. On a aussi suivi, au même instrument, les comètes de Tempel et celle de Swift.

Les observations météorologiques ont été continuées.

Le Dr Weinek a poursuivi la discussion des observations photographiques du passage de Vénus en 1874. (141-147).

Lund (A. Möller). — A l'équatorial, on a observé des étoiles doubles et fait plus de 1500 observations spectroscopiques d'étoiles. Au cercle méridien on a continué les observations de la zone de + 35° à + 40°. (147-148).

Mannheim (W. Valentiner.). — A l'équatorial, on a étudié les deux amas d'étoiles G. C. 4410 et G. C. 1166. Dans le premier, on a déterminé la position de 71 étoiles; dans le second, celle de 36 étoiles. (148-150).

Milan (Schiaparelli.). — M. Schiaparelli a continué les mesures d'étoiles doubles à l'équatorial de Merz et complété ses dessins de Mars. Le professeur Celoria a réduit les observations de passages faites en 1871 et 1872, et celles des différences de longitudes faites en 1875.

Le gouvernement italien a accordé les fonds nécessaires pour la construction d'un

équatorial de 18 pouces français d'ouverture. L'objectif a été acquis chez Merz et la monture doit être faite à Hambourg par Repsold. (150-151).

Moscou (Th. Bredikhine.). — Observations spectrales du Soleil, observations photométriques des étoiles. Le professeur Bredikhine a continué ses études sur la chevelure des comètes. (151-153).

New-York (H. Draper.). — Le Dr Draper a continué ses photographies du spectre solaire, dans le but de confirmer l'existence de l'oxygène dans cet astre. En outre, il a obtenu de nombreuses photographies du passage de Mercure en mai 1878 et de l'éclipse de Soleil de juillet. (153-154).

Potsdam (Förster, Auwers et Kirchhoff.). — Le professeur Spoerer et le Dr Kempf ont observé les taches solaires dont la latitude paraît augmenter et les protubérances. Le Dr Vogel et le Dr Müller ont fait de nombreuses photographies du spectre solaire entre F et G; le Dr Vogel a aussi observé le spectre de l'étoile nouvelle du Cygne. Le Dr Lohse a dessiné et étudié la surface de Jupiter et de Saturne à l'aide d'un équatorial de $7\frac{1}{2}$ pieds; il s'est aussi occupé d'expériences photographiques. Le Dr Müller a mesuré avec le photomètre de Zöllner l'éclat de diverses planètes et de quelques étoiles variables.

L'Observatoire a commencé la série de ses publications, qui comprennent déjà : I. Observations de taches solaires, faites de 1871 à 1873 par le professeur Spörer; II. Observations et recherches sur la constitution physique de Jupiter, par le Dr Lohse; III. Recherches sur le spectre solaire, par le professeur Vogel. (154-162).

Stockholm (H. Gyldén). — L'étude des divisions du cercle méridien a été terminée et a prouvé que son exactitude était comparable à celle des cercles de Königsberg, Helsingfors, Dorpat et Poulkova. M. Gyldén s'est occupé d'observations sur la parallaxe des étoiles à mouvement propre rapide. (162-167).

Strasbourg (A. Winnecke.). — Les observations au chercheur de 6 pouces ont eu pour but la détermination de nébuleuses, l'observation des étoiles variables, des comètes et de quelques petites planètes. A la lunette méridienne de Cauchoix, on a observé la Lune et ses étoiles. L'héliomètre a été employé à la mesure des diamètres du Soleil, de Mars et de Vénus.

Les constructions du nouvel Observatoire ont été activement poussées; le plus grand nombre des bâtiments est terminé. La salle méridienne est, en particulier, complètement achevée. (167-171).

Vienne (E. Weiss.). — Les constructions du nouvel Observatoire ont été continuées et l'installation des instruments entreprise. Au cercle méridien de l'ancien Observatoire, on a déterminé la position des étoiles fondamentales de la zone de $+15°$ à $+18°$, que l'Observatoire s'est chargé d'observer; il a encore été fait au même instrument d'assez nombreuses observations de petites planètes. A l'équatorial de 6 pouces, on a observé des planètes et des comètes. Le vingt-septième Volume des *Annales* de l'Observatoire de Vienne a été publié. (171-172).

Wilhelmshaven (C. Borgen.). — L'Observatoire a été fondé en 1874, dans le but principal de donner l'heure et de régler les chronomètres de la marine. Ses principaux instruments sont : un cercle méridien de Repsold de $120^{mm},03$ d'ouverture, dont les cercles sont divisés de 5′ en 5′ et munis de quatre microscopes; un petit équatorial de $3\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture, des appareils magnétiques, de nombreuses pendules et une étuve pour l'épreuve des chronomètres.

La position géographique de l'Observatoire est :

Longitude est de Greenwich........	$0^h 32^m 35^s,2$
Latitude nord.	$53°31'51'',8$

Les travaux de l'Observatoire ont pour but l'Astronomie nautique. (173-179).

Zurich (R. Wolf.). — Les observations des taches solaires ont été continuées ; l'année 1878 paraît devoir être celle du minimum. (179-185).

* Annales de l'Observatoire de Paris, t. XI. Paris, 1876. (184-202). [H. Gyldén].

Communication de la Commission des zones. (206-207). [A. Auwers].

La Note de M. Auwers est relative à quelques erreurs qui s'étaient glissées dans l'impression des instructions sur la réduction des observations.

* *Lohrmann* (*W.-G.*). — *Mondcharte*.... Carte de la Lune en 25 planches et deux feuilles d'assemblage, avec des éclaircissements et des mesures de la position des points, publiée sous la direction de M. J.-F.-J. Schmidt. Leipzig, 1878 ; planches in-4°, 49 pages de texte.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — *Charte der Gebirge*.... Carte des montagnes de la Lune d'après des observations faites de 1840 à 1874, publiée aux frais du gouvernement prussien. 25 Cartes in-folio, 304 pages de texte gr. in-4°. Berlin, 1878. (208-266). [Engelmann].

* *Fritz* (*H.*). — *Die Beziehungen* ... Rapport des taches solaires avec les périodes magnétiques et météorologiques de la Terre. Mémoire couronné par la Société des Sciences de Harlem. In-4°, 3 planches. Harlem, 1878. (266-285). [F. Deichmüller].

* *Asten* (*E. v.*). — *Untersuchungen*.... Recherches sur la théorie de la comète d'Encke (deuxième Partie). Résultats des apparitions de 1819 à 1875. Extrait du Tome XXVI de la 7e série des Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg. Saint-Pétersbourg, 1878. (285-314). [Sch.].

Société Astronomique. — Compte rendu de la réunion tenue par la Société Astronomique, à Berlin, du 5 au 8 septembre 1879. (317-435).

Dans la dernière année, 35 membres nouveaux ont été admis; le nombr membres de la Société est donc de 283.

Deux nouveaux fascicules grand in-4° ont été publiés; ils renferment : XIV. wers : Catalogue fondamental pour l'observation des zones du ciel nord. X Hartwig : Recherches sur les diamètres de Vénus et de Mars d'après les observ faites à l'héliomètre de l'Université de Strasbourg.

Parmi les Communications faites à la Société dans ses diverses séances, i mentionner les lectures suivantes.

I. *Bruhns.* — Note sur les calculs des orbites des comètes à courtes révolu Les recherches sur la comète d'Encke entreprises par M. v. Asten seront tinuées par le professeur Backlund, qui doit calculer les perturbations par l thode de Gyldén. Aucun travail n'a été entrepris sur la comète de Biela depu verse d'étoiles filantes du 27 novembre 1872. M. A. Möller s'occupe de la c de Faye et a déjà donné son éphéméride pour 1880. Le professeur Schulze co ses calculs sur la comète de Brorsen. Les comètes de D'Arrest et de Winneck le sujet des travaux de MM. Leveau et Oppolzer. M. R. Gautier s'occupe de l mète de Tempel de 1867. La seconde comète périodique de Tempel est le suj calculs de M. Schulhof. M. Stone s'occupe de la comète périodique de Tuttle.

II. *Winnecke.* — Description de l'Observatoire de l'Université de Strasbourg.

L'Observatoire de Strasbourg doit posséder les instruments suivants :

Cercle méridien de 162^{mm} d'ouverture et de 1^{m},090 de distance focale. L'i ment se construit chez Repsold.

Altazimut de 136^{mm} d'ouverture et de 1^{m},050 de distance focale. La constr de cet appareil, sorte d'instrument de passage universel, a également été con Repsold.

Un équatorial avec objectif de 487^{mm} d'ouverture libre et 7^{m},0 de distan cale. L'objectif a été acquis de Merz; la monture est commandée à Repsold.

Un chercheur de 163^{mm} d'ouverture de 6^{m},060 de distance focale.

Les bâtiments doivent se composer :

D'une maison spacieuse pour le logement du directeur ;

D'un bâtiment spécial pour le grand équatorial, dont la coupole, qui ne pè moins de 34000^{kg}, doit tourner par suite de l'action d'un système de poids que servateur manœuvrera à l'aide d'un électro-aimant.

D'un second bâtiment astronomique renfermant deux salles méridiennes, do disposition est imitée de celle de Poulkova, et deux tours pour le petit équator l'altazimut.

L'ensemble de l'Observatoire est situé dans un vaste terrain découvert, au des glacis de la citadelle; cette partie du périmètre de Strasbourg étant sillo d'un très grand nombre de canaux, tous les bâtiments ont dû être surélevés d à 8^{m} au-dessus du sol.

III. *Auwers.* — État d'avancement du travail des zones.

Ainsi que cela résulte des Notes suivantes, les trois quarts du travail environ faits.

Poulkova. — Le Catalogue des étoiles fondamentales est terminé; il ne reste plus y faire quelques corrections relatives à la position de l'équinoxe. (A. Wagner).

Kazan. — Zone de 80° à 75°. Les observations des deux degrés de 78° à 80° sont e rement réduites et prêtes pour l'impression. Pour les étoiles des autres point la zone, les réductions sont très avancées. (P. Poretzki).

Dorpat. — Zone de 75° à 70°. La révision est commencée; il reste 920 étoiles à observer. La publication commencera dans le courant de l'année. (L. Schwarz).

Christiania. — Zone de 70° à 65°. Le nombre des étoiles observées est de 9523. Quelques points spéciaux des réductions demandent à être examinés. (C. Fearnley).

Gotha. — Zone de 65° à 55°. Les observations sont complètement terminées, ainsi que leur réduction à 1875,0. Les astronomes observent à nouveau quelques étoiles dont la position est douteuse. (A. Krueger).

Cambridge (*U.-S.*). — Zone de 55° à 50°. Les observations sont complètement terminées. 19900 étoiles ont été observées au moins deux fois de novembre 1870 à janvier 1879. Les réductions sont poussées activement et les constantes ont été toutes préparées. (E.-C. Pickering).

Bonn. — Zone de 50° à 40°. 4800 étoiles ont été observées. (F. Deichmüller).

Lund. — Zone de 40° à 35°. Les étoiles à observer sont au nombre de 11000 environ; 3000 ont été observées dans la dernière année. Les réductions sont faites au fur et à mesure. (N.-C. Dunér).

Cambridge (Angl.). — Zone de 30° à 25°. Sur les 10299 étoiles de cette zone, 1480 n'ont point encore été observées, 1653 ont été observées une fois et toutes les autres au moins deux fois. Une grande partie des réductions sont déjà faites. (J.-C. Adams).

Leipzig. — Zone de 15° à 5°. La partie de la zone comprise entre 10° et 15° est complètement observée et réduite. L'observation de la seconde partie de la zone est activement poussée. (C. Bruhns).

Albany. — Zone de 5° à 1°. La zone contient environ 7500 étoiles. Les observations ont commencé en août 1878 et déjà on a fait 3760 observations. (L. Boss).

IV. *Schröder.* — Note sur les indices de réfraction de quelques verres employés à la construction des objectifs.

V. *Callandreau.* — Sur le choix de la fonction du temps qui doit figurer sous les signes sinus et cosinus dans les expressions des perturbations.

VI. *Huggins.* — Note sur le spectre photographique des étoiles.

En employant un télescope de 18 pouces anglais de diamètre des prismes de spath et des lentilles de quartz, M. Huggins est parvenu à obtenir des photographies de spectres qui montrent plusieurs lignes entre H' et H" et s'étendent jusqu'à R.

Le point le plus intéressant est relatif à la manière d'être des lignes H' et H" dans le spectre des étoiles blanches, comme α de la Lyre. Dans le spectre solaire, H' et H" sont deux lignes fortes. Dans le cas de α Lyre, H' est une ligne forte, tandis que H" est très faible; il en est de même dans les autres étoiles blanches. Dans les étoiles blanches, on retrouve aussi *h* de l'hydrogène.

VII. *H. G. v. d. Sande Bakhuyzen.* — Recherches sur les variations de l'équation personnelle dans les observations de passage avec l'intensité lumineuse des étoiles.

Les observations ont été faites à l'instrument méridien de Leyde, à l'aide d'un diaphragme qui se plaçait sur l'objectif pendant le passage de l'étoile dans la seconde partie du champ et réduisait ainsi son éclat environ de moitié. Les observations de M. v. d. Sande Bakhuyzen démontrent que, pour lui et pour ses deux aides, lorsque l'éclat de l'étoile est réduit de 5,4 à 2,5 :

1° Les variations de l'équation personnelle sont presque égales;

2° Que ces variations sont de même sens dans la méthode de l'enregistrement électrique et dans la méthode de l'œil et de l'oreille;

3° Que dans le cas de l'œil et de l'oreille les variations absolues sont plus grandes que dans la méthode d'enregistrement.

G. R.

GIORNALE DI MATEMATICHE AD USO DEGLI STUDENTI DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI ([1]).

Tome XVI; 1878.

Garbieri (*G.*). — Nouveau théorème algébrique et son application à l'étude des courbes rationnelles. (1-17, 108-147).

Si l'on pose

$$f_r(x) = a_{n,r}x^n + a_{n-1,r}x^{n-1} + \ldots + a_{1,r}x + a_{0,r},$$
$$\varphi(x) = a_m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

où m est supposé $\leqq n$, si l'on représente par $[a]$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{m,1} & a_{m+1,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{m,2} & a_{m+1,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{0,m} & a_{1,m} & a_{2,m} & \ldots & a_{m,m} & a_{m+1,m} & \ldots & a_{n,m} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{m+1} & a_m & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{2m-n} & a_{2m-n+1} & \ldots & a_m \end{vmatrix}$$

et par $\Delta(y_0, y_1, \ldots, y_h)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_0 & y_1 & \ldots & y_h \\ y_0^2 & y_1^2 & \ldots & y_h^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0^h & y_1^h & \ldots & y_h^h \end{vmatrix},$$

on a

$$\Sigma \pm f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)\ldots f_m(\alpha_m) = \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{a_m^{n-m+1}}[a].$$

L'auteur déduit de ce théorème nouveau plusieurs formules déjà connues en faisant des hypothèses particulières.

([1]) Voir *Bulletin*, II_2, 197.

Pareillement, si l'on a la fonction birationnelle $F(xy)$ du même degré par rapport à x et à y, de façon que, en écrivant

$$F(xy) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \ldots + f_n(x)y^n,$$

les f_k soient des fonctions de x du degré n, et en posant

$$\varphi(x) = a_m(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$
$$\psi(x) = b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,$$

$$[a,b] = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \ldots & a_{m,0} & a_{m+1,0} & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n,0} & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{m,1} & a_{m+1,1} & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n,1} & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{0,m} & a_{1,m} & \ldots & a_{m,m} & a_{m+1,m} & \ldots & a_{n-1,m} & a_{n,m} & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_{2m-n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{0,n} & a_{1,n} & \ldots & a_{m,n} & a_{m+1,n} & \ldots & a_{n-1,n} & a_{n,n} & 0 & 0 & \ldots & b_m \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{m-1} & a_m & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

on trouve la relation

$$\Sigma \pm F(\alpha_1\beta_1)F(\alpha_2\beta_2)\ldots F(\alpha_m\beta_m) = (-1)^{n+m+1}\frac{\Delta(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)}{a_m^{n-m+1}}\,\frac{\Delta(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)}{b_m^{n-m+1}}[ab].$$

De ces théorèmes l'auteur se sert pour démontrer plusieurs propriétés des courbes rationnelles, et plus particulièrement des cubiques planes et gauches.

D'Arcais (*Fr.*). — Sur les systèmes de coordonnées. (18-25).

Lorsque l'on passe des coordonnées homogènes aux coordonnées cartésiennes et plückériennes, on suppose qu'une des droites ou un des plans fondamentaux s'éloigne indéfiniment; c'est à cause de cela que les formules en coordonnées cartésiennes et plückériennes ne sont pas en parfaite corrélation. Mais si, au contraire, on suppose, lorsqu'il s'agit des coordonnées d'un point, qu'une droite ou un plan fondamental aille à distance infinie, et que, lorsqu'il s'agit des coordonnées d'une droite ou d'un plan, ce soit un point fondamental qui va à l'infini dans une direction déterminée, on obtient pour la droite et le plan des coordonnées non homogènes différentes de celles de Plücker, mais qui sont en parfaite corrélation avec celles de Descartes. Ces coordonnées ont été indiquées par M. Casorati. L'auteur de cette Note continue les études de M. Casorati en en faisant quelques applications.

Zanotti Bianco (*O.*). — Sur deux passages de l'histoire de la théorie mathématique des probabilités par M. Todhunter. (26-30).

Capelli (*A.*). — Sur l'isomorphisme des groupes de substitutions. (32-87).

Voici les titres des paragraphes : I. Propriétés fondamentales. — II. Applications à la permutabilité des substitutions. — III. Construction des groupes isomorphes à un groupe donné. — IV. Nouveau théorème relatif à un groupe quelconque de substitutions; on en déduit comme corollaire le théorème de Cauchy : « Un groupe dont l'ordre est divisible par un nombre premier p contient au moins une substitution d'ordre p. » — V. Si p^α est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre d'un groupe G, il n'y a qu'un groupe P et d'autres semblables à lui qui soient de l'ordre p^α et contenus dans G. — VI. Analyse des groupes qui ont pour ordre une puissance d'un nombre premier. — VII. Étude de la mériédrie. — VIII. Le théorème des facteurs de composition établi par de simples considérations de mériédrie.

Tirelli (*F.*). — Solution d'une question sur les nombres fractionnaires. (88-90).

Décomposition d'une fraction dans la somme de plusieurs fractions qui ont des signes et des dénominateurs donnés.

Fuortes (*T.*). — Recherches géométriques sur certaines propriétés des systèmes de droites dans un plan et des systèmes de cercles qui passent par un point sur le plan ou sur la sphère. (91-106).

Minozzi (*A.*). — Sur un déterminant. (148-151).

Développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Torelli (*G.*). — Sur certaines propriétés numériques. (152-167).

Nécrologie du professeur Angelo Armenante.

Zanotti Bianco (*O.*). — Sur un problème de la théorie des probabilités. (169-173).

L'auteur relève l'inexactitude de la solution donnée par M. Laurent, dans son *Traité du Calcul des probabilités*, du problème suivant : « On a n boules dans une urne, on demande la probabilité qu'en en prenant un certain nombre au hasard ce nombre soit pair ou impair. »

Moreno (*G.*). — Démonstration d'un théorème d'Eisenstein. (174-176).

Démonstration du théorème : « Si m est un nombre quelconque et n un nombre entier et positif, entre le coefficient $A_{n,m}$ de x^n dans le développement de

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m$$

et les coefficients $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,n}$ de la même puissance de x dans l

puissances de $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ a lieu la relation

$$\begin{aligned} A_{n\,m} = {} & (m)_n A_{n,n} - (m)_{n-1}(m-n)_1 A_{n,n-1} + (m)_{n-2}(m-n+1)_2 A_{n,n-2} - \ldots \\ & + (-1)^{n-1}(m)_1 (m-2)_{n-1} A_{n,1}. \end{aligned}$$

Gebbia (*M.*). — Sur la stabilité virtuelle de l'équilibre d'un point matériel isolé. (177-197).

Rubini (*R.*). — Formules de transformation dans la théorie des déterminants. (198-208).

Lemoyne (*G.*). — Sur la moyenne géométrique des valeurs des fonctions d'une variable réelle. (209-216).

La moyenne géométrique ω des valeurs d'une fonction $f(x)$ dans l'intervalle entre a et b est donnée par l'équation

$$\omega = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx}.$$

Le but de cette Note est de montrer que cette valeur est toujours moindre que la moyenne arithmétique donnée par l'équation

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Capelli (*A.*). — Sur un point de la théorie des formes binaires. (217-224).

Clebsch, dans sa *Theorie der binären algebraischen Formen*, a donné un moyen pour construire les invariants et covariants d'une forme binaire en fonction des coefficients lorsqu'ils sont exprimés en fonction des racines. L'auteur de cette Note démontre que la méthode de Clebsch peut s'appliquer même si les racines se présentent dans les formes invariantives à un degré supérieur au premier, et en même temps il détermine la valeur de certains coefficients numériques qui se présentent dans la théorie de Clebsch.

Pittarelli (*G.*). — Note sur les *Ueberschiebungen* des formes binaires. (225-233).

L'auteur détermine le résultat de l'*Ueberschiebung* d'une somme de h formes sur une somme de k formes.

Garbieri (*G.*). — Nouvelle manière de sommer directement les fractions continues périodiques, par S. Günther. (234-242).

Traduction d'un Mémoire qui a paru dans le Tome XXII du *Zeitschrift für Math. und Physik* de Schlömilch.

Torelli (*G.*). — Sur la réforme de l'enseignement géométrique. Note de W. Fiedler. (243-255).

Traduction d'une Note publiée dans les *Vierteljahrssch. der Zürcher Naturforsch. Gesellschaft*, t. XXII, avec trois Lettres inédites de M. Fiedler.

Battaglini (*G.*). — Sur l'affinité circulaire non euclidienne. (256-262).

Möbius a appelé *affinité circulaire* (*Kreisverwandschaft*) la relation qu'on établit entre deux plans lorsque, en supposant les points du premier représentés par la variable complexe z et les points du second par la variable complexe ζ, on prend comme correspondants les points liés par la relation

$$az\zeta + bz + c\zeta + d = 0,$$

parce qu'alors aux points d'un cercle du premier plan correspondent les points d'un cercle du second et réciproquement. M. Battaglini, en partant de la définition du cercle dans la Géométrie non euclidienne, donne les formules de transformation entre deux plans lorsque, en supposant qu'à chaque point du premier corresponde un point du second et *vice versa*, aux coniques bitangentes à l'absolu dans un plan correspondent des coniques bitangentes à l'absolu dans l'autre.

Bianchi (*L.*). — Sur les transformations univoques dans le plan et dans l'espace. (263-266).

Après avoir exposé une méthode générale pour obtenir une infinité de systèmes plans homaloïdes de courbes d'ordre quelconque, l'auteur démontre le théorème suivant : « Les transformations univoques entre deux espaces pour lesquels à une étoile déterminée de l'un correspond une étoile déterminée de l'autre sont celles dans lesquelles le système homaloïde de chaque espace est formé de surfaces de l'ordre m, lesquelles ont en commun un point $(m-1)^{\text{uple}}$ et une courbe fondamentale simple de l'ordre $m(m-1)$, qui passe $(m-1)(m-2)$ fois par le point $(m-1)^{\text{uple}}$.

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation d'une classe de surfaces. (267-269).

Si nous considérons une surface engendrée par un mouvement analogue à celui avec lequel on pourrait engendrer une surface cylindrique au moyen d'une de ses sections droites, en substituant à la directrice rectiligne une courbe C située dans un plan normal à celui de la génératrice C'; si $y = \text{U}$, $y = \text{V}$ sont les équations des courbes C et C', l'expression de l'élément linéaire de la surface en prenant les courbes C et C' pour lignes coordonnées est donnée par l'équation

$$ds^2 = du^2 + 2\,\text{U}'\text{V}'\,du\,dv + dv^2,$$

de façon que, si l'on déforme les lignes C et C' de manière que le produit U'V' ne change pas, on obtient une série de surfaces différentes qui sont applicables l'une sur l'autre.

Mugnaini (*E.*). — Sur la sphère osculatrice à l'ellipsoïde de révolution. (270-278).

Dainelli (*U.*). — Relation entre l'aire et le périmètre, entre le

volume et la surface, entre les moments, entre les coordonnées des centres de gravité pour les espaces limités par lignes et surfaces qui ont les lignes et les surfaces équidistantes de la même nature. (279-297).

Frattini (*G.*). — Un cas particulier du théorème des neuf points de Feuerbach et sa généralisation dans la Géométrie non euclidienne. (298-304).

Maglioli (*F.*). — Sur la théorie des surfaces de second ordre homofocales au point de vue de la Géométrie synthétique. (305-340).

Propriétés des faisceaux de surfaces du second ordre. — Théorèmes sur les séries de surfaces de second ordre (par *série* l'auteur entend toutes les surfaces de second ordre qui ont huit plans tangents communs). — Surfaces de second ordre homofocales. — Théorèmes analogues pour les séries de coniques homofocales. — Théorèmes analogues pour les surfaces de second ordre homofocales. — Propriétés polaires d'un système de surfaces de second ordre homofocales. — Propriétés corrélatives pour les séries de surfaces homofocales. — Application des théorèmes précédents à une série de surfaces de second ordre homofocales. — Théorèmes correspondants pour les séries de coniques homofocales.

Mollame (*V.*). — Une solution de l'équation complète du troisième degré et expression des racines en fonction du discriminant de la cubique. (341-344).

Si $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ est l'équation donnée, Δ son discriminant et $B = 2h^3 - 3abc + a^2d$, les racines x_1, x_2, x_3 s'obtiennent des équations

$$ax_1 + b = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2), \quad ax_2 + b = \tfrac{1}{2}(\alpha R_1 + \alpha^2 R_2), \quad ax_3 + b = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 R_1 + \alpha R_2)$$

où α est une racine cubique de l'unité et

$$R_1^3 = -4B + 4a\sqrt{\Delta}, \quad R_2^3 = -4B - 4a\sqrt{\Delta}.$$

Annonce de la mort du professeur Domenico Chelini.

Aschieri (*F.*). — Notions préliminaires pour la Géométrie projective de l'espace considéré comme lieu de droites. (346-363).

Anelli (*P.*). — Sur les cubiques planes avec un point double. (364-376).

C'est une application de la représentation symbolique des formes binaires.

Frattini (*G.*). — Équation de certaines courbes du cinquième ordre. (377).

Riccardi (*M.*). — Annonce bibliographique : Compte rendu du

Livre de M. D. Tessari : « *Applicazioni della Geometria descrittiva alla teoria delle ombre e del chiaroscuro* ». (378-380).

Tome XVII; 1879.

Bertini (*E.*). — Sur les complexes de deuxième degré. (1-8).

Bianchi (*L.*). — Recherches sur les surfaces hélicoïdales. (9-39).

Une surface quelconque étant donnée, on peut construire les deux surfaces lieux des centres de courbure principaux, c'est-à-dire ses deux développées; on peut appeler *complémentaires l'une de l'autre* ces deux développées. L'auteur démontre que, si une surface est donnée, on peut construire sa complémentaire lorsqu'on connaît le système de géodésiques auxquelles sont tangentes les normales à la développante. Si l'on a une série de surfaces applicables l'une sur l'autre et sur une surface de révolution, en considérant chacune de ces surfaces comme une développée et en prenant pour système de géodésiques les méridiens déformés, les surfaces complémentaires sont applicables l'une sur l'autre et sur une surface de révolution. L'auteur démontre ensuite que les développées et les développantes des hélicoïdes sont de nouveaux hélicoïdes de même axe et de même pas, pourvu que l'on prenne pour système de géodésiques le système de lignes qui vient à coïncider avec les méridiens lorsqu'on applique l'hélicoïde sur une surface de révolution. De ce théorème on déduit facilement que la surface complémentaire d'un hélicoïde (si l'on prend pour géodésiques les déformées des méridiens) est un nouvel hélicoïde. L'auteur considère alors des hélicoïdes spéciaux, c'est-à-dire l'hélicoïde réglé, celui à aire minima, celui à lignes de courbure planes.

Le lieu des centres de courbure géodésique d'un système de lignes de courbure d'une surface donnée est une nouvelle surface qu'on a appelée *surface des centres géodésiques* du système de lignes de courbure. M. Bianchi démontre que les surfaces des centres géodésiques d'un hélicoïde sont de nouveaux hélicoïdes de même axe et de même pas que le premier. L'auteur indique aussi une construction pour obtenir des hélicoïdes applicables sur les surfaces de révolution à courbure constante.

Enfin l'auteur démontre que le lieu des centres de courbure des hélices d'un hélicoïde est un nouvel hélicoïde de même axe et de même pas, dont la section droite est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la section droite de l'hélicoïde donné.

Dans un Appendice, l'auteur démontre que, étant donnée une surface à courbure constante négative sur laquelle on connaît un certain système de géodésiques, on peut en déduire sans aucune intégration d'infinies surfaces à courbure constante négative.

Bianchi (*L.*). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan et dans l'espace. (40-42).

Démonstration des deux théorèmes : « Soit dans le plan, soit dans l'espace, si l'on exclut la similitude, la seule transformation rationnelle qui conserve aux angles la même valeur est la transformation par rayons vecteurs in[illegible]

Battaglini (*G.*). — Sur le mouvement sur une conique. (43-52).

Détermination de l'expression générale de la force qui doit agir sur un point pour qu'il parcoure une conique donnée. Le théorème qui termine cette Note avait déjà été donné par M. Bonnet, et on le trouve parmi les Notes à la troisième édition de la *Mécanique analytique* de Lagrange.

Harzer (*P.*). — Mouvement d'un ellipsoïde de révolution rigide, écrasé, composé de couches de densité constante qui augmente en s'approchant du centre et qui tourne autour de l'axe de symétrie sous l'influence d'un corps qui se meut autour du centre de l'ellipsoïde suivant les lois de Kepler. (53-68, 183-201).

Capelli (*A.*). — Sur la correspondance (2, 2) ou la forme $f(x^2, y^2)$; ses invariants et covariants par rapport à deux transformations linéaires effectuées sur les deux systèmes de variables et indépendantes l'une de l'autre. (69-147).

Deux formes géométriques de première espèce étant données, si à chaque élément de l'une on fait correspondre deux éléments de l'autre, on vient à établir une correspondance (2, 2), que l'on peut représenter par $f(x^2, y^2) = 0$ si x et y sont les coordonnées qui déterminent la position des éléments de la première et de la seconde forme respectivement, ou bien encore symboliquement par

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^2 = 0$$

si l'on adopte les coordonnées homogènes. L'auteur fait une étude étendue de cette correspondance en considérant d'abord les éléments de diramation, c'est-à-dire les éléments auxquels correspondent deux éléments superposés dans l'autre forme; il cherche ensuite quelles sont les transformations linéaires qui substituent aux variables x et y les nouvelles variables ξ, η, de façon que la fonction $f(x^2, y^2)$ se change en une fonction symétrique par rapport à ξ et η. Il est évident que, si après avoir transformé la fonction $f(x^2, y^2)$ en une fonction symétrique $F(\xi^2, \eta^2)$ on effectue la même substitution linéaire sur les variables ξ, η, on obtient une nouvelle fonction qui est encore symétrique; s'il est donc possible de transformer une fonction $f(x^2, y^2)$ en une fonction symétrique, ce doit être d'un nombre infini de manières. Mais on peut limiter le problème en considérant seulement les transformations qui sont indépendantes entre elles, c'est-à-dire celles qu'on ne peut déduire l'une de l'autre par une même substitution effectuée sur les deux systèmes de variables; on trouve alors que le problème admet quatre solutions. Voici les titres des paragraphes : Éléments de diramation. — Éléments doubles. — Discussion des singularités que peuvent présenter les éléments de diramation ou les éléments doubles. — Sur le cas dans lequel aux éléments d'une des formes correspondent dans l'autre des éléments en involution. — Réduction de $f(x^2, y^2)$ à une forme où x et y entrent symétriquement. — Démonstration plus rigoureuse. — Théorèmes sur la cubique plane; sa construction au moyen de deux coniques auxiliaires. — Équation du quatrième degré de laquelle dépend la réduction de $f(x^2, y^2)$ à la forme symétrique. — Tous les invariants à symboles séparés s'expriment en fonction rationnelle entière de trois d'entre eux. — Système de formes associées pour les invariants et covariants à symboles séparés. — Les conditions

pour que la correspondance (2,2) se change en (1,2) ou (2,1) sont données par l'annulation de deux invariants à symboles séparés. — Formes superposées. — Éléments unis et éléments en involution. — Discussion des cas qui correspondent aux racines réelles ou imaginaires de $V = 0$ et $W = 0$.

Rubini (*R.*). — Un point de l'histoire des Mathématiques. (149-159).

Pittarelli (*G.*). — Sur la signification géométrique des *Ueberschiebungen* dans les formes binaires. (160-171).

Veronese (*G.*). — Théorèmes et constructions de Géométrie projective. (172-182).

Recueil d'exercices à démontrer.

Cassani (*P.*). — La surface de second ordre des douze points, et recherches qui sont liées à cette question. (202-217).

Le lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un faisceau est une conique connue sous le nom de *conique des neuf points*. Le lieu des droites polaires des points d'une droite fixe par rapport à un faisceau de surfaces de second ordre est une nouvelle surface de second ordre que l'auteur appelle des *douze points* parce qu'elle passe par les sommets du tétraèdre conjugué par rapport aux surfaces du faisceau et par huit points déterminés de la courbe base. Ces huit points sont les points de contact de la courbe et des génératrices de la surface développable qui a pour arête de rebroussement la courbe, lesquelles rencontrent la droite fixe. L'auteur, après avoir donné quelques propriétés de cette surface de second ordre, étudie la surface enveloppée par les plans déterminés par les points de la droite fixe et par les droites correspondantes; il trouve que cette surface est de la troisième classe et du quatrième ordre. Le problème de la conique des neuf points peut être étendu à l'espace d'une façon différente, en cherchant, comme a fait M. Beltrami, le lieu des pôles d'un plan par rapport aux surfaces de second ordre assujetties à passer par sept points donnés arbitrairement; l'auteur montre qu'en ce cas on obtient une surface de troisième degré.

Crocchi (*L.*). — Sur les fonctions $\aleph$ et le déterminant de Cauchy. (218-231).

On sait que les fonctions $\aleph$ sont celles qui proviennent du développement de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{\omega}$ quand ω est entier et positif, en remplaçant les coefficients polynômiaux par l'unité. Le déterminant de Cauchy est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'auteur établit quelques relations entre ces fonctions, entre autres celle-ci : « Le déterminant fonctionnel des n premières fonctions $\aleph$ est égal au déterminant de Cauchy. »

Formenti (*C.*). — Mouvement des figures qui se conservent semblables à elles-mêmes. (232-243).

La relation $z = f(t, z_0)$, où t est une variable réelle, $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, peut servir à représenter les positions successives d'un point mobile qui dans un temps déterminé occupait la position (x_0, y_0); si maintenant on considère cette relation pour chaque valeur de t comme une équation qui lie les deux variables imaginaires z et z_0 lorsque z_0 parcourt une courbe, la ligne parcourue par z est semblable dans les parties infiniment petites à la première, et ces deux lignes deviennent semblables si la relation $z = f(z_0, t)$ est du premier degré par rapport à z_0. C'est en partant de ces observations que l'auteur étudie le mouvement d'une figure plane qui se déplace dans son plan de façon à rester semblable à elle-même.

Pittarelli (*G.*). — Sur un problème d'élimination dans la théorie analytique de la cubique gauche. (244-259).

On sait que les coordonnées des points d'une cubique gauche peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre λ, et l'on peut facilement déterminer l'équation de la corde qui joint les points de paramètres λ et μ. A chaque point μ de la cubique on peut faire correspondre deux points λ sur la courbe, qui ont pour paramètres les valeurs qui appartiennent aux deux points de la première polaire de μ par rapport à une forme cubique binaire $(\varkappa\nu)^3 = 0$. Les droites qui joignent les points μ à leurs correspondants lorsqu'on fait parcourir à μ toute la cubique constituent une surface du sixième ordre, dont l'auteur détermine l'équation en se servant de la méthode symbolique d'Aronhold et de Clebsch.

Pittarelli (*G.*). — La cubique gauche et les formes binaires quadratiques et cubiques. (260-309).

§ 1. Notation symbolique. Pôles et plans polaires. Droites conjuguées. — § 2. Système complet de la forme f et de la forme $f_{\lambda\mu} = \lambda f + \mu$ Q. Points et plans réunis. — § 3. Système simultané d'une forme quadratique et d'une cubique. Représentation typique. Observations sur les systèmes de deux formes cubiques.

D'Ovidio (*E.*). — Étude des cubiques gauches au moyen de la notation symbolique des formes binaires. (310-338).

§ 1. La cubique gauche. Ses plans sécants, tangents, osculateurs. Cordes, tangentes. — § 2. La développable de troisième classe osculatrice à la cubique gauche. — Correspondance entre la cubique et la développable. Axes de la développable. — § 3. Rapport anharmonique de quatre points de la cubique ou de quatre plans tangents à la développable. — § 4. Foyers et plans focaux. — § 5. Correspondance des éléments de l'espace au moyen de la cubique. — § 6. Involution de points sur la cubique et de plans tangents à la développable. — § 7. Surfaces de second degré circonscrites à la cubique ou inscrites dans la développable. — § 8. Droites associées. — § 9. De certains faisceaux ou séries de surfaces de second ordre. — § 10. Cônes conjoints. Coniques conjointes. — § 11. Quelques systèmes particuliers de surfaces de second ordre. — § 12. Surfaces polaires par rapport à la développable ou à la cubique. — § 13. De certains complexes.

Padelletti (*D.*). — Études sur les diagrammes réciproques. (339-359).

L'auteur commence par démontrer qu'on peut toujours porter un corps rigide d'une position à une autre au moyen de deux rotations finies autour de deux axes; l'ordre dans lequel les deux rotations doivent être effectuées ne peut pas être interverti. Appelons *droites conjuguées* celles autour desquelles doivent avoir lieu les rotations. Il y a d'infinis systèmes de droites conjuguées par rapport à deux positions d'un corps; mais, lorsqu'une est choisie arbitrairement, l'autre est déterminée. Par *projection orthographique* il faut entendre une projection orthogonale faite sur un plan normal à l'axe central. Le théorème fondamental de cette théorie, qui, comme on le voit, est une extension de la théorie de Chasles pour les mouvements infiniment petits et de l'ordinaire théorie des figures réciproques dans la *Statique graphique* de Cremona et Maxwell, est le suivant : « Les projections orthographiques de deux droites conjuguées font entre elles un angle constant. » L'auteur fait ensuite des applications de cette théorie à la Dynamique et à la Statique.

Piuma (*C.-M.*). — Solution d'un problème élémentaire du Calcul des probabilités. (360-372).

Le problème résolu est le suivant : « Dans une urne il y a B billets numérotés progressivement de 1 à B; on en extrait trois; on additionne les numéros écrits sur ces billets : parmi les $\frac{B(B-1)(B-2)}{6}$ cas possibles, combien y en a-t-il dans lesquels la somme ainsi obtenue est égale ou moindre qu'un nombre donné C? »

La solution la plus simple de ce problème se présente lorsque C est moindre que $B+4$; il faut alors distinguer les six cas qui correspondent aux formes $6c$, $6c+1$, $6c+2$, ..., $6c+5$ de C, et, en indiquant par T_c le nombre des cas possibles, on trouve

$$T_{6c}=c\,\frac{12c^2-15c+5}{2},\quad T_{6c+1}=c\,\frac{12c^2-9c+1}{2},$$
$$T_{6c+2}=c\,\frac{12c^2-3c-1}{2},\quad T_{6c+3}=c\,\frac{12c^2+3c-1}{2},$$
$$T_{6c+4}=c\,\frac{12c^2+9c+1}{2},\quad T_{6c+5}=c\,\frac{12c^2+15c+5}{2}.$$

Gerbaldi (*F.*). — Note sur le système simultané de deux formes binaires cubiques. (373-380).

E. P.

ANNALES DES MINES [1].

Tome XIII; 1er semestre 1878.

Marie (*G.*). — Étude sur la confection des outils d'ajustage. (5-38, 2 pl.).

---

[1] Voir *Bulletin*, I_2, 317, et II_2, 105.

Ce Mémoire est divisé en quatre Parties :

1° Étude théorique sur les outils.

Mode de travail d'un outil quelconque. Manière la plus économique d'enlever du métal sur une pièce. Manière de supporter le tranchant. Travail moteur nécessaire pour faire marcher une machine-outil. Résumé et Tableaux graphiques.

2° Application des principes aux divers genres de machines-outils.

Considérations générales et données relatives à toutes les machines-outils. Étude des diverses classes de machines-outils.

3° Organisation d'un atelier d'ajustage.

4° Étude des systèmes proposés.

Tome XIV; 2e semestre 1878.

Ledoux. — Théorie des machines à froid. (121-208, 1 pl.).

Ce travail est consacré à l'étude théorique et aux conditions de fonctionnement des machines actionnées par un gaz ou une vapeur à basse température : air froid, éther sulfurique, acide sulfureux, ammoniaque, éther méthylique.

L'auteur étudie en détail la machine à air de M. Giffard, la machine à acide sulfureux de M. Pictet, et les machines à froid, dites *à affinité*, dont le type est la machine à ammoniaque de M. Carré.

Marie (G.). — Étude comparée des régulateurs de vitesse, de pression, de température et des régulateurs de toutes sortes. (450-548, 2 pl.).

Ce Mémoire est surtout descriptif. Les considérations mathématiques qu'il renferme ont pour but de préciser les conditions de fonctionnement des divers régulateurs.

Tome XV; 1er semestre 1879.

Achard (A.). — De la transmission et de la distribution des forces motrices à grande distance au moyen de l'électricité.

Étude des conditions de transmission du travail à l'aide de machines électromagnétiques.

Tome XVI; 2e semestre 1879.

Amiot. — Influence des pentes sur le prix de revient kilométrique d'une tonne de marchandises de petite vitesse. (289-320).

Détermination fondée sur une analyse intéressante, qui offre une utilité immédiate pour l'établissement des statistiques.

Ledoux. — Mémoire sur l'emploi de la détente dans les machines d'extraction. (321-402, 1 pl.).

Les machines d'extraction employées dans les mines de houille ont subi depuis

quarante ans une série de transformations commandées par le développement de la production et l'approfondissement des puits. Aux anciennes machines de Watt à balancier ont succédé les machines horizontales à un seul cylindre et à engrenages; celles-ci, à leur tour, ont été remplacées par les machines à deux cylindres conjugués, horizontaux ou verticaux, agissant directement sur l'arbre des bobines ou des tambours, au moyen de deux manivelles calées à 90° l'une de l'autre.

Ce dernier type, qui est le seul usité aujourd'hui dès que la force dépasse 50 à 60 chevaux, satisfait en effet à la plupart des conditions que doivent remplir les machines d'extraction.

Malheureusement la dépense de l'extraction tend à devenir une fraction de plus en plus importante du prix de revient des charbons, et il n'est pas étonnant que l'attention des ingénieurs se soit portée, dans ces derniers temps, sur cette question.

L'objet du présent Mémoire est de préciser le mode d'action de la vapeur dans les machines d'extraction à pleine pression et dans les machines à détente fixe ou variable; de déterminer, au moyen des données fournies par l'expérience, et aussi exactement que le comporte un tel sujet, l'économie que l'on peut espérer obtenir par un règlement convenable de la distribution et par l'usage de la détente; enfin de donner une description des principaux systèmes appliqués jusqu'à ce jour pour la production de la détente variable.

Tome XVII; 1er semestre 1880.

Ce Volume ne renferme point de Mémoires ayant trait aux applications des Mathématiques.

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XII; avril-septembre 1878.

Deville (*R.*). — Étude sur la pratique du tir en brèche à grande distance. (203-228, 5 fig.).

Suite et fin du travail inséré dans le Tome XI.

Cette seconde Partie renferme la discussion et la solution des questions suivantes :

Choix de la trajectoire moyenne.

Calcul des éléments du tir, suivant la nature du calibre employé et les Tables de tir appropriées au calibre. Les données sont alors, soit l'angle de tir, soit l'angle de chute, soit la distance.

Réglage et conduite du tir.

Consommation de projectiles pour produire une brèche.

(¹) Voir *Bulletin*, XI, 74, et II_2, 127.

Muzeau (*E.*). — Mouvement des projectiles oblongs dans l'air. (422-443 et 495-515, 19 fig.).

Ainsi que le dit l'auteur, les considérations sur le mouvement des projectiles oblongs exposées dans ce Mémoire ne sont pas nouvelles; mais, comme jusqu'à présent elles étaient disséminées dans divers Ouvrages, il a semblé qu'il ne serait pas inutile d'en faire un nouvel exposé qui permît de les rattacher les unes aux autres.

Dans cette voie, on a résumé les travaux successivement publiés par les différents auteurs qui se sont occupés de cette question, MM. de Saint-Robert et Mayevski notamment, et l'on a fait suivre l'analyse de ces recherches, relativement anciennes, des résultats très remarquables auxquels M. Magnus de Sparre est plus récemment parvenu.

Le présent Mémoire est divisé en deux Parties. La première traite du mouvement des projectiles oblongs animés d'une grande vitesse initiale. La résistance de l'air est assez fidèlement représentée, d'après les recherches expérimentales du général Mayevsky, par la formule suivante,

$$R = A\pi R^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} v^4,$$

dans laquelle R représente la résistance de l'air évaluée en kilogrammes, A un coefficient numérique égal à 0,00000027, R le rayon du projectile exprimé en mètres, Δ la densité de l'air au moment de l'expérience, Δ_1 la densité de l'air dans des conditions moyennes de température et de pression. La formule se simplifie en prenant $\Delta_1 = \Delta$.

L'auteur expose ensuite la méthode de détermination approximative de la résistance de l'air au mouvement des projectiles oblongs, en substituant à la surface de révolution qui limite les projectiles une série de troncs de cône et de cylindres. Il applique cette recherche à l'exemple de l'obus de $0^m,095$.

Il passe ensuite à l'établissement des équations différentielles du mouvement de translation, puis à l'intégration des équations qui donnent la projection de la trajectoire sur le plan de tir.

Le mouvement de rotation du projectile autour de son centre de gravité est étudié de la même manière; l'intégration s'opère directement et s'achève par des constructions graphiques.

Tome XIII; octobre 1878-mars 1879.

Muzeau (*E.*). — Mouvement des projectiles oblongs dans l'air. (31-63, 7 fig.).

Suite et fin du travail inséré dans le Tome XII.

La première Partie se termine par l'exposé des problèmes suivants :

Équations en termes finis de la projection de la trajectoire sur le plan horizontal.

Substitution d'une ligne plane à la courbe gauche décrite par le projectile; expression approchée de la dérivation.

Application des théories exposées dans les Chapitres précédents au calcul des Tables de tir du canon de $0^m,095$. Comparaison avec les résultats des expériences de la Commission de Calais

Remarques diverses et conclusions.

La seconde Partie est relative au mouvement des projectiles oblongs animés d'une faible vitesse initiale. Elle ne renferme que des généralités, et l'auteur rappelle aux Mémoires plus spéciaux publiés sur la question.

Deux Notes intéressantes terminent ce résumé. L'une d'elles est relative à l'évaluation des corrections rendues nécessaires par la suppression de certains termes dans les équations différentielles du mouvement de translation; l'autre se rapporte à la détermination de la loi de la résistance de l'air lorsque la trajectoire est connue.

Terquem. — Sur l'organisation des rayures des canons. (217-227, 2 fig.).

Travail posthume, rédigé vers la fin de l'année 1873. Il a paru d'autant plus intéressant de le publier, que les considérations qu'il renferme ont puissamment servi à l'établissement de notre nouveau matériel, quant à ce qui concerne le nombre et la profondeur des rayures.

Canet (G.). — Théorie des freins hydrauliques. (436-469, 4 fig., 1 pl.).

Le frein hydraulique, dont l'idée première revient à M. W. Siemens, a été adopté par le gouvernement anglais, depuis plusieurs années, pour tous ses affûts de place et de côte, ainsi que pour plusieurs affûts de marine, conjointement avec le frein à lames.

Le présent Mémoire renferme la théorie et la description des freins des systèmes Krupp, Rendel et Vavasseur.

Page (E.). — Résistance de l'air. (531-539, 1 fig.).

Dans un travail précédent (t. XI), l'auteur a proposé d'exprimer la résistance de l'air par la formule exponentielle

$$R = P\frac{a^{\frac{v}{w}}-1}{a-1};$$

P, poids du projectile; w, vitesse finale pour laquelle la résistance est égale au poids; a, constante dépendant de la forme et de la densité.

Discussion de la formule en posant $a = e^{\frac{w}{n}}$ et en définissant d'autres hypothèses. Construction de la courbe de résistance.

Conséquences probables, relatives au mouvement des bolides dans l'atmosphère. Explication de l'incandescence et de la pulvérisation de ces météores.

Autres conséquences relatives à la production de véritables tempêtes, par suite de l'irruption d'énormes quantités de bolides.

Quant à l'accroissement de masse qui devrait en résulter pour le globe terrestre, l'influence de ces bolides est très faible et à peine appréciable. Si la Terre en recevait chaque jour 17 200 000^{kg}, sa masse ne s'accroîtrait pas d'un cent-millionième dans l'intervalle de cent siècles.

Tome XIV; avril-septembre 1879.

Page (E.). — Résistance de l'air. (38-44, 1 fig.).

Application de la formule précédente à l'étude de la chute libre d'un corps.

Jouart (*A.*). — Balistique des armes portatives. (89-116, 2 fig.).

Compte rendu des travaux et des tableaux comparatifs de M. Indra.

Ce travail est terminé par une Note ayant pour objet la recherche de l'équation de la courbe parabolique se rapprochant le plus de la forme observée dans la pratique.

Peigné (*P.*). — Formule pratique des télémètres. (427-445; 9 fig.).

La théorie des télémètres a fait l'objet de recherches et de propositions plus ou moins ingénieuses. Les formules établies dans cette Notice pourront guider dans leurs recherches quelques-uns des inventeurs qui désirent s'occuper de télémétrie. Il arrive malheureusement trop souvent qu'on fait construire un appareil qui ne donne pas et ne pourrait donner les résultats qu'on en attendait; il est en effet nécessaire, si l'on veut éviter de nombreuses dépenses et de graves déceptions, de poser d'abord les conditions mathématiques du problème à résoudre matériellement au moyen de l'appareil. La formule pratique des télémètres est une relation simple entre les divers éléments de la question; elle permet de calculer rapidement l'inconnue, base, grossissement de la lunette, approximation de mesure, étant donnés les autres éléments.

L'auteur est d'avis qu'un instrument qui donnerait, avec le matériel actuel, la distance à un quarantième près, satisferait largement aux besoins de la pratique.

Il établit qu'une base de 15^{m} à 18^{m} peut suffire pour des distances de 7^{km} à 8^{km} avec un grossissement de 12 fois, et qu'une base de $7^{m},11$ suffit pour 8^{km} avec un grossissement de 30 fois.

Il donne la description d'un double graphomètre susceptible d'être adapté aux observations de télémétrie faites en ballon captif.

Le Mémoire est terminé par la théorie de l'appréciation des distances, fondée sur le tirage de l'oculaire d'une lunette exactement mise au point. La formule, très simple, qui répond à cette expérience, est

$$DD' = f^2,$$

D, D' étant les distances de l'objet et de l'image au foyer le plus rapproché, f la distance focale. Cette formule a été donnée pour la première fois par Newton.

Les observateurs familiarisés avec l'emploi des lunettes d'approche savent combien ce mode de détermination est illusoire. A partir de 100^{m}, toutes les images se forment dans un intervalle de $0^{m},001$ à $0^{m},002$. Dans ce cas, l'estimation à vue simple donnera des indications plus précises. C'est, du reste, ce que l'auteur a soin de faire remarquer.

Tome XV; octobre 1879-mars 1880.

Daubrée (*A.*). — Note sur les propriétés érosives des gaz à haute température et sous de grandes pressions. (36-47, 2 fig., 1 pl.).

La *Revue d'Artillerie* a publié deux Notes de M. Daubrée, relatives :

La première, aux effets produits par les gaz de la poudre sur le grain de poudre lui-même, ainsi que sur des feuilles d'acier, et à l'action exercée par les gaz

chauds et comprimés lorsqu'ils s'échappent avec une grande vitesse par un petit orifice;

La deuxième, aux effets produits par les gaz de la dynamite sur des barres d'acier.

Dans la troisième Note, qui fait l'objet de ce dernier article, l'auteur étudie plusieurs phénomènes d'érosion produits par les gaz de la poudre, en particulier sur le canal des têtes mobiles et des grains de lumière, ainsi que les effets produits par les gaz de la dynamite, de la nitroglycérine et du fulmicoton.

Lefèvre (*J.-B.-V.*). — Tracés empiriques de la trajectoire. (48-81; 14 fig.).

La théorie et l'expérience sont d'accord pour démontrer :

1° Que, lorsque la ligne de mire est horizontale, l'angle de tir est toujours plus petit que l'angle de chute;

2° Qu'il en est encore ainsi tant que l'angle d'élévation du but par rapport à l'horizontale n'atteint qu'un petit nombre de degrés.

D'après cela, on a cherché à remplacer la trajectoire (en plan vertical) par une courbe simple, telle qu'une parabole du second degré, dont l'axe serait oblique sur la verticale.

Une courbe de cette espèce serait entièrement déterminée, du moment que l'on connaîtrait, par exemple, la portée, l'angle de mire et l'angle de chute.

La Commission de Calais a reconnu que les ordonnées d'une parabole du second degré, obtenues par un simple tracé graphique, pour une trajectoire d'une très grande étendue (9200^m), diffèrent fort peu de celles qu'on trouve par deux procédés plus ou moins laborieux (formule de Piton-Bressant et méthode de M. Bashforth).

L'auteur envisage plus spécialement le tir des fusils dont la portée est de 1200^m, et, dans ce cas, il est intéressant de rechercher l'approximation que peut donner la substitution de la parabole à la courbe véritable.

Le problème que l'on rencontre le plus généralement dans la pratique est celui de la détermination d'une parabole passant par quatre points, savoir : deux points de la trajectoire, le point de départ et le point d'arrivée.

Percin (*A.*). — Note sur une application de la loi de probabilité du tir. (341-348, 1 fig.).

Démonstration de la règle suivante : « Lorsque le but à battre se compose de deux objectifs distincts de même largeur et qu'on a même intérêt à détruire (par exemple, deux embrasures voisines d'une même batterie, deux pièces d'une même section, etc.), le maximum de l'effet possible ne s'obtient pas en visant successivement chacun des deux objectifs, mais en visant le milieu de leur intervalle, s'il est inférieur ou égal au double écart quadratique moyen en direction, dans le cas contraire un point compris entre le milieu et un des deux objectifs. »

Uchard (*A.*). — Note sur un appareil destiné à tracer des courbes du second degré d'un mouvement continu. (496-501, 8 fig.).

L'ellipsographe à molettes ou le compas à verge et à trois pointes offrent l'inconvénient que le trait du crayon est limité ou incertain, et que, si on leur adapte un tire-ligne, ce dernier ne conserve pas l'orientation voulue et ne peut donner un trait continu. L'ingénieuse solution trouvée par M. Peaucellier donne la solu-

tion complète avec un crayon; mais elle ne satisfait plus au tracé graphique si l'on substitue un tire-ligne ou porte-crayon.

L'auteur a cherché un système articulé donnant au tire-ligne l'orientation convenable pour le tracé d'un arc d'ellipse, d'hyperbole ou de parabole. La solution qu'il a trouvée paraît satisfaisante; mais il est à craindre qu'elle ne soit un peu dispendieuse dans la pratique.

Tome XVI; avril-septembre 1880.

Brongniart (*P.*). — Note sur l'exécution du tir en brèche à grande distance. (218-231, 4 fig.).

L'auteur rappelle l'étude intéressante et complète publiée par M. Deville dans les Tomes XI et XII; puis il se propose de fixer les règles à appliquer pour l'exécution du tir en brèche à grande distance, en observant les prescriptions réglementaires.

H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES ([1]).

Tome XV; 1er semestre, 1878.

Ce Volume ne renferme point de Mémoires ayant trait à l'étude des Mathématiques pures ou appliquées.

Tome XVI; 2e semestre, 1878.

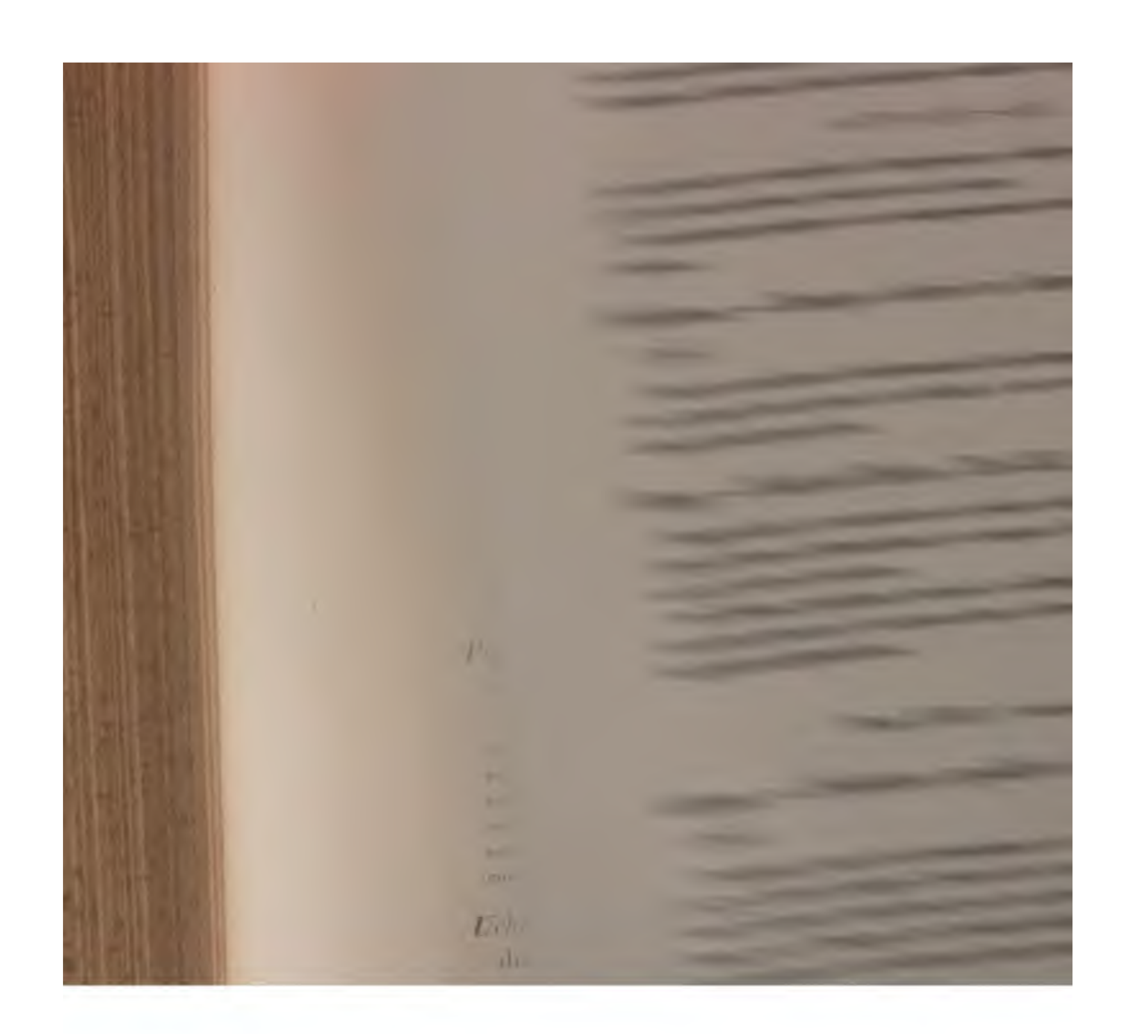
Lavoinne. — Notice sur les principaux systèmes de locomotives sans feu. (261-309, 1 pl.).

Plusieurs articles, publiés depuis l'année 1873, ont déjà fait connaître aux lecteurs des *Annales* les tramways à traction par locomotives sans feu de la Nouvelle-Orléans.

En raison de l'intérêt que présente l'application des machines sans feu à l'exploitation des tramways dans l'intérieur des villes et des perfectionnements qu'elles ont reçus dans ces dernières années, l'auteur de la Notice a pensé qu'il y aurait utilité à faire connaître une étude plus complète des divers types de machines sans feu construites en Amérique et en France, et à indiquer, au point de vue théorique et pratique, la valeur du système et des applications qu'il comporte.

L'effet utile des machines sans feu est étudié aux titres suivants : Poids de la vapeur dépensée; travail de la vapeur à pleine pression; travail de la vapeur avec détente; limite de parcours; limites de pente et de vitesse; emploi du descendeur.

([1]) Voir *Bulletin*, XI, 259, et II_2, 106.



les plus longues et les plus fastidieuses que comporte la rédaction des projets.

Du Boys (*P.*). — Le Rhône et les rivières à lit affouillable. (141-195, 1 pl.).

L'auteur commence par donner des indications générales sur le régime du Rhône, et montre comment le problème de l'amélioration des hauts-fonds le conduit à étudier les lois du transport des graviers sous l'action des eaux. Il recherche ensuite comment un courant façonne le fond suivant la disposition des berges, en supposant successivement le débit constant et variable. Enfin, il indique les confirmations de cette théorie par les faits.

Picard (*A.*). — Simplification pratique de l'appareil orthogonal convergent. (339-370, 2 pl.).

Cette Note se compose de deux Parties :

1° Appareil des ponts biais d'une faible longueur ou d'une grande longueur.

Principe et caractère de l'appareil convergent simplifié.

Équations des lignes de lits, de leurs transformées et de leurs projections sur divers plans. Propriétés focales des normales aux projections des lits sur des plans parallèles aux génératrices.

2° Application de l'appareil circulaire convergent au pont souterrain des Kœurs (arrondissement de Commercy).

Choix des matériaux. Taille des voussoirs et crémaillères. Voussure ou corne de vache. Résultats du décintrement.

Tome XIX; 1er semestre, 1880.

Perrodil (*de*). — Tarage de l'hydrodynamomètre. (11-28, 1 pl.).

Cet instrument, nommé aussi *dynamomètre hydraulique*, peut servir au jaugeage des cours d'eau et à l'observation des lois de l'Hydraulique. Il pourrait encore être employé à la mesure de la vitesse du vent.

L'auteur établit une comparaison de ce nouvel instrument avec le moulinet de Woltmann et le tube de Pitot.

Perrodil (*de*). — Résistance des voûtes et des arcs métalliques. (218-232, 1 fig.).

Résumé destiné à faciliter la vulgarisation de la théorie exposée par l'auteur dans une partie de son Ouvrage sur la *Résistance des voûtes et des arcs métalliques.*

Détermination graphique et analytique de la résultante relative à chaque section normale, lorsque cette résultante est connue pour la section à la clef.

Changement de forme de la fibre moyenne produit par l'application des forces extérieures.

Durand-Claye (*A.*). — Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs. (416-440, 3 pl.).

La stabilité des voûtes en maçonnerie ou des arcs métalliques est ordinairement étudiée par voie de simple vérification. Dans la méthode graphique de Méry, on prend arbitrairement le point d'application de la poussée à la clef et le point d'application de la résultante sur un joint. La courbe des pressions se trouve ainsi déterminée arbitrairement et ne donne aucune idée précise sur la stabilité de la construction.

C'est cette indétermination que l'auteur du Mémoire a essayé de faire disparaître. Il applique ensuite sa méthode à la vérification de la stabilité des voûtes sphériques.

Baum (*Ch.*). — Des longueurs virtuelles d'un tracé de chemin de fer. (455-578).

L'étude du tracé d'une ligne de chemin de fer entraîne, en général, celle de deux ou plusieurs variantes de ce tracé. Toutes ces variantes satisfont à certaines conditions communes, comme, par exemple, de passer par des points déterminés, de desservir des villes ou des communes indiquées à l'avance. Elles diffèrent les unes des autres par la longueur, par le profil en long, les rampes, les rayons des courbes, le cube des terrassements, l'importance des ouvrages d'art, la dépense kilométrique, etc.

Lorsqu'on se trouve en présence de plusieurs variantes d'un même tracé de chemin de fer, il conviendrait qu'on ne se prononçât sur l'une ou sur l'autre variante qu'après avoir établi la longueur horizontale et rectiligne équivalente de chacune d'elles, ou encore la longueur virtuelle.

Les principales longueurs virtuelles d'une ligne peuvent être classées ainsi, relativement aux diverses données suivantes :

1° Travail mécanique ou résistance;
2° Dépenses de l'exploitation ;
3° Dépenses du transport proprement dit;
4° Frais de traction ;
5° Prix des tarifs;
6° Vitesses.

Ces deux dernières ont été peu étudiées dans le passé.

L'auteur s'occupe surtout dans la présente étude de la longueur virtuelle relative au travail mecanique, à égalité de vitesse.

Le Mémoire renferme l'exposé et la discussion comparative des méthodes et formules employées dans les administrations françaises et étrangères.

H. B.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. CLEBSCH und C. NEUMANN, gegenwartig herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER [1].

Tome XIV; 1879.

Sturm (*R.*), *Schröder* (*E.*) et *Sohncke* (*L.*). — HERMANN GRASS-

---

[1] Voir *Bulletin*, III_2, 175.

MANN; sa vie et ses travaux mathématiques et physiques. (1-45).

Avec une liste complète des écrits de Grassmann.

Rodenberg (*C.*). — **Sur la classification des surfaces du troisième ordre. (46-100).**

Ce Mémoire donne la réponse complète à cette question : « Quelles sont les espèces de surfaces du troisième ordre qui appartiennent au même pentaèdre? Et, réciproquement, quelles sont les espèces de pentaèdres (à plans réels ou imaginaires, séparés ou coïncidents) qui sont compatibles avec une même espèce de surfaces? » On rapporte ici à la même espèce toutes les surfaces qui peuvent se transformer les unes dans les autres par une variation continue des constantes, le pentaèdre restant le même, sans que, pendant cette opération, il se produise de nouvelles singularités ([1]). Si les plans du pentaèdre (réels ou imaginaires conjugués) sont séparés, l'équation de la surface prendra la forme

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}+\frac{x_4^2}{\alpha_4^2}+\frac{x_5^2}{\alpha_5^2}=0,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\equiv 0,$$

et la condition pour qu'il y ait un nœud est

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0.$$

On obtient toutes les espèces qui appartiennent au pentaèdre en faisant varier successivement les coefficients de l'équation et en ayant égard aux changements qu'éprouvent les points nodaux. En un point nodal, la déformation de la surface peut s'opérer d'une manière semblable à celle d'un cône qui se change en un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, ou le point nodal passe par l'état de point biplanaire. Ce dernier passage exige une étude particulière (§ 3), le pentaèdre prenant alors une forme spéciale.

Parmi les surfaces à pentaèdre complètement réel se trouvent toutes les espèces sans singularités, de plus les surfaces à nœuds coniques réels, et enfin une espèce à deux nœuds imaginaires conjugués. Dans le cas des pentaèdres à deux plans imaginaires conjugués, il manque les surfaces à vingt-sept droites réelles, etc.

Pour tous les cas où les plans du pentaèdre coïncident partiellement, l'auteur développe, par une méthode de passage à la limite (§ 8), les formes les plus simples de l'équation correspondante de la surface, de manière que, finalement, il peut indiquer, dans un Tableau très clairement disposé, quelles espèces de surfaces du troisième ordre appartiennent à chaque espèce de pentaèdre.

Klein (*F.*). — **Sur la transformation des fonctions elliptiques et la résolution des équations du cinquième degré. (111-172).**

Voir *Bulletin*, III_1, 408.

Weber (*H.*). — **Application des fonctions thêta de deux variables**

([1]) SCHLAEFLI, *Philos. Transact.*, 1863. — KLEIN, *Math. Annalen*, t. VI.



relations infinitaires (*Math. Annalen*, t. XIV, p. 498). — *Stolz*, Sur les valeurs-limites des quotients (*Math. Annalen*, t. XV, p. 556). — *Du Bois-Reymond*, Sur le théorème $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$.

M. Stolz démontre le théorème suivant : « Si pour la fonction

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)},$$

où h désigne une constante quelconque différente de zéro, il existe, lorsqu'on fait à la limite $x = +\infty$ une valeur limite k, il existera aussi pour $\lim x = +\infty$ une valeur limite du quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, et cette limite sera égale à k. » Les conditions de ce théorème sont que $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient continues, et que $\varphi(x)$, à partir d'une valeur finie $x = x_0$, devienne infinie en croissant toujours dans le même sens.

A l'aide de ce théorème, on détermine à quelles conditions on peut, de l'existence d'une valeur limite pour $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, conclure l'égalité

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ces conditions sont définies par ce théorème :

« Si la fonction uniforme $f(x)$ est continue à partir d'une valeur déterminée $x = x_1$ pour toutes les valeurs de $x > x_1$; si, de plus, la dérivée $f'(x)$ est une fonction continue ayant pour $x = \infty$ une valeur limite déterminée, il existera aussi une valeur limite pour la fraction $\frac{f(x)}{x}$, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x)}{x} = \lim f'(x) \quad \text{pour } x = \infty. \text{ »}$$

Dans la démonstration, au moyen de ce théorème, de l'égalité

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (^1),$$

il faut introduire la supposition que $\varphi(x)$ varie constamment dans le même sens.

M. du Bois-Reymond montre comment le théorème en question peut se démontrer à l'aide du Calcul infinitaire, fondé par lui.

Faà de Bruno (*F.*). — Sur la partition des nombres. (241-247 ; fr.).

L'auteur donne une nouvelle solution de ce problème : « Déterminer le nombre des solutions en nombres entiers de l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = p,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres donnés. » La méthode se fonde sur une nouvelle représentation indépendante pour les formes établies par Brioschi (*Annali di Matem.*, 2e série, t. VII).

(1) *Voir* Bouquet, *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XVI, p. 113.

Nöther (M.). — Sur la théorie des fonctions thêta de quatre arguments. (248-293).

Dans ce Mémoire, l'auteur résout le problème de représenter sous forme implicite le théorème d'addition relatif aux fonctions ϑ générales de quatre arguments. On connaît jusqu'ici le théorème pour les fonctions ϑ hyperelliptiques, d'après Weierstrass ([1]), et pour les fonctions ϑ générales de trois arguments, d'après Weber ([2]). Il s'agissait maintenant de pousser plus loin la théorie du groupement des caractéristiques des diverses fonctions ϑ, qui, dans les deux cas en question, a conduit à la détermination des coefficients dans le théorème.

M. Weber a rangé les caractéristiques

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & n_3^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & m_3^\alpha \end{pmatrix},$$

où les symboles n_i^α, m_i^α prennent les seules valeurs 0 ou 1, en systèmes de 7, jouissant des propriétés suivantes : La somme de 3 ou de 7 nombres quelconques du système doit être paire, chaque nombre et chaque somme de 5 nombres doivent être impairs. On doit entendre ici par somme de deux caractéristiques une somme dont les éléments sont les sommes (mod. 2) des éléments correspondants de ces caractéristiques, et (α) est pair ou impair, suivant que $\sum_{i=1}^{i=3} n_i^\alpha m_i^\alpha$ est paire ou impaire.

Ce caractère de parité ou d'imparité pour la somme d'un nombre impair quelconque de caractéristiques est maintenant en général la propriété essentielle de tous les systèmes de caractéristiques. L'auteur forme d'après cela le système — 7 et le système — 8 de caractéristiques impaires à quatre rangs

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & n_3^\alpha & n_4^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & m^\alpha & m_4^\alpha \end{pmatrix},$$

qui ont exactement les mêmes propriétés que les systèmes — 7 de caractéristiques à trois rangs dont il vient d'être question. Pour les sommes d'un nombre *impair* de caractéristiques, il n'existe entre deux pareilles sommes qu'une seule relation de groupement essentielle; on arrive ainsi à $\frac{255.64}{2}$ systèmes, chacun de 28 caractéristiques impaires, qui sont complètement identiques dans leurs groupements avec ceux des 28 caractéristiques impaires à trois rangs qui existent généralement. Parmi les systèmes — 8 dont nous avons parlé, il existe 255.64.36 systèmes, qui se décomposent en 255 groupes, de 36 classes chacun, et, pour exprimer *toutes* les caractéristiques, il a suffi de connaître *un seul* système — 8, qui exige la recherche d'une racine quelconque de chacune des trois équations des degrés 255, 36, 64, et la résolution d'une équation du huitième degré.

En se fondant sur les fonctions ϑ dont les indices dépendent de ce système — 8, le théorème d'addition prend maintenant une forme très simple. On obtient le produit

$$\vartheta(u+v+w).\vartheta(u-v),$$

([1]) Königsberger, *Journal f. Math.*, t. LXIV.

([2]) *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht* 3. Berlin, 1876.

exprimé linéairement au moyen de 16 produits de ϑ,

$$\vartheta_\alpha(u+w).\vartheta_\alpha(u),$$

avec des coefficients de la forme

$$B.\vartheta_\beta(v+w).\vartheta_\beta(v)+C.\vartheta_\gamma(v+w).\vartheta_\gamma(v),$$

B et C ne dépendant que de w. En particularisant w, on peut aussi réduire tous les 16 coefficients à des *monômes*, ce qui complète l'analogie avec les théorèmes déjà connus. Pour la fonction octuplement périodique

$$\frac{\vartheta_\alpha(u+v)}{\vartheta(u+v)},$$

on ne peut plus, au contraire, obtenir ces expressions monômes pour tous les coefficients du numérateur et du dénominateur, si l'on veut que le numérateur des expressions de tous les 256 indices α soit *le même*.

Parmi les formules particulières que fournit la théorie générale, il faut remarquer spécialement les relations entre quatre produits de thêta d'arguments zéro. Elles font voir, par exemple, que l'évanouissement de *trois* fonctions ϑ paires d'arguments zéro, pour lesquelles la somme des trois caractéristiques est impaire, entraîne déjà l'évanouissement de sept autres semblables fonctions, et par suite est suffisante pour que les fonctions ϑ deviennent *hyperelliptiques* (¹).

Krause (*R.*). — Sur une figure de la Géométrie analytique de l'espace, qui correspond au connexe de second ordre et de première classe. (294-322).

Si l'on désigne les coordonnées d'un point x par x_1, x_2, x_3, x_4, celles d'un plan par u_1, u_2, u_3, u_4, si de plus l'équation $f(x^m, u^n)=0$ renferme sous forme homogène x au $m^{\text{ième}}$ degré et u au $n^{\text{ième}}$, l'ensemble de tous les points et de tous les plans dont les coordonnées satisfont à l'équation constitue une figure que, par analogie avec la figure plane à laquelle Clebsch (²) a donné le nom de *connexes*, M. Krause a nommée *connexe dans l'espace* de $m^{\text{ième}}$ ordre et de $n^{\text{ième}}$ classe.

L'auteur étudie le connexe de deuxième ordre et de première classe, et dans cette étude il répond aux questions qui ont été posées par les recherches de Clebsch. A chaque point x correspond ici un faisceau de plans, dont le centre est dit le *point correspondant à x*; à chaque plan correspond une surface du second ordre. Il détermine les points qui coïncident avec leurs correspondants et les lieux des points qui correspondent aux points d'une droite ou d'un plan. Il résout ensuite la question des enveloppes des plans dont les surfaces correspondantes du connexe touchent une droite ou un plan. A cela se rattache la détermination de l'enveloppe des plans dont les surfaces correspondantes du connexe sont des cônes, et de celle du lieu des sommets de ces cônes. Ces deux surfaces, la première de quatrième classe, la seconde de quatrième ordre, sont étudiées en détail. L'auteur construit ensuite la forme appelée par Clebsch le *connexe conjugué*, et enfin il traite

---

(¹) Extrait du *Repertorium der Mathematik*.

(²) *Math. Annalen*, t. VI.

de la *coïncidence principale* (*Hauptcoincidenz*), c'est-à-dire de la figure $f(x, u) = 0$, $u = 0$.

Les recherches sur la coïncidence principale des connexes dans l'espace peuvent servir de base à l'étude des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre. Les formes à une série de coordonnées de points et une série de coordonnées de lignes conduisent aux équations aux différentielles totales.

Kantor (*S.*). — Sur la géométrie des groupes de points sur le cercle (323-330).

Lie (*S.*). — Contributions à la théorie des surfaces minima. — I. Recherches projectives sur les surfaces minima algébriques. (331-416).

Voir *Bulletin*, III_1, 186 et 189.

Klein (*F.*). — Sur l'abaissement des équations modulaires. (417-427).

Klein (*F.*). — Sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques. (428-471).

Voir *Bulletin*, III_1, 408.

Burmester (*L.*). — Sur la fixation de systèmes plans variables projectivement. (472-497).

Dans ce Mémoire, l'auteur établit les conditions pour qu'un système plan variable, dont les phases sont des systèmes doués de l'affinité collinéaire ou semblables, ait sa mobilité restreinte ou annulée. Les résultats et les moyens de determiner ces conditions sont exprimés par ce théorème fondamental :

« Si trois points d'un système plan collinéairement variable sont fixes, toutes les trajectoires des points mobiles du système sont des courbes correspondantes dans un système plan collinéaire et qui ont les trois points fixes pour points correspondants à eux-mêmes. »

L'auteur résout ensuite linéairement, dans l'ordre génétique, les problèmes suivants : « Fixer, sous des conditions suffisantes données, un système collinéairement variable, ou semblablement variable par affinité, ou semblablement variable. » Il démontre par là en même temps les propositions suivantes : « Un système plan, collinéairement variable, est en général immobile, 1° lorsque trois points du système sont fixes et que deux points sont assujettis à rester sur deux droites fixes; 2° lorsque deux points sont fixes et que quatre points sont assujettis à rester sur quatre droites fixes; 3° lorsqu'un point est fixe et que six points sont assujettis à rester sur six droites fixes; 4° lorsque huit points sont assujettis à rester sur huit droites. »

Outre les relations dualistiques fixes, l'auteur étudie les cas spéciaux les plus divers pour les positions particulières des droites et des points, ainsi que pour le système variant par affinité ou variant par similitude. Pour le système variable par affinité, le problème suivant est résolu par construction :

« Six points d'un système-plan variable par affinité étant donnés, on demande

de déterminer une phase de ce système dont les points homologues se trouvent respectivement sur six droites données. »

Pour terminer ce Mémoire, l'auteur résout ce problème plus spécial, proposé par Newton : « Étant donnés quatre points d'un système plan semblablement variable, déterminer une phase de ce système dont les points homologues soient respectivement situés sur quatre droites données. »

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur l'intégration et la différentiation des relations infinitaires. (498-506).

Voir la remarque précédente, relative à l'article de M. Stolz.

König (*J.*). — Démonstration du théorème de multiplication des déterminants. (507-509).

Lommel (*E.*). — Sur la théorie des fonctions de Bessel. (510-536).

I. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, qui s'intègrent par les fonctions de Bessel. — II. Sur les intégrales contenant des produits de deux fonctions de Bessel.

Dans la première Partie du Mémoire, l'auteur démontre ce théorème : « L'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dy}{dz} + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{\psi''}{\psi'} + \left(\psi^2 - \frac{4\nu^2-1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right] y = 0,$$

où φ et ψ désignent des fonctions de z tout à fait arbitraires, est complètement vérifiée par l'intégrale

$$y = \sqrt{\frac{\varphi\psi}{\psi'}}\,[\mathrm{A}J^{\nu}(\psi) + \mathrm{B}J^{-\nu}(\psi)]. \text{ »}$$

De ce théorème, on déduit une suite de théorèmes particuliers, par exemple lorsqu'on suppose φ constant. Ce même théorème sert aussi à établir une formule d'une grande généralité, au moyen de laquelle on peut développer l'intégrale du produit de deux fonctions de Bessel.

Gierster (*J.*). — Note sur les équations modulaires dans les transformations composées. (537-544).

Dans son Mémoire *Sur la transformation des fonctions elliptiques* (¹), M. F. Klein a établi quelles sont, parmi toutes les équations de transformation entre les invariants J, J' qui correspondent à des degrés de transformation égaux à des nombres premiers, toutes celles qui sont du genre $p = 0$. En se fondant sur les méthodes employées dans ces recherches, M. Gierster détermine, parmi les transformations de degré composé, toutes celles pour lesquelles le genre est $p = 0$, et donne pour ces transformations les équations complètement calculées, savoir, pour les degrés $n = 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$.

(¹) *Math. Ann.*, t. XIV. Voir *Bulletin*, III, 419, octobre 1879.

Thaer (*A.*). — Sur la possibilité de décomposer une ligne plane du troisième ordre en trois lignes droites. (545-556).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la décomposition d'une ligne plane du troisième ordre $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ en trois droites sont

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T} f(y_1, y_2, y_3) - \mathrm{S}\,\Delta\,(y_1, y_2, y_3) &= 0,\\
\mathrm{S} f^2(y_1, y_2, y_3) - 6\,\Delta^2(y_1, y_2, y_3) &= 0,\\
3\varphi(y_1, y_2, y_3) f(y_1, y_2, y_3) - \Delta^2(y_1, y_2, y_3) &= 0,
\end{aligned}
$$

y désignant un point quelconque n'appartenant pas à la courbe.

Braunmühl (*A. v.*). — Sur les enveloppes des lignes géodésiques. (557-566).

Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik* (p. 46), a le premier fait remarquer que les lignes géodésiques partant d'un même point peuvent avoir une enveloppe, et qu'aux points de contact avec cette enveloppe la ligne géodésique perd sa propriété d'être la ligne la plus courte, parce qu'en ces points la variation seconde s'évanouit; il indique en même temps que, sur les surfaces de courbure négative, il n'existe généralement aucune enveloppe. L'auteur du présent Mémoire examine d'abord comment les enveloppes peuvent exister sur une surface de révolution, et, en particulier, sur une surface de révolution du second degré, en considérant l'équation des lignes géodésiques sous la forme

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{r^2 - \nu^2}},$$

$y = f(r)$ étant l'équation de la courbe méridienne, φ l'angle de rotation du plan méridien, r_0 le rayon du cercle parallèle auquel commence la ligne géodésique, et ν le rayon d'un cercle parallèle tangent à cette ligne dans son parcours. La quantité r est le paramètre du système de lignes géodésiques partant du point $(r_0, \varphi = 0)$, et l'enveloppe de ce système s'obtient au moyen de l'équation

$$\mathrm{J} = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{(r^2 - \nu^2)^3}}.$$

Les valeurs réelles de r tirées de cette équation déterminent, conjointement avec la première, un point de l'enveloppe.

L'auteur discute d'abord les solutions sur l'ellipsoïde allongé et sur l'ellipsoïde aplati, et détermine ensuite la forme et la position de la courbe sur l'hyperboloïde à deux nappes, sur le cône et sur l'hyperboloïde à une nappe, à l'aide d'une déformation de la surface. Sur les hyperboloïdes, il ne se produit d'enveloppes qu'après que la courbe a passé par un point infiniment éloigné, de telle sorte que, dans le sens qu'y attache Jacobi, il n'existe pas d'enveloppe dans la partie de la ligne géodésique située à distance finie.

L'auteur étudie le paraboloïde, en le faisant résulter de l'ellipsoïde allongé; l'enveloppe se change alors dans le cercle parallèle à l'infini.

Neumann (*F.*). — Sur une nouvelle propriété des $\mathrm{Y}^{(n)}$ de Laplace, et son application à la représentation analytique des phéno-

mènes qui sont fonctions de la longitude et de la latitude géographiques. (567-576).

Cet article a été publié la première fois en 1838, dans les *Astronomische Nachrichten*, de Schumacher. L'auteur y indique la méthode qu'il faut suivre pour qu'une fonction dont on a obtenu par l'observation certaines valeurs pour des valeurs déterminées de la longitude et de la latitude puisse être représentée par une série procédant suivant les fonctions $Y^{(n)}$. En terminant, l'auteur montre comment la représentation, contenue dans sa méthode, d'une fonction d'une seule variable au moyen des fonctions sphériques conduit immédiatement à la formule donnée par Gauss pour le calcul approximatif d'une intégrale ([1]).

Ax. H.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN. — Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe ([2]).

Tome LXXVI; juin-décembre 1877.

Finger (*J.*). — Sur l'influence de la rotation de la Terre sur les mouvements progressifs parallèlement à la surface sphéroïdale de la Terre suivant des trajectoires quelconques, en particulier sur les courants des rivières et sur les vents. (67-103).

Hornstein (*C.*). — Sur la dépendance probable du vent et des périodes des taches solaires. (104-116, 1 pl.).

Pelz (*K.*). — Sur une nouvelle démonstration du théorème fondamental de Pohlke. (123-138, 1 pl.).

L'énoncé de ce théorème est le suivant :

« Trois droites de longueurs quelconques, menées dans un plan par un même point et faisant entre elles des angles quelconques, forment une projection parallèle de trois segments égaux pris sur trois axes rectangulaires à partir de l'origine, à la condition qu'une seule des longueurs ou un seul des angles puisse s'annuler. »

Igel (*B.*). — Théorèmes et démonstrations sur la théorie des résultantes. (145-168).

Winckler (*Ant.*). — Sur une relation correspondante aux équations différentielles linéaires du second ordre. (173-178).

([1]) *Comm. Soc. Reg. Göt. recent.*, t. III.

([2]) Voir *Bulletin*, II_1, 228.

Zelbr (*K.*). — Sur l'orbite de la planète (162) Laurentia. (843-851).

Pfaundler (*L.*). — Sur l'application du principe de Doppler au mouvement de translation des molécules de gaz lumineuses. (852-858).

Weyr (*Ed.*). — Détermination des surfaces dont des portions quelconques sont projetées de deux points fixes par des cônes dont les ouvertures sont dans des rapports donnés. (859-864).

Hann (*J.*). — Sur la pression atmosphérique à Vienne, avec un Appendice sur la température à Vienne. (895-926).

Streintz (*H.*) et *Streintz* (*Fr.*). — Les contre-courants électriques des tiges de fer magnétisées transversalement. (946-962).

Tome LXXVII; janvier-mai 1878.

Mach (*E.*), *Tumlirz* (*O.*) et *Kögler* (*C.*). — Sur la vitesse de propagation des ondes des étincelles. (7-34).

Wenzel (*Ed.*). — Détermination de l'orbite de la comète II de l'année 1874. (93-108).

Ettingshausen (*A. v.*). — Sur les expériences électrodynamiques fondamentales d'Ampère. (109-134, 1 pl.).

Drasch (*H.*). — Construction des tangentes à la ligne de contact d'une surface de révolution avec la développable circonscrite menée par un de ses points. (174-182, 1 pl.).

Haberditzl (*A.*). — Sur le ton variable observé par Dvořak. (204-206).

Pelz (*C.*). — Compléments ou méthode générale pour déterminer les foyers des contours des surfaces du second degré. (259-288, 1 pl.).

Suite d'un Mémoire publié par l'auteur au Tome LXXV des *Sitzungsberichte*.

Mach (*E.*). — Nouvelles expériences pour la vérification de la théorie de Doppler sur la variation de ton et de couleur produite par le mouvement. (293-310).

[redacted]romètre anéroïde absolu. (635-669, 2 pl.).

[redacted] la température de Vienne, d'après cent années [redacted]-736).

[redacted] une équation aux différentielles partielles [redacted]748-846).

[redacted]

$$\ldots x + b_2 y + b_3 z - x(a + a_1 x + a_2 y + a_3 z)] \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\ldots y + c_3 z - y(a + a_1 x + a_2 y + a_3 z)] \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\ldots y + e_3 z - z(a + a_1 x + a_2 y + a_3 z),$$

comme une généralisation de l'équation de Jacobi. En

$$x = \frac{u}{t}, \quad y = \frac{v}{t}, \quad z = \frac{w}{t},$$

...tion se ramène à celle du système d'équations simul-

$$\ldots + a_3 w = \frac{du}{bt + b_1 u + \ldots} = \frac{dv}{ct + \ldots} = \frac{dw}{et + \ldots}.$$

...ur la dépendance de n droites quelconques ...7). — II. Sur les propriétés du triangle et ...de Steiner qui s'y rattachent. (758-767). — ...on de théorèmes connus sur le triangle aux ...quelconques de n sommets inscrits à une ... — IV. Sur le tétragone et le quadrilatère ...et sur le quadrilatère complet en général.

...ndeur et position des axes d'élasticité dans

...ur quelques problèmes de la théorie de la ... sur une nouvelle méthode pour observer ...moyen d'une lecture dans un miroir, sans ...llant d'un miroir de masse sensible. (815-

...ction élastique. — II. Sur la méthode de lecture par ...miroirs.

» Cayley et Hermite ont fait connaître la formation de ces combinants (*Journal de Borchardt*, t. 57, p. 139 et 371). Pour C_6, ils parviennent, par des voies différentes, au même invariant, et pour C_{12} à des invariants différents. Tous deux se servent du même mode de démonstration, reposant sur ce principe que tout invariant d'un système simultané de trois formes quadratiques doit se changer en une forme cubique ternaire de même nature, si l'on veut que les trois formes soient les dérivées de celle-là. Maintenant, d'après Aronhold, le discriminant d'une forme cubique étant formé au moyen de ses invariants fondamentaux d'après la formule

$$(2) \qquad \Delta = T^2 - 64 S^3,$$

il ne s'agit plus, en vertu du principe que nous venons de rappeler, que de faire voir que (1) se change en (2), si l'on introduit à la place des trois formes les dérivées d'une forme cubique. Cayley démontre qu'il en est ainsi, en prenant le cas particulier des formes

$$f_1 = x_1^2 + 2 l x_2 x_3,$$
$$f_2 = x_2^2 + 2 l x_1 x_3,$$
$$f_3 = x_3^2 + 2 l x_1 x_2,$$

calculant pour ces formes les invariants C_{12} et C_6, et arrivant de cette manière à la relation (1). Mais Cayley, non plus qu'Hermite, n'ayant pas suffisamment mis en lumière la véritable nature et l'étroite liaison de leurs formations d'invariants avec les cas analogues de la théorie des formes cubiques ternaires, et justifiant leurs lois de formation par la simple démonstration de la formule (1), il m'a semblé préférable de suivre la marche inverse et de démontrer l'exactitude des formations d'invariants en partant de leur dépendance avec les formations analogues dans la théorie des formes cubiques ternaires, pour en déduire ensuite la relation (1). »

Margules (*Max.*). — Sur la théorie et l'application des rotations électromagnétiques. (805-818).

Mach (*E.*). — Sur la marche des ondes d'étincelles dans le plan et dans l'espace. (819-838).

Ciamician (*G.*). — Sur l'influence de la pression et de la température sur les spectres des vapeurs et des gaz. (839-841).

Tome LXXVIII; juin-décembre 1878.

Boltzmann (*L.*). — Nouvelles remarques sur certains problèmes de la Théorie mécanique de la chaleur. (7-46).

I. Sur la relation entre le deuxième théorème fondamental et les théorèmes sur la probabilité de la distribution de la force vive. — II. Sur l'équilibre de la chaleur dans un gaz pesant.

Hočevar (*Fr.*). — Sur l'intégration d'un système d'équations simultanées. (47-58).

« Lorsqu'on veut généraliser, en augmentant le nombre des variables indépen-

...ar (*J.*). — Sur la déclinaison et l'inclinaison magnétiques à ...nne, de 1852 à 1871. (311-333).

...n (*J.*). — Sur la diffusion de l'acide carbonique à travers ...u et l'alcool. (371-409).

...tz (*Fr.*). — Sur la force électromotrice des métaux dans les ...tions aqueuses de leurs sulfates, nitrates et chlorures. (410-...).

... (*G.*) et *Biermann* (*O.*). — Sur la détermination des résis-...s de conductibilité par la méthode électrostatique. (463-...).

... (*C.*). — Principes de la théorie actinique de la chaleur. ...-500).

... (*St.*). — Marche diurne et annuelle de la température à ...Saïd et à Suez. (533-568).

... (*St.*). — Moyennes normales de cinq jours, en degrés ...mur, pour vingt-quatre stations, rapportées à la période ...gt années 1848-1867. (569-580, 3 pl.).

... (*R. v.*). — Sur les propriétés spéciales de certains instru-...astronomiques. (581-591).

...tzl (*A.*). — Sur la rotation acoustique continue et ses ...is avec le principe des aires. (641-646).

... (*P.-G.*). — Sur la température moyenne de Kremsmünster. ...8).

... (*Fr.*). — Sur le volume relatif des atomes. (729-745).

... (...). — Sur l'orbite de la comète II de l'année 1873. (751-...

... — Sur les invariants simultanés dont se compose la ré-...de trois formes quadratiques ternaires. (783-804).

...la découverte de Sylvester, on sait que la résultante de trois formes ... ternaires se compose comme il suit :

$$12R = 16C_{12} - C_6^2,$$

...nt des combinants, l'un du douzième, l'autre du sixième degré.

Mach (*E.*) et *Gruss* (*G.*). — Étude optique des ondes d'étincelles. (467-480).

Klemenčič (*I.*). — Observations sur la réaction élastique dans le verre. (481-499, 1 pl.).

Mach (*E.*) et *Weltrubský* (*J. v.*). — Sur les formes des ondes d'étincelles. (551-560).

Exner (*Fr.*) et *Goldschmiedt* (*G.*). — Influence de la température sur la conductibilité galvanique des fluides. (575-585, 4 pl.).

Lecher (*E.*). — Détermination expérimentale de la chaleur de combinaison de l'acide carbonique et de l'ammoniaque dans le carbaminate d'ammoniaque. (711-728).

Mach (*E.*) et *Doubrava* (*S.*). — Sur le passage violent de l'électricité à travers le verre. (729-732).

Boltzmann (*L.*). — Sur la relation des phénomènes de diffusion avec le second théorème fondamental de la Théorie mécanique de la chaleur. (733-763).

Gegenbauer (*L.*). — Sur la théorie des quadratures mécaniques. (768-778).

$F(x)$ étant une fonction développable suivant les puissances entières et positives de x, on se propose de calculer approximativement la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \chi(x)\,F(x)\,dx,$$

au moyen des valeurs que la fonction $F(x)$ prend pour les n valeurs de l'argument $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les r quantités $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont données; les autres $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ doivent être déterminées de manière que l'erreur commise en faisant usage de la formule d'approximation obtenue s'annule pour des fonctions $F(x)$ du degré le plus élevé possible. Tel est le problème traité dans cette Note.

Margules (*Max.*). — Remarque sur les formules fondamentales d'électrodynamique de Stefan. (779-788).

Kantor (*S.*). — Sur la dépendance de n droites quelconques dans le plan. I (suite). (789-796). — Sur le pentagramme complet et certaines séries de courbes qui s'y rapportent. II (suite). (797-825).

Ciamician (*G.*). — Sur l'influence de la densité et de la température sur les spectres des vapeurs et des gaz. (867-890, 5 pl.).

Weyr (*Em.*). — Représentation sur une conique d'une courbe gauche de quatrième ordre avec un point double. (891-895).

Kantor (*S.*). — Formules métriques relatives au faisceau de coniques à quatre points fondamentaux réels. (905-915).

Holetschek (*J.*). — Détermination de l'orbite de la comète VI de l'année 1874. (916-934).

Klemenčič (*I.*). — Contribution à la connaissance du frottement intérieur dans le fer. (935-942).

Stefan (*J.*). — Sur la diffusion des fluides. (957-975).

Zelbr (*K.*). — Détermination de l'orbite de la comète III de l'année 1877. (976-984).

Lang (*V. v.*). — Nouvelles observations sur les colonnes d'air résonnantes. (988-999, 1 pl.).

Kühnert (*Fr.*). — Sur l'orbite de la planète (153) Hilda. (1013-1042).

Peschka (*G.*). — Démonstration élémentaire du théorème fondamental de l'axonométrie de Pohlke. (1043-1055, 1 pl.).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome XCI; 1880, 2e semestre.

N° 1; 5 juillet.

Lœwy. — Étude de la variation de la ligne de visée, faite au grand cercle méridien de l'Observatoire de Paris, construit par M. Eichens, au moyen d'un nouvel appareil. (6).

---

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 89.

Janssen. — Sur la photographie de la chromosphère. (12).

Villarceau (*Y.*). — Sur l'intégration des équations linéaires au moyen des sinus des ordres supérieurs. (13).

Jamin. — Sur les conséquences de l'expérience de MM. Lontin et de Fonvielle. (14).

Chevreul. — Sur la vision des couleurs. (16).

Le Clerc et *de Bernardières.* — Détermination de la différence de longitude entre Paris et Bonn. (36).

Escary. — Sur quelques remarques relatives à l'équation de Lamé. (40).

Turquan (*L.*). — Intégration d'un nombre quelconque d'équations simultanées entre un même nombre de fonctions de deux variables indépendantes et leurs dérivées partielles du premier ordre. (43).

Thalén (*R.*). — Sur les raies brillantes spectrales du métal scandium. (45).

Trouvé (*G.*). — Perfectionnements apportés aux bobines du genre Siemens. (48).

N° 2; 12 juillet.

Tisserand et *Bigourdan.* — Observations de la comète *b* 1880 (Schæberle), faites à l'Observatoire de Paris. Éléments de la comète *b* 1880; par M. Bigourdan. (71).

Faye. — Sur le pendule. (75).

Pepin (le P.). — Nouveaux théorèmes sur l'équation $ax^4+by^4=z^2$. (100).

Ces théorèmes ont pour objet des cas fort étendus, où l'équation précédente est impossible en nombres entiers, tandis que l'équation quadratique correspondante admet une infinité de solutions. Chacun d'eux comprend une série indéfinie d'équations de la forme indiquée, ayant un coefficient commun, et dont l'autre coefficient est successivement égalé à tous les nombres premiers renfermés dans une même forme quadratique.

Escary. — Sur quelques remarques relatives à l'équation de Lamé. (102).

Govi (*G.*). — Nouvelle méthode pour déterminer la longueur du pendule simple. (105).

Viry (*C.*). — Méthode synthétique rapide pour établir les formules fondamentales relatives aux changements d'état. (106).

Crookes. — Sur la constitution de la matière et l'état ultra-gazeux. (108).

Laurent (*L.*). — Sur les lampes monochromatiques. (112).

Ader. — Effets téléphoniques résultant du choc des corps magnétiques. (115).

N° 3; 19 juillet.

Bigourdan (*G.*). — Éphéméride de la comète *b* 1880 (Schæberle). (153).

Dedekind (*R.*). — Réponse à une remarque de M. Sylvester, concernant les Leçons sur la théorie des nombres de Dirichlet. (154).

Tacchini. — Sur la cause des spectres fugitifs observés par M. Trouvelot sur le limbe solaire. (156).

Mascart. — Sur l'électricité atmosphérique. (158).

Joubert (*J.*). — Sur les courants alternatifs et la forme électromotrice de l'arc électrique. (161).

Wite (*A.*). — Sur un nouveau thermomètre à air. (164).

N° 4; 26 juillet.

Villarceau (*Y.*). — Note sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. (195).

Farkas (*J.*). — Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. (209).

Appell. — Sur la transformation des équations différentielles linéaires. (211).

Si $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0$ est une équation différentielle linéaire dont

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ constituent un système fondamental d'intégrales, on peut l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction z, dé l'équation

$$z = f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_1} y_1}{dx^{m_1}}, y_2, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_2} y_2}{dx^{m_2}}, \ldots, y_n, \frac{dy_n}{dx}, \ldots, \frac{d^{m_n} y}{dx^{m_n}}\right.$$

où f est une fonction algébrique entière des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et dérivées ayant pour coefficients des fonctions données de x. M. Appell ap quelques cas simples cette transformation.

Picard (*E.*). — Sur une propriété des fonctions et des co algébriques. (214).

Existe-t-il d'autres courbes algébriques que celles du genre 0 ou 1, d coordonnées soient susceptibles de s'exprimer par des fonctions uniform paramètre à discontinuités exclusivement polaires? Telle est la question pose l'auteur : il démontre que la réponse est négative dans le cas des hyperelliptiques.

Lodin. — Sur les causes d'altération intérieure des chaudi vapeur. (217).

Martin (*A.*). — Sur une méthode d'autocollimation direct objectifs et son application à la mesure des indices de réfra des verres qui les composent. (219).

Martin (*A.*). — Sur l'emploi du sphéromètre. (221).

Lemström (*S.*). — Sur les causes du magnétisme terrestre. (

Gérard-Lescuyer. — Sur un paradoxe électrodynamique. (

N° 5; 2 août.

Farkas (*J.*). — Sur la théorie des sinus des ordres supéri (278).

Hautefeuille et *Chappuis* (*J.*). — Recherches sur l'effluve trique. (281).

Arsonval (*A. d'*). — Recherches sur les piles. (284).

Dufet (*H.*). — Sur les propriétés optiques des mélanges de isomorphes. (286).

N° 6; 9 août.

Tacchini (*P.*). — Résultats des observations de taches et facules solaires pendant les deux premiers trimestres de 1880. (316).

Brioschi. — Sur une classe d'équations linéaires du second ordre. (317).

Cette classe d'équations contient, entre autres, l'équation de Lamé, celles de M. Hermite et de M. Gyldén, celles enfin étudiées par l'auteur dans deux articles publiés dans les *Annali di Matematica* (t. IX, X).

On les obtient comme il suit :

$$y'' + py' + qy = 0$$

étant une équation différentielle linéaire, dont y_1, y_2 sont deux solutions particulières, si l'on pose $y_1 y_2 = z$, on a

$$y_1 = \sqrt{z}\, e^{\frac{1}{2}CZ(x)}, \quad y_2 = \sqrt{z}\, e^{-\frac{1}{2}CZ(x)},$$

où C est une constante et où

$$Z(x) = \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{z}\, dx.$$

Soit maintenant $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ et e une racine quelconque de l'équation $\varphi(x) = 0$, on fera

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\rho}{x-e}\right), \quad q = \frac{\alpha x + \beta}{\varphi},$$

ρ, α et β désignant trois indéterminées.

Righi. — Expériences sur la décharge dans les gaz raréfiés. (319).

Neyreneuf. — Sur quelques propriétés des flammes. (321).

N° 7; 16 août.

Appell. — Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables. (364).

Suite des Communications insérées dans les *Comptes rendus* (t. XC, p. 296, 731, 977). L'auteur donne une suite de formules analogues à celles que Gauss (*Werke*, III Bd, p. 28, 220, ...) a données pour les fonctions hypergéométriques d'une seule variable.

Pepin (le P.). — Sur quelques tentatives de démonstration du théorème de Fermat. (366).

Cette Note est relative à la Communication du 14 juin 1880; elle rappelle le

jugement porté il y a longtemps par Libri (*Journal de Crelle*, t. 9), sur monstrations ayant la même base que celle qui fait l'objet de cette Commun

Thollon (*L.*). — Observation faite sur un groupe de raies d spectre solaire. (368).

Crafts (*J.*). — Sur la cause des variations des points fixes da thermomètres. (370).

N° 8; 23 août.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, f l'Observatoire de ich (transmises par l'Astronome l M. Airy) et à itoire de Paris pendant le deu trimestre de . (402).

Quet. — Le Soleil induirait sensiblement la Terre, alors que son pouvoir magnétique serait simplement égal à ce notre globe. Induction le la Lune par la Terre et var diurne lunaire des bou les terrestres. (409).

Picard (*P.*). — ve au mouvement alternatif d'un chine magnéto-éle actionnée par le courant d'une chine dynamo-électrique. (411).

Crafts (*J.*). — Sur les variations du coefficient de dilatati verre. (413).

N° 9; 30 août.

Amagat (*E.*). — Sur la dilatation et la compressibilité d sous de fortes pressions (428).

Thollon (*L.*). — Observation d'une protubérance solaire le 3 1880. (432).

N° 10; 6 septembre.

Stephan. — Planète (217), découverte par M. Coggia, à l'O vatoire de Marseille, le 30 août 1880. (459).

Tacchini (*P.*). — Observations des protubérances, des facu

des taches solaires pendant le premier semestre de l'année 1880 (466).

Joubert (*J.*). — Sur la loi des machines magnéto-électriques. (468).

Pernet (*J.*). — Sur les variations des points fixes dans le thermomètre à mercure et sur le moyen d'en tenir compte dans l'évaluation des températures.

N° 11; 13 septembre.

Bigourdan (*G.*). — Observations de la comète Faye et de la comète *b* 1880 (Schæberle), faites à l'Observatoire de Paris. (483).

Cruls (*L.*). — Sur le mouvement orbital probable de quelques systèmes binaires du ciel austral. (485).

Cruls (*L.*). — Recherches spectroscopiques sur quelques étoiles non encore étudiées. (486).

Thollon (*L.*). — Sur quelques phénomènes solaires observés à Nice. (487).

Joubert (*J.*). — Sur la loi des machines électromagnétiques. (503).

N° 12; 20 septembre.

Bigourdan. — Observations de la nouvelle planète Coggia (217), faites à l'Observatoire de Paris. (516).

Govi (*G.*). — Sur une nouvelle expérience destinée à montrer le sens de la rotation imprimée par les corps à la lumière polarisée. (517).

Thollon (*L.*). — Étude sur les raies telluriques du spectre solaire. (520).

N° 13; 27 septembre.

Perrier (*L.*). — Manomètre à tension de vapeur pour analyser les liquides et mesurer les pressions. (538).

Gilbert (*Ph.*). — Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (541).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, $2n$ variables quelconques entre lesquelles existent m équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots. \quad F_m = 0,$$

d'où l'on tire les valeurs de m quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ en fonction des autres, sous la forme

$$p_1 = \lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n),$$
$$p_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad p_m = \lambda_m.$$

Désignons par Δ le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_m} & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

et par Δ_{ik}^{rs} le mineur de ce déterminant résultant de la suppression des colonnes de rang r et s et des lignes de rang i et k. On a, pour deux indices quelconques i et k pris dans la suite $1, 2, \ldots, m$, l'égalité

$$(p_i - \lambda_i, p_k - \lambda_k) = \frac{(-1)^{i+k}}{\Delta} \sum_{r,s} \Delta_{ik}^{rs}(F_r, F_s),$$

où le symbole (φ, ψ) désigne la fonction de Poisson, formée avec deux fonctions φ, ψ des $2n$ variables, et $\sum_{r,s}$ une somme qui s'étend à toutes les combinaisons deux à deux des indices r, s pris dans la suite $1, 2, \ldots, m$.

Dans une Communication postérieure, M. Gilbert expose le parti qu'on peut tirer de cette égalité pour l'exposition de la méthode qu'a donnée Jacobi pour l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.

Farkas. — Sur la théorie des sinus des ordres supérieurs. (545).

Govi. — Sur l'inventeur des lunettes binoculaires. (547).

J. T.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome LXXXVII; 1879.

Boldt (*G.-G.*). — Mémoire sur les équations résolubles algébriquement. (1-25).

I. Des équations dont le degré μ est un nombre premier.

Après avoir démontré trois théorèmes sur les racines de ces équations, l'auteur fait voir que l'expression

$$s = \frac{1}{\mu^\mu}(x_0 + \alpha^{-1}x_1 + \alpha^{-2}x_2 + \ldots + \alpha^{-(\mu-1)}x_{\mu-1})^\mu,$$

où α est une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$ sont les racines de l'équation proposée, n'admet que $\mu - 1$ valeurs pour toutes les valeurs dont les radicaux sont susceptibles. Ces valeurs sont, par conséquent, racines d'une équation du degré $\mu - 1$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités qui entrent dans l'équation proposée. D'ailleurs, on voit aisément que chacune des $\mu - 1$ valeurs en question s'exprime rationnellement par une quelconque d'entre elles et que s est racine d'une équation abélienne dont le degré est $\mu - 1$ ou un diviseur de $\mu - 1$.

II. Des équations dont le degré est $\mu^i \mu_1^{i_1} \mu_2^{i_2} \ldots \mu_n^{i_n}$, les nombres $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant premiers et différents entre eux.

III. Des équations dont le degré est μ^n, μ étant un nombre premier.

IV. Résumé simple : « Toutes les fois qu'une équation irréductible du degré μ^n est résoluble algébriquement, elle peut ou être décomposée en μ^p équations, chacune du degré μ^{n-p}, dont les coefficients sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une équation dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée, ou, si cela n'a pas lieu, l'équation proposée peut être décomposée en μ équations, chacune du degré μ^{n-1}, dont les coefficients sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une équation du degré μ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une racine d'une équation du degré $\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée. Dans ce dernier cas, on peut représenter les racines sous la forme

$$a_0 + r_1^{\frac{1}{\mu}} + r_2^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + r_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}},$$

où a_0 désigne une fonction rationnelle des quantités données qui entrent dans l'équation proposée, et où $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu^n-1}$ sont racines d'une équation du degré $\mu^n - 1$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée. »

Thomae (*J.*). — Sur les fonctions qui sont représentées par des

séries de la forme

$$1+\frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''}+\frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{p''}\frac{p''+1}{q''+1}+\ldots$$

(26-73).

La recherche de fonctions définies par des postulats quelconques analytique à gagner des représentations explicites ou à développer les propriétés qu'on a *discontinuités* et *périodicité des fonctions*. Une telle recherche n'atteint un entièrement satisfaisant que quand elle réussit à établir un système de prop qui définissent complètement la fonction sans supposer qu'il soit possible de présenter. C'est ce qui a eu lieu dans plusieurs cas avec un plein succès dep découverte de la méthode de Cauchy, et, si une telle définition, par des dis nuités et par la périodicité, a été suffisante, elle a eu l'effet d'éclaircir ampl l'essentiel des fonctions considérées, d'ouvrir des points de vue dominants po représentations, s'il y en avait, et d'augmenter, dans beaucoup de cas, l'effect formules.

C'est d'après cette méthode que M. Thomae aborde la recherche de la séri désigne par la lettre F. Après un résumé des propriétés qui servent à défi fonctions à rechercher (n° 1), il montre (n° 2) que la fonction tellement d satisfait à une formule de récursion de second ordre à coefficients complèt déterminés. Mais, comme les intégrales de cette formule récurrente possèdent les propriétés demandées, l'existence de la fonction, qui dépend d'une m linéaire et homogène de deux fonctions periodiques arbitraires, se trouve ét montrée par là. Dans le n° 3, l'auteur effectue l'intégration de la formule récu au moyen des séries F et gagne des représentations pour chacune des douze br définies dans une proposition précédente. Cependant ces représentations n pas toujours convergentes et ne peuvent donc être employées en tous cas; les n°s 4, 5, 6 donnent-ils pour chaque branche dix représentations différent somme cent vingt séries, dont soixante-quatre sont convergentes pour tout valeurs de la variable *n*, tandis que les paramètres sont tenus à satisfaire diffe conditions. Selon leur caractère à l'infini, les branches se divisent en deux cl nommées *positive et négative*. Le n° 7 montre la connexion qui existe ent branches d'une même classe, et le n° 8 celle qui existe entre des branches de c différentes. Le n° 9 a pour objet la recherche des valeurs de la série F lo quelques-uns des paramètres tendent à croître au-dessus de toute limite : l leurs asymptotiques d'une fonction étant des propriétés les plus importantes, teur en établit un grand nombre dans ce numéro. Une méthode très analo celle appliquée par Riemann à la recherche des séries de Gauss conduit (n° 1 théorème général que « trois séries F, dont les paramètres ne diffèrent q nombres entiers, sont liées par une relation linéaire homogène à coefficien tionnels », et le n° 11 développe quelques-unes de ces relations. Si les differ des paramètres sont des nombres entiers *indéterminés*, il n'est pas, en général, sible de représenter les coefficients explicitement. Toutefois, le n° 12 est con à un cas où ces coefficients sont fournis par les réduites d'une fraction con qui, sous certaines conditions, représente le quotient de deux series F. Ent n° 13 fait voir comment la série F se prête à être mise sous la forme d'intég définies.

Ainsi les séries F présentent un parallélisme frappant avec les fonctions r

sentées par les séries de Gauss et traitées d'après les méthodes de Riemann, et encore avec celles définies par la série de Heine, recherchées par M. Thomae.

Cayley (A.). — Sur les fonctions ϑ doubles. (74-81).

Le Mémoire se rapporte à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a-y)(b-y)(c-y)(d-y)}}=0$$

et en développe l'intégrale sous une forme propre à servir dans la théorie des fonctions ϑ doubles.

Cayley (A.). — Sur un théorème relatif aux covariants. (82-83).

Hermes. — Réduction à des équations linéaires du problème de la division du cercle (pour des nombres premiers de la forme 2^m+1). (84-113).

Le Mémoire enseigne à trouver directement, et sans trop de travail, certains nombres dont on a besoin pour effectuer la division du cercle en n parties égales, où $n=2^m+1$, $m=2^\mu$. Les résultats obtenus par l'auteur ne se prêtent pas à être vérifiés immédiatement par les formules connues pour les petits nombres n, parce que, dans ces cas, il faut les modifier préalablement. L'analogie des polygones réguliers pour $\mu=0, 1, 2$ n'a donc pu rien faire deviner pour les nombres $n=257$ et 65537, et il est probable que cette circonstance a empêché les géomètres de découvrir les formules inconnues jusqu'à présent dans une théorie qui a été approfondie par beaucoup d'auteurs.

Kiepert (L.). — Résolution des équations du cinquième degré. (114-133).

Voici les résultats obtenus par M. Kiepert :

Soit proposée l'équation

$$x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0.$$

Posons

$$x^2-ux+v=z\quad\left(=-\frac{\alpha+\beta r}{3+\Delta y^2}\right),$$

et déterminons les inconnues u et v de manière à faire évanouir les coefficients de z^4 et z^3 dans l'équation du degré 5 pour z. Cela conduit aux équations

$$(2A^2-5B)u^2+(4A^3-13AB+15C)u+(2A^4-8A^2B+10AC+3B^2-10D)=0,$$
$$5v=-Au-A^2+2B.$$

On obtiendra cette équation pour z

$$z^5+5lz^2-5mz+n=0,$$

où

$$5l=-C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3,$$
$$5m=-D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)+E(5u^3+4Au^2+3Bu+2C)+5v^4+10lv,$$
$$n=-E(u^5+Au^4+Bu^3+Cu^2+Du+E)-v^5-5lv^2+5mv.$$

Après avoir cherché une valeur α de l'équation quadratique

$$(l^4 - lmn + m^3)\alpha^2 + (11 l^3 + ln^2 - 2m^2 n)\alpha - 27 l^2 n + 64 l^2 m^2 + mn^2 =$$

calculons

$$\pm 12 g_2 = l\alpha^2 + 3m\alpha - n,$$
$$\pm \Delta = l^2[(ln - m^2)\alpha + mn],$$
$$\beta^2 = \pm l^2(l^2\alpha^2 + 11 lm\alpha + 64 m^2 - 27 ln),$$

et cherchons, au moyen de l'invariant absolu $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, la grandeur $e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$
Jacobi). Déterminons f et f_r ($r = 0, 1, 2, 3, 4$) à l'aide des équations

$$B.f = \sqrt{5}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}, \quad B.f_r = -\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}.$$

$$B = \Delta^{\frac{1}{6}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}.$$

Posant

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}[(f^2 - f_r^2)(f_{r+2}^2 - f_{r+3}^2)(f_{r+4}^2 - f_{r+1}^2)]^{\frac{1}{2}},$$

on aura

$$z_r = -\frac{\alpha + \beta y_r}{3 + \Delta y_r^2}.$$

Les racines de l'équation générale du cinquième degré seront

$$x_r = -\frac{E + (z_r - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_r - v)^2(2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_r - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_r - v)^2} \quad (r = 0, 1,$$

Cette résolution, tout intéressante qu'elle soit, dépend encore de la résolution
équation quadratique en u et ne satisfait donc pas encore, à cet égard, aux
tions posées par M. Kronecker.

Cayley (*A.*). — Sur les fonctions ϑ triples. (134-138).

Schwarz (*H.-A.*). — Sur les équations algébriques à deux
riables qui sont susceptibles de se changer en elles-même
moyen d'une infinité de transformations rationnelles et un
mément invertibles. (139-145).

Le Mémoire a pour objet ce théorème : « Si une équation algébrique irrédu
à deux variables, jouit de la propriété de se changer en elle-même par un
ceau de transformations rationnelles et uniformément invertibles, le nomb
fonctions intégrales qui sont indépendantes les unes des autres, qui restent p
finies et qui se ramifient de la même manière que les fonctions algébriqu
appartiennent, d'après les définitions de Riemann, à la même classe que l'éq
considérée, sera ou zéro ou l'unité. » On tire de ce théorème, entre autres, l
position suivante : « Si deux courbes algébriques ont une relation, l'une

l'autre, telle qu'il soit possible, d'une infinité de manières, d'établir entre les points des deux courbes une correspondance mutuelle et uniforme au moyen d'équations algébriques, les coordonnées d'un point quelconque de l'une et de l'autre sont ou fonctions rationnelles ou fonctions elliptiques uniformes d'un paramètre. »

Schwarz (*H.-A.*). — Sur quelques surfaces minima non algébriques qui contiennent un faisceau de courbes algébriques. (146-160).

Le Mémoire fait suite à deux autres du même auteur et publiés au Tome 80 du *Journal*. Il s'agit ici du problème de déterminer toutes les surfaces minima qui contiennent un faisceau de courbes algébriques. Ce n'est qu'une partie de la solution de la question générale que développe M. Schwarz. Cependant son analyse est assez générale pour qu'il soit possible d'en tirer toutes les surfaces minima jouissant de la propriété demandée et que l'on connait jusqu'à present.

Cayley (*A.*). — Sur le tétraédroïde comme cas particulier de la surface à seize points nodaux du quatrième ordre. (161-164).

M. Cayley développe la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface kummérienne à seize points nodaux se réduise à un tétraédroïde (c'est-à-dire surface changeable, par une transformation projective, en une surface des ondes de Fresnel), condition qui fait voir que, pour cette surface particulière, les seize plans singuliers se partagent en quatre systèmes chacun de quatre plans, tels que les quatre plans d'un même système se coupent dans un seul point. L'auteur s'est occupé du même problème dans un autre Memoire, publié au Tome 65 du Journal, sans s'apercevoir alors du simple résultat qu'il vient de trouver maintenant : c'était qu'il ne possédait pas encore la forme simplifiée de l'équation de la surface communiquée par lui au Tome 73 du Journal.

Cayley (*A.*). — Algorithme pour les caractéristiques des fonctions $\mathfrak{S}$ triples. (165-169).

Borchardt (*C.-W.*). — Addition au Mémoire précédent. (169-171).

Baltzer (*R.*). — Observation sur un théorème de Fermat. (172).

Fermat a cru que, m étant une puissance de 2, 2^m+1 serait un nombre premier; toutefois il s'exprime sur cet objet avec précaution (*Œuvres*, p. 162). « Mais je vous avoue tout net (car par avance je vous avertis que, comme je ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne sais, je dis avec la même franchise ce que je ne sais pas) que je n'ai pu encore démontrer l'exclusion de tous les diviseurs en cette belle proposition que je vous avais envoyée, et que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 7, 257, 65537, etc.; car, bien que je réduise l'exclusion à la plupart des nombres, et que j'aie même des raisons probables pour le reste, je n'ai pu encore démontrer nécessairement la vérité de cette proposition. »

Königsberger (*L.*). — Sur l'extension du principe de transformation de Jacobi. (173-189).

Le principe employé par Jacobi pour transformer une différentielle ellipt première espèce en une autre de même nature semblait être susceptible d'être aux transcendantes ultérieures, car Jacobi lui-même avait engagé Richel chercher des substitutions quadratiques qui transforment une intégrale l liptique en une somme de deux intégrales de même nature. M. Königs reprenant la question générale d'un plus haut point de vue, démontre transformation générale, prise dans le sens défini par Jacobi, n'est possi pour les intégrales elliptiques et pour les intégrales hyperelliptiques de ordre, les solutions du polynôme R(z) étant arbitraires. Une Commun faite à l'auteur de la part de M. Weierstrass mentionne que ce géomètre a aussi, prouvé d'une manière différente l'impossibilité de la transformatio les cas de $p > 2$, où p est l'ordre de la transformation.

Cayley (A.). — Sur les fonctions ϑ triples. (190-198).

Kiepert (L.). — Sur la théorie de la transformation des fon elliptiques. (199-216).

Jacobi a énoncé (t. III, p. 308) le théorème que « le multiplicateur M qui sente à l'occasion de la transformation du degré n, n étant premier, satisfa équation du degre $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelle et que, M, M′, M″, …, $M^{(n)}$ étant les racines de cette équation, il existe $\frac{1}{2}$ relations linéaires entre les quantités $\sqrt{M}, \sqrt{M'}, \sqrt{M''}, \ldots \sqrt{M^{(n)}}$ ». Jacobi tient rème pour un des plus importants de toute la théorie de la transformation effet les recherches de M. Kiepert montrent que l'emploi du multiplicateu bien d'une quantité jouissant de la même propriété que M, simplifie de beau problème, sans cela si compliqué, de la transformation. Cette nouvelle gr appelée f, se définit par l'equation

$$f = e^{-\frac{\eta\omega(n^2-1)}{n}} \sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\cdots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\omega\right),$$

où les lettres du second membre s'expliquent dans la théorie des fonction tiques de M. Weierstrass.

§ 1. Déduction des grandeurs f. — § 2. Représentation de f comme quot deux series développées suivant les puissances de h. — § 3. Représentati autres racines de l'équation de transformation. — § 4. On établit les relat Jacobi. — § 5. On établit l'équation de transformation.

Sylvester (J.-J.). — Note sur une propriété des équations toutes les racines sont réelles. (217-219).

« Soient f une forme binaire qui a toutes ses racines réelles et φ un de se riants du second degré; dans les coefficients, φ sera d'un signe invariable à-dire si toutes les racines de f sont réelles, toutes les racines de tous les q covariants (c'est-à-dire des covariants du second degré) de f sont imagina

Souillart. — Observation relative à l'article de M. Soura (t. 85 de ce Journal). (220-221).

Thomé (*L.-W.*). — Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires (suite; *voir* t. 83 de ce Journal). (222-349).

Si l'on développe, pour deux points du plan de construction, deux systèmes d'intégrales linéairement indépendantes, et qu'on poursuive, tout le long d'une ligne, l'un des deux systèmes jusque dans le domaine de développement de l'autre, alors chaque intégrale du premier système se changera en une fonction homogène et linéaire, à coefficients constants, des intégrales du second système. Déterminer ces coefficients constants, voilà le problème traité par M. Thomé dans ce nouveau Mémoire.

Supposons qu'on ait trouvé l'expression linéaire et à coefficients constants d'une intégrale par un système d'intégrales linéairement indépendantes; différentions cette équation autant de fois qu'il en résulte un système d'équations linéaires dont le nombre égale le nombre des coefficients inconnus : les inconnues s'obtiendront par la résolution de ce système. Si une intégrale, développée dans le voisinage d'un point a, est à exprimer par un système d'intégrales développées dans le voisinage du point b, ce procédé peut être mis en usage, pourvu qu'on puisse faire passer par le point b une circonférence qui renferme a, et en dehors de laquelle se trouvent tous les autres points singuliers de l'équation différentielle. A cet effet, M. Thomé tire profit d'une substitution $x = R(\xi)$ rationnelle et de premier degré, laquelle représente ce cercle d'une manière conforme sur le cercle situé dans le plan des ξ et décrit autour du point $\xi = 0$ comme centre avec l'unité comme rayon, de façon à faire correspondre le point $x = a$ au point $\xi = 0$, le point $x = b$ au point $\zeta = 1$. Alors l'équation différentielle qui dépend de ξ a tous ses points singuliers, excepte $\xi = 0$ et $\xi = 1$, situés à l'extérieur de la circonférence décrite autour de $\xi = 0$ comme centre avec l'unité comme rayon. Les séries ordonnées suivant les puissances de la variable dans les développements des intégrales seront donc convergentes, au moins à l'intérieur de cette circonférence. Quand $x = b$, et partant $\xi = 1$, serait non singulier, elles le seraient encore au delà de ce cercle. Ce qu'il faut signaler de remarquable, c'est le cas où l'indice caractéristique est nul près de $x = a$ et $x = b$, par suite aussi près de $\xi = 0$ et $\xi = 1$. Dans ce cas, les constantes cherchées s'obtiennent par des séries ordonnées suivant des puissances à exposants positifs et entiers, et convergentes à l'intérieur du cercle avec le rayon 1, à savoir par les valeurs de ces séries pour $\xi = 1$. Pour prouver que ces séries sont encore convergentes pour $\xi = 1$ et qu'elles représentent aussi les constantes cherchées, l'auteur a recours à la série de Fourier, et sa recherche s'étend aussi sur le cas où la fonction à représenter possède, dans le voisinage d'une valeur, une infinité de maxima et de minima. La représentation des intégrales le porte à établir et à démontrer le théorème suivant, qui est fondamental pour les équations différentielles homogènes linéaires à coefficients rationnels : « Si l'équation différentielle possède dans le voisinage de $x = a$ une intégrale de la forme

$$(x-a)^r \{ \varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \ldots + \varphi_q [\log(x-a)]^{q-1} \},$$

où φ est uniforme et continu pour le domaine de ce point, abstraction faite de $(x = a)$, on peut, en fixant les nombres q et $\mathfrak{b}$, déduire de l'équation differentielle originaire une autre à coefficients rationnels et ayant l'unité pour coefficient de la dérivée la plus élevée, équation à laquelle satisfait $(x-a)^r \varphi_{\mathfrak{b}}$; ce qui s'achève, sans qu'on sache rien sur les valeurs des fonctions $(x-a)^r \varphi$, par des opérations qui se présentent en différentiant des fonctions rationnelles. »

Le procédé développé par l'auteur pour déterminer les relations qui sul entre les intégrales d'une équation différentielle linéaire est enfin appliqué à tion différentielle de la série hypergéométrique, et le Mémoire se termine] discussion complète des relations linéaires entre ses intégrales.

Biehler. — Sur une classe d'équations algébriques dont tout racines sont réelles. (350–353). E. Lam

---

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA [1].

L'idée de la fondation d'une Académie hongroise date du d quart du XVIIIe siècle. Elle fut émise pour la première foi Georg Besenevi, garde du corps royal à la cour de Marie-Th et poursuivie par Nicolaus Révay, le fondateur de la phil hongroise. Le Reichstag de 1790-91 vota une loi spéciale (17 janvier).

Mais la mise à exécution de ce projet était réservée au Rei de 1825. Il est probable, toutefois, que l'idée n'aurait pas ab un résultat pratique sans l'intervention du jeune comte S Szécsényi, qui mit une année entière de ses revenus (15000 la disposition du nouvel établissement, en ajoutant qu'il avait d'amis pour prendre soin de lui pendant un an.

Les articles de loi ordonnant la fondation de l'Académie reç leur effet en novembre 1827. Le Comité institué, sous la prési de l'archiduc palatin Joseph, pour diriger les travaux préparat s'occupa activement de sa tâche, et le 17 novembre 1830 l démie Hongroise fut constituée avec une dotation de pr 750 000^fr^.

La destination spéciale de l'Académie Hongroise est surt perfectionnement de la langue magyare, et depuis sa fondatio a tourné vers ce but la meilleure partie de ses efforts. A époque, la langue de l'administration, de la législation, de l'e gnement public était encore le latin.

A l'origine, l'Académie se composait de six classes, sous les

---

[1] *L'Académie Hongroise des Sciences.*

suivants : Linguistique, Esthétique, Philosophie, Histoire, Jurisprudence, Sciences mathématiques et naturelles. En 1834, l'Académie publia un Dictionnaire philosophique et un Dictionnaire mathématique (Terminologie).

Par des souscriptions volontaires, on réunit, en 1857, une somme de 2 250 000fr, avec laquelle fut bâti le palais de l'Académie Hongroise, sous la direction de l'architecte berlinois A. Stieller.

Après le rétablissement de la Constitution hongroise, en 1867, les Statuts de l'Académie furent revisés. La réorganisation définitive eut lieu en 1869.

Les Membres de l'Académie sont divisés en trois classes, savoir :

(*a*) Classe de la Philologie et des Beaux-Arts, comprenant six membres honoraires et douze ordinaires;

(*b*) Classe des Sciences philosophiques, historiques et sociales; neuf membres honoraires et vingt-quatre ordinaires;

(*c*) Classe des Sciences mathématiques et naturelles; neuf membres honoraires et vingt-quatre ordinaires.

A ces classes sont subordonnées diverses Commissions permanentes, dans lesquelles peuvent aussi être admises des personnes autres que les membres de l'Académie. Les travaux de ces Commissions paraissent dans des publications séparées. Ces Commissions sont :

(1) Commission philologique;

(2) Commission historique;

(3) Commission archéologique;

(4) Commission de Statistique et d'Économie nationale;

(5) Commission des Sciences mathématiques et naturelles, dont les travaux paraissent dans les *Mathematikai és természettudományi közlemények* (Communications de Mathématiques et de Sciences naturelles); depuis 1861 jusqu'à ce jour, il a paru seize Volumes in-8°, contenant principalement des travaux d'Histoire naturelle;

(6) Enfin la Commission de publication, qui n'est subordonnée à aucune classe, mais qui dépend de l'Académie tout entière.

Les publications périodiques régulières de l'Académie sont :

(α) *Évkönyvek* (Annuaire), in-4°; le Tome I a paru en 1833; le Tome XVI est actuellement sous presse. Ces Annuaires contiennent des Mémoires étendus de chacune des trois classes; les

travaux mathématiques qui ont paru dans ce Recueil datent premières années de la publication.

(β) *Értekezések* (Mémoires), in-8°, en Volumes comp chacun de fascicules détachés et paginés séparément. Chaque c publie isolément ses travaux, de sorte qu'il paraît trois séries parées d'*Értekezések*. Ce Recueil a commencé en 1867.

(γ) *Értesitö* (Bulletin), in-8°. Il en a paru, de 1840 à 1 dix-neuf Volumes. De 1861 à 1866, le Recueil a été publié en séries séparées, correspondant aux trois classes de l'Acadé Depuis 1867, ce Bulletin contient de courts extraits des lect es et des compt s événements académiques.

(δ) Enfin les indiquées sous les numéros de à (5) publient l dans leurs *Közlemények* (Com nications).

Les travaux m de l'Académie hongroise parai depuis la réo isati à-dire depuis 1867, sous le titre vant, indique er :

Értekezések kai tudomanyok köréböl kiad Magyar Tudo demia a III osztály rendelet szerkeszti Szabó Josi *titkár 8-adrét* (Mémoires de Sci mathématiques troisième classe, par *Joseph Sz* secrétaire de cette classe; in-8°).

Chaque Volume se compose de fascicules détachés et pagin parément.

Tome I; 1867-1871 (17 feuilles $\frac{1}{4}$) (1).

1. *Szily Kalmán*. — Sur la forme générale des équations théorie mécanique de la chaleur. 1867. (20 p.).

2. *Hunyady Jenö* (2). — Le pôle et les polaires; le princip polaires réciproques. 1867. (30 p.).

---

(1) En langue magyare, les lettres *a, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, ö, p, r,* se prononcent comme en allemand; *v, z,* comme en français; *cs* = *ts* = *tch* fr *cz* = *ts* français; *s* = *ch* français; *y* = *i* faible; *ny* = *gn* français dans *sign* voyelles accentuées sont longues.

Les prénoms se placent après le nom patronymique.

(2) Eugène.

3. *Vész János Ármin* (¹). — Sur les prêts d'assurances (nouvelle espèce d'assurances sur la vie). 1867. (20 p.).

4. *Kruspér István* (²). — L'emploi modifié du comparateur de Schwerd. 1869. (13 p., 1 pl.).

5. *Vész János Ármin*. — Les plus courtes distances sur le cône circulaire. 1869. (9 p., 4 pl.).

6. *Tóth Ágoston* (³). — La mesure européenne internationale du degré de méridien et les travaux géodésiques qui s'y rapportent. 1870. (48 p., 1 carte).

7. *Kruspér István*. — Le mètre prototype de Paris. 1871. (13 p.).

8. *König Gyula* (⁴). — Sur l'application des fonctions elliptiques à la théorie des équations de degré supérieur. 1871. (34 p.).

9. *Murmann Ágost*. — Les éléments de la planète Europa, d'après les dix premières oppositions observées. 1871. (36 p.).

10. *Szily Kálmán*. — Le principe d'Hamilton et le second théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur. 1871. (8 p.).

11. *Tóth Ágoston*. — L'état actuel de la Cartographie (tracé des Cartes terrestres), tel qu'il était représenté à l'Exposition d'Anvers. 1871. (26 p.).

Tome II; 1872-1873 (13 feuilles ½).

1. *Murmann Ágost*. — Mémoire sur la planète Freia. 1871. (61 p.).

2. *Kruspér István*. — Sur les comparateurs. 1873. (19 p., 1 pl.).

3. *Kruspér István*. — La comparaison des règles divisées pour la mesure des longueurs dans un fluide. 1873. (9 p.).

4. *Fést Vilmós* (⁵). — Les moyens de transport et les lignes de commerce. 1873. (45 p.).

(¹) Jean Armin. (²) Étienne. (³) Auguste. (⁴) Jules. (⁵) Guillaume.

5. *Murmann Ágost.* — Détermination de l'orbite de la grande comète de 1861. 1873. (65 p.).

6. *Kruspér István.* — L'étalon métrique des Archives de Paris. 1873. (9 p.).

Tome III; 1874 (20 feuilles).

1. *Vész János Ármin.* — Contributions à la théorie des séries récurrentes. 1874. (15 p.).

2. *Konkoly Miklós* (1). — La description de l'Observatoire astronomique d'Ó-Gyalla, et les observations faites dans cet établissement des taches solaires, avec quelques observations spectroscopiques fragmentaires dans l'année 1872-1873. 1874. (67 p., 3 pl.).

3. *Kondor Gusztáv.* — Éloge de John Herschel, membre étranger de l'Académie. 1874. (14 p.).

4. *Eötvös Lorand* (baron). — L'intensité des vibrations, en ayant égard au mouvement de la source de vibration et de l'observateur. 1874. (23 p.).

5. *Réthy Mór* (2). — Sur la théorie de la diffraction. 1874. (19 p.).

6. *Martin Lajos* (3). — Surfaces hélicoïdales mécaniques. 1874. (92 p.). — Théorie du ventilateur horizontal. 1874. (56 p., fig. dans le texte).

7. *Réthy Mór.* — Sur la théorie des intégrales dans une aire réductibles à des intégrales sur le contour. 1874. (20 p.).

8. *Galgóczy Karoly* (4). — Éloge du membre étranger Anton Vállas. 1874. (15 p.).

Tome IV; 1875-1876 (16 feuilles $\frac{3}{8}$).

1. *Schulhof Lipót* (5). — Détermination définitive de l'orbite de la comète IV 1870. 1875. (32 p.).

(1) Nicolas. (2) Maurice. (3) Louis. (4) Charles. (5) Léopold.

2. *Schulhof Lipót.* — Détermination définitive de l'orbite de la comète II, 1871. 1875. (32 p.).

3. *Szily Kálmán.* — Le deuxième théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, déduit du premier. 1875. (15 p.).

4. *Konkoly Miklós.* — Ses observations astronomiques pendant les années 1874 et 1875. 1876. (41 p., 3 pl.).

5. *Konkoly Miklós.* — Observations de taches solaires à l'Observatoire d'Ó-Gyalla. 1876. (51 p., 1 pl.).

6. *Hunyady Jenö.* — Sur les diverses formes des équations de condition de six points situés sur une conique. 1876. (23 p.).

7. *Réthy Mór.* — La Trigonométrie plane de l'espace homogène à trois dimensions, dit *non euclidien*. 1876. (25 p.).

8. *Réthy Mór.* — Sur la théorie des surfaces propellères et péripellères. 1876. (49 p.).

9. *Fést Vilmós.* — A la mémoire du chevalier Franz von Temes, membre de l'Académie. 1876. (12 p.).

Tome V; 1876-1877 (16 feuilles $\frac{1}{4}$).

1. *Kondor Gusztáv.* — Notice sur Nagy Károly, membre ordinaire de l'Académie. 1876. (24 p.).

2. *Kenessy Albert.* — Données sur l'hydrographie de nos rivières. 1877. (9 p., 4 pl.).

3. *Hoitsy Pál* (1). — Observations d'étoiles dans la ligne est-ouest. 1877. (58 p., 1 tableau).

4. *Hunyady Jenö.* — Sur les différentes formes des équations de condition entre six points situés sur une section conique (suite du Mémoire 6, du Tome IV). 1877. (20 p.).

5. *Hunyady Jenö.* — Le problème d'Apollonius sur la surface de la sphère. 1877. (16 p.).

(1) Paul.

6. *Gruber Lajos.* — Sur le mouvement de l'étoile double 24 η Cassiopée. 1877. (19 p.).

7. *Martin Lajos.* — Application du Calcul des variations au développement de l'équation de la surface propellère. 1877. (30 p.).

8. *Konkoly Miklós.* — L'éclipse totale de Lune du 27 février 1877, et l'observation du spectre de la comète I (Borelly) de 1877, à l'Observatoire d'Ó-Gyalla. 1877. (7 p.).

9. *Konkoly Miklós.* — Les taches du Soleil et la forme de la surface solaire pendant l'année 1876. 1877. (41 p., 3 pl.).

10. *Konkoly Miklós.* — Le spectre de 140 étoiles filantes, observé à l'Observatoire d'Ó-Gyalla, en 1876. 1877. (34 p.).

Tome VI; 1877-1878 (15 feuilles ½).

1 et 2. *Konkoly Miklós.* — Observations d'étoiles filantes sur le territoire du royaume de Hongrie. Ire Partie : 1871 à 1873. (35 p.). — IIe Partie : 1874 à 1876. (39 p.). 1877.

3. *Gruber Lajos* et *Kurländer Ignácz.* — Détermination définitive de l'orbite de la comète V (Borelly) de 1874. 1878. (21 p.).

4. *Schenzl Guido.* — Détermination de l'inclinaison à Budapest et dans le sud-ouest de la Hongrie. 1878. (25 p., 1 carte).

5. *Gruber Lajos.* — Sur les étoiles filantes du mois de novembre. 1877. (36 p.).

6. *Kruspér István.* — Nouveau système de balance. 1878. (20 p., 1 pl.).

7. *Hunyady Jenö.* — Notice nécrologique sur J.-V. Poncelet. 1878. (15 p.).

8. *Konkoly Miklós.* — Observations d'étoiles filantes sur le territoire du royaume de Hongrie. IIIe Partie : 1877. 1878. (9 p.).

9. *Konkoly Miklós.* — Les taches solaires et l'aspect de la surface du Soleil en 1877. 1878. (35 p.).

10. *Konkoly Miklós.* — Le passage de Mercure sur le disque du Soleil, observé à l'Observatoire d'Ó-Gyalla, le 6 mai 1878. (7 p.).

Tome VII; 1879-1880.

1. *Konkoly Miklós.* — Observation de la surface de Mars à l'Observatoire d'Ó-Gyalla, après l'opposition de 1877. 1879. (8 p., 1 pl.).

2. *Konkoly Miklós.* — Mesure du spectre des étoiles fixes, et méthode pour observer ces spectres. 1879. (6 p.).

3. *Konkoly Miklós.* — Observations d'étoiles filantes sur le territoire du royaume de Hongrie. IVe Partie : 1878. 1879. (11 p.).

4. *Konkoly Miklós.* — Observations de la surface du Soleil en 1878, à l'Observatoire d'Ó-Gyalla. 1879. (22 p.).

5. *Hunyady Jenö.* — Sur la théorie des surfaces du second degré. 1879. (36 p.).

6. *Hunyady Jenö.* — Les critériums de Möbius dans la théorie des sections coniques. 1879. (15 p.).

7. *Konkoly Miklós.* — Observations spectroscopiques à l'Observatoire d'Ó-Gyalla :

(*a*) Le spectre de la comète de Brorsen;
(*b*) Spectres d'étoiles filantes;
(*c*) Spectre de la comète de Palisa;
(*d*) Spectre des éclipses de Lune, et son observation astronomique le 12-13 août 1878.

1880. (18 p.).

8. *Weinek Ladislas.* — Influence de la réfraction des instruments dans le dessin photographique d'un passage de Vénus. 1880. (22 p.).

9. *Suppan Vilmós.* — Les surfaces cylindriques et coniques en projection oblique. 1880. (14 p., 2 pl.).

10. *Konek Alexander.* — Nécrologie de Vincent Weninger, membre correspondant de l'Académie. 1880. (14 p.).

11. *Konkoly Miklós.* — Observations d'étoiles filantes sur le territoire du royaume de Hongrie, en 1879. 1880. (18 p.).

12. *Konkoly Miklós.* — Points radiants des étoiles filantes, déduits des observations faites en Hongrie, de 1871 à 1878. 1880. (27 p.).

13. *Konkoly Miklós.* — Observations des taches solaires à l'Observatoire d'Ó-Gyalla, en 1879. 1880. (23 p., 1 pl.).

14. *Konkoly Miklós.* — Contributions à la physique des planètes Jupiter et Mars dans l'année 1879. (23 p.).

15. *Réthy Mór.* — Réfraction et réflexion de la lumière aux limites d'un corps transparent homogène et isotrope, avec la généralisation et l'extension de la méthode de Neumann. 1880. (20 p.).

16. *Réthy Mór.* — Explication de la rotation d'une vibration lumineuse polarisée à travers un réseau d'inflexion. 1880. (17 p.).

17. *Szily Kálmán.* — Sur la loi de la pression de la vapeur saturée. 1880. (8 p.).

18. *Hunyady Jenö.* — Détermination des courbes et des surfaces du second degré. 1880. (30 p.).

19. *Hunyady Jeno.* — Théorèmes sur les déterminants dont les éléments sont composés au moyen de ceux des systèmes adjoints. 1880. (27 p.).

Fr. Schmidt.

ARCHIV der Mathematik und Physik; gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe (1).

Tome LXV; 1880.

Grunert (J.-A.). — Sur la méthode de Newton pour la description

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 114.

d'une conique passant par quatre points donnés et touchant une droite donnée de position. (1-18).

Memoire posthume du fondateur de l'*Archiv*.

L'auteur appelle l'attention sur la belle construction donnée dans les *Principia*, I, sect. V, prop. XXIII.

Husman. — Sur les distributions équipotentielles des masses. (19-56).

« Si l'on suppose des forces agissant suivant la loi de la gravitation de Newton, une masse sphérique dont la densité est une fonction du rayon seulement a, par rapport à un point extérieur, le même potentiel qu'aurait son centre si toute la masse y était condensée.

» On peut donc substituer une distribution de la masse à une autre sans changer son action sur des points extérieurs à la sphère; on dit alors que ces deux distributions sont *équipotentielles* relativement à ces points. Il est possible, d'après cela, de remplacer un corps quelconque, dans son action sur des points extérieurs, par un nombre illimité d'autres distributions de la masse. On n'a, pour cela, qu'à le décomposer en éléments infiniment petits, à décrire autour de ces éléments des sphères de rayons arbitraires et à distribuer la masse de chaque élément dans toute la sphère correspondante, de manière que la densité de celle-ci soit une fonction du rayon. Les sphères dans l'espace peuvent empiéter les unes sur les autres; on supposera alors, aux points communs, la densité égale à la somme des densités des sphères auxquelles ils appartiennent. On peut ensuite opérer inversement par concentration. »

L'auteur étudie ces *transpositions équipotentielles* de masses pour diverses figures du corps attirant : points massifs isolés, courbes massives, distribution des masses sur une surface, dans un solide; corps et courbes équipotentiels (la droite, le cercle), etc.

Hoppe (*R.*). — Potentiel du triangle sphérique. (57-64).

On partage le triangle en trois triangles ayant pour sommet commun l'intersection de la sphère avec le diamètre mené du point attiré, et considérant comme négatif un de ces triangles partiels lorsque ce sommet est hors du triangle donné. La question se ramène alors à calculer le potentiel d'un triangle partiel. Le résultat dépend des intégrales elliptiques.

Hoppe (*R.*). — Éléments de la théorie des déterminants. (65-72).

L'auteur part de ce point de vue que les propriétés générales et importantes qui résultent de la théorie des déterminants constituent la structure intime de ces expressions, et ne doivent pas être masquées par des calculs de détail. Il faut éviter toute décomposition inutile, et l'auteur fait voir que l'emploi des déterminants mineurs n'est nécessaire pour la démonstration d'aucun théorème élémentaire.

Ameseder (*Ad.*). — La surface réglée du quatrième degré avec deux droites doubles. (73-109).

Ligowski. — Détermination directe de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$. (110-111).

Meissel. — Propriété remarquable de l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = + \sqrt{y^2 - \cos 2x}.$$

(111).

Hain (Em.). — Nouvelle manière d'établir l'équation de la tangente au cercle. (112).

Winterberg. — Sur l'attraction des points matériels, au point de vue particulier des déviations du fil à plomb. (113-160).

Jeřábek (W.). — Sur le lieu géométrique du centre de collinéation entre une surface non réglée du second ordre et un système de surfaces sphériques. (161-170).

Appell (P.). — Développement en série entière de $(1 + ax)^{\frac{1}{x}}$. (171-175; fr.).

Hoppe (R.). — Le secteur sphérique excentrique. (176-187).

« Si par un point quelconque de l'intérieur d'une sphère on mène trois plans à volonté, ces plans partageront le volume de la sphère en huit secteurs dont il faut calculer les volumes. » M. Hoppe reprend ce problème, résolu pour la première fois par Crelle; il en a simplifié la solution et en tire des conséquences pratiques.

Dostor (G.). — Relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle (¹). (188-192; fr.).

Dostor (G.). — Extension du théorème d'Hippocrate, et détermination du centre de gravité de ses lunules. (193-203; fr.).

Dostor (G.). — Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze et du centre de gravité du tronc de pyramide à base quelconque. (204-207; fr.).

Streissler (J.). — Sur l'Axonométrie orthogonale. (208-211).

(¹) Rectiligne.

Lorenz (*N. von*). — Addition au problème sur le triangle, t. LXIII, p. 300. (212-215).

Voir *Bulletin*, IV_2, 120.

Jeřábek (*W.*). — Remarque sur la Note intitulée : « Contribution à l'ellipse », t. LXIII, p. 443. (215-218).

Voir *Bulletin*, IV_2, 122.

Noeggerath (*E.*). — Sur le centre de gravité du quadrilatère. (218-221).

Jolmen (*P.*). — Centre de gravité du quadrilatère. (221).

Kapteyn (*W.*). — Théorème de Géométrie plane. (221-223; fr.).

Israel (*C.*). — Sur les cas théoriquement possibles de la détermination de la hauteur du pôle. (225-238).

« La détermination astronomique et la détermination mathématique de la hauteur du pôle sont deux problèmes très différents. Souvent une méthode qui n'offre aucune difficulté au mathématicien en offre de presque insurmontables à l'astronome. Dans tous les cas, on est forcé de convenir que, lorsqu'il s'agit d'un procédé rationnel, la solution mathématique doit précéder la solution astronomique. Car ce n'est qu'après avoir établi toutes les méthodes *possibles* (ce qui ne peut se faire évidemment que par la voie mathématique) que l'on peut convenablement poser et décider la question de savoir lesquelles de ces méthodes peuvent s'adapter aux usages astronomiques et lesquelles y sont impropres. L'objet du présent travail est de donner une telle exposition systématique du problème de la hauteur du pôle. »

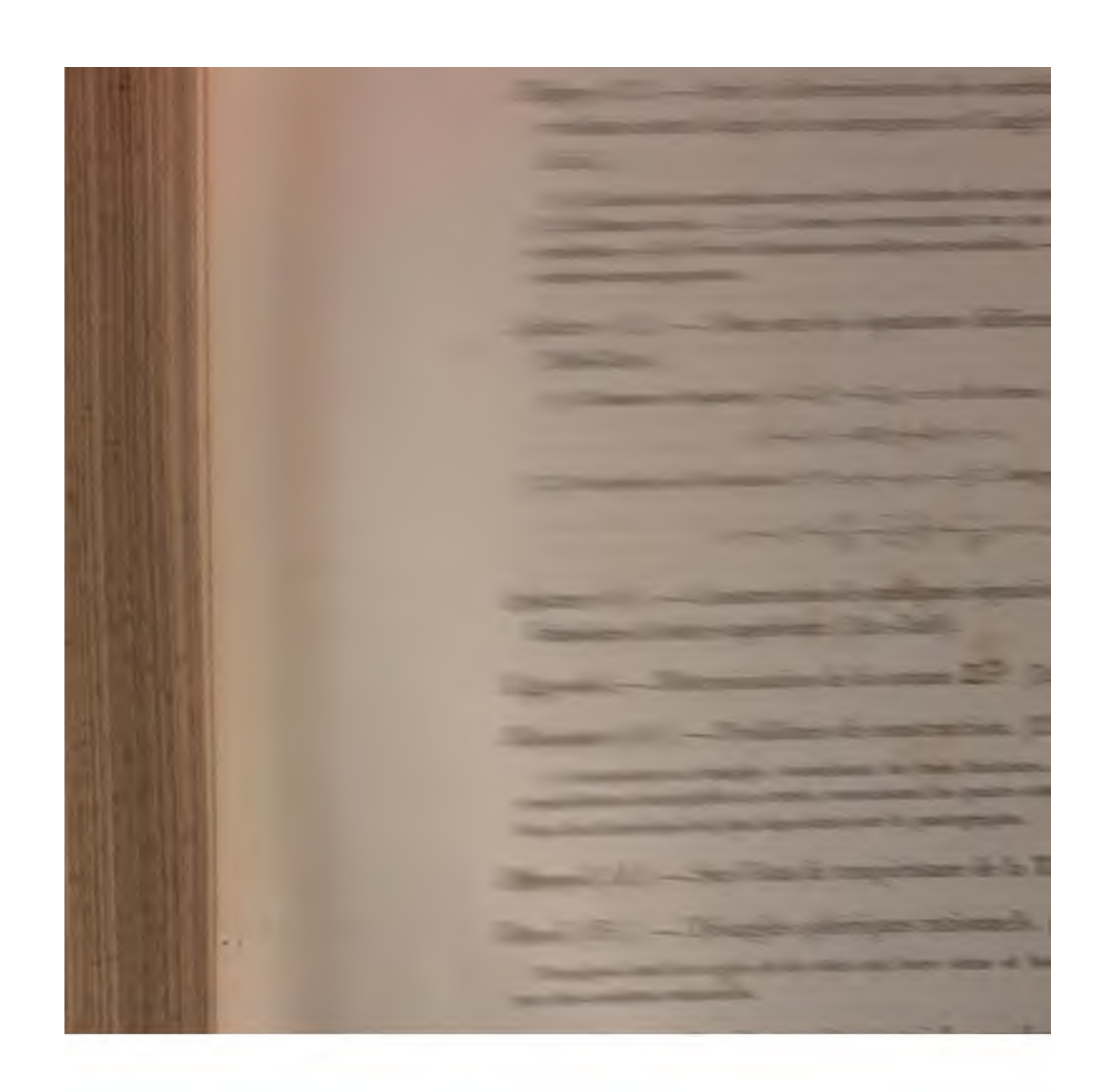
A. Méthodes où l'on suppose connues la déclinaison et la position du plan méridien. — B. Méthodes fondées sur la connaissance de la déclinaison. — C. Méthodes fondées sur la connaissance de la position du méridien. — D. Méthodes indépendantes de la connaissance de la déclinaison et du méridien.

Ameseder (*Ad.*). — Sur les surfaces réglées rationnelles du quatrième degré. (239-286).

Dans le premier paragraphe de ce travail, l'auteur traite, d'une manière assez abrégée, la surface réglée générale du quatrième degré, n'ayant pas pu être renseigné sur ce que l'on connaît déjà sur cette surface, ni se procurer, en particulier, le Mémoire de Cremona sur ce sujet : *Sulle superficie gobbe di quarto grado* (*Mem. dell' Acc. di Bologna*, 1868).

Il a pris pour point de départ de ses recherches le mode de génération de la surface au moyen de deux systèmes projectifs de plans tangents de deuxième classe, celui qui se prête le mieux à ce but.

Il démontre, entre autres choses, qu'il existe sur la surface réglée une infinité de coniques dont les plans enveloppent une surface développable générale de troisième classe; cette propriété lui sert à passer à l'étude de la surface réglée du quatrième degré à droite directrice simple; il montre en même temps que, lorsqu'une



Siebel (*A.*). — Recherches sur les équations algébriques. (394-419).

Suite du Mémoire publié t. LXI, p, 122. Voir *Bulletin*, II_2, 6.

VII. Détermination des racines réelles, où le $F(x)$ du § 2 est de la forme b^x *.

Sidersky (*D.*). — Nouvel ellipsographe. (420-422).

Hoppe (*R.*). — Remarques touchant le dénouement d'un nœud dans la quatrième dimension. (423-426).

Ligowsky. — Réduction de l'équation complète du quatrième degré à une équation réciproque du second degré. (426-429).

Meissel. — Résolution d'une classe de problèmes de Trigonométrie sphérique. (429-433).

Farkas (*J.*). — La somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique en fonction des coefficients de cette équation, et réciproquement. (433-435).

Farkas (*J.*). — Pression verticale moyenne du pendule symétrique sur son axe. (435-438).

Hermes. — Type de calcul pour le développement d'une racine carrée en fraction continue. (438-443).

Hain (*Em.*). — Sur la loi d'amincissement des colonnes. (443-445).

Stoll. — Sur le centre de gravité du quadrilatère. (445-446).

Englert (*F.*). — Le nombre S_n des intersections des diagonales d'un polygone de n côtés, qui tombent à l'intérieur de ce polygone. (446-447).

Kapteyn (*W.*). — Nouvelle démonstration. (448).

Si l'on a, quel que soit φ, l'égalité

$$a_0 + a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots + a_n \sin n\varphi = 0,$$

tous les coefficients a sont égaux à zéro.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (1). — 2e série.

Tome XIX; 1880, 2e semestre.

D'Ocagne (M.). — Applications de Géométrie cinématique plane. (289-303).

Continuation et fin de l'article publié dans le même Volume et dont nous avons précédemment rendu compte (voir *Bulletin*, IV₂, 153). Les sujets traités dans ce dernier Article sont les suivants : Sur les courbes classiques du troisième ordre. — Sur la spirale d'Archimède. — Sur les caustiques. — Sur les anamorphoses. — Sur les podaires.

D'Ocagne (M.). — Démonstrations de théorèmes énoncés dans les *Nouvelles Annales*. (304-307).

Ces théorèmes de Géométrie se rapportent à la question proposée à l'admission à l'École Polytechnique en 1878.

Candèze. — Sur une règle de M. Laguerre. (307-311).

Il s'agit de la limite supérieure du nombre des racines d'une équation supérieures à un nombre donné. Comparaison des résultats que donne la règle de M. Laguerre avec ceux qu'on obtient au moyen de la règle de Budan ou de Fourier.

Biehler (Ch.). — Sur les équations linéaires. (311-331, 356-362).

Ces deux Articles contiennent une application des déterminants à la résolution d'un système d'équations linéaires. L'auteur a divisé son travail de la manière suivante : I. Le nombre des inconnues est égal à celui des équations. II. Le nombre des équations surpasse celui des inconnues. III. Le nombre des inconnues surpasse celui des équations. IV. Application de la théorie des équations linéaires aux fonctions homogènes du second degré.

UN ABONNÉ. — Remarque sur la composition de Mathématiques proposée en 1879 pour l'admission à l'École Polytechnique. (331-332).

Propriétés des coniques.

CORRESPONDANCE. — M. Biehler : « A propos d'un Article de lui *Sur un procédé d'élimination*. » (332-334).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1880). — Énoncés des compositions. (334-335).

---

(1) Voir *Bulletin*, IV₂, 146.

Questions retirées, au Concours général de 1879 et de 1880, en Mathématiques spéciales. (336).

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1880. Exposition sommaire d'une solution géométrique. (337-340).

Problème relatif à l'hyperbole équilatère.

Legoux (*A.*). — Sur les trajectoires d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale. (340-347).

M. Legoux étudie le cas d'une attraction proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance du rayon vecteur. Sans intégrer l'équation différentielle de la trajectoire, il montre comment on peut, au moyen de cette équation, indiquer la forme générale de la courbe, trouver ses sommets, le sens de sa concavité, ses asymptotes et son rayon de courbure. L'Article se termine par l'examen de cas particuliers.

Laguerre. — Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné. (347-350).

Solution physique, pour ainsi dire, du problème proposé, suivie d'une vérification analytique. Voir du même auteur une Note « sur la Géométrie de direction », communiquée à la Société mathematique, le 4 juin 1880.

Saint-Germain (*A. de*). — Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie. (350-355).

Recherche d'une forme caractéristique de l'équation des courbes algébriques qui admettent un nombre donné μ d'axes de symétrie. Détermination des foyers de ces courbes.

Dostor (*G.*). — Formules de réduction trigonométrique. (362-367).

Démonstration de vingt formules, déduites essentiellement du théorème que voici et par lequel débute l'Article : « Dans toute relation qui a lieu entre les trois angles A, B, C d'un triangle, on peut remplacer ces angles : 1° par les compléments de leurs moitiés ; 2° par les suppléments de leurs doubles ».

Weill. — Théorèmes sur la parabole. (367-378, 442-450).

Cette étude, fort intéressante, comprend douze théorèmes relatifs aux propriétés d'un triangle qui se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une parabole. C'est un chapitre des travaux de l'auteur sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques. Elle se termine par cette propriété, très simple et digne d'attention : « Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit dans une parabole, et circonscrit à une parabole ayant même axe que la première et de paramètre quadruple, la somme des carrés des côtés du triangle reste constante. »

Concours d'admission a l'École Polytechnique (1880). — Énoncés des compositions. (379-380).

CORRESPONDANCE. — M. H. Laurent : « Sur une propriété des polynômes de M. Laguerre. » (380-382).

PUBLICATIONS RÉCENTES. — **1.** Éléments de la théorie des déterminants, par P. Mansion; 3ᵉ édition; Mons, Paris, 1880. — **2.** Trois Lettres inédites de Jean Iᵉʳ Bernoulli à Léonard Euler; Stockholm, 1880. — **3.** Huygens et Roberval; documents nouveaux, par C. Henry; Leyde, 1880. — **4.** Études nouvelles des lignes et surfaces du second degré, par Émile Sourander; Helsingfors, 1879. (382-384).

Resal (H.). — Théorie élémentaire des brachistochrones. (385-397).

Reprenant une question précédemment traitée dans le même Recueil d'une façon sommaire, l'éminent auteur de cet article s'est proposé d'établir la théorie des brachistochrones sans faire usage du calcul des variations et en s'appuyant sur des considérations analogues à celles qu'a employées Jean Bernoulli. Après avoir tout d'abord établi quelques théorèmes fondamentaux, il arrive à donner les équations générales des brachistochrones en coordonnées rectangulaires lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface. Il examine ensuite le cas où le mobile est soumis à l'action d'une force centrale fonction de la distance au centre, puis enfin l'hypothèse d'un mobile assujetti à rester sur une surface. Pour cette dernière partie, on peut consulter aussi une Thèse de M. Roger, insérée au Tome XIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1ʳᵉ série).

Lucas (Éd.). — Sur un théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales. (397-401).

Le théorème en question se rapporte à un cercle variable passant par deux points fixes d'une conique. M. Lucas en déduit plusieurs formules et propriétés nouvelles.

Lucas (Éd.). — Sur trois coniques confocales deux à deux. (401-403).

L'auteur démontre ce théorème : « Si trois coniques sont deux à deux bitangentes à un même cercle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point. »

Chefik-Bey (du Caire). — Solution des exercices sur le tétraèdre proposés par M. Genty. (403-411).

Ce sont des propriétés intéressantes du tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales et qu'on peut appeler tétraèdre « isoscèle ».

Moret-Blanc. — Solution de questions proposées par M. H. Faure. (411-421).

Il s'agit de questions touchant les surfaces du second ordre et se rapportant à la théorie des indices, publiée par M. Faure dans les *Nouvelles Annales*.

Govi (*G.*). — Sur quelques Lettres inédites de Lagrange, publiées par M. Balthasar Boncompagni. (421-428).

Cet article, traduit par M. Aristide Marre, reproduit une Notice lue à l'Académie des Sciences de Naples le 5 juin 1880. Il concerne, entre autres, onze Lettres autographes de Lagrange, dont les originaux se trouvent dans les archives de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg. Cette correspondance, très digne d'intérêt au point de vue scientifique et historique, est adressée à Euler, à Laplace, à Canterzani, à M. de la Garde, etc. Il est également question, dans la Notice, d'une Lettre de Gauss à Sophie Germain.

Correspondance. — M. Dewulf : « Sur le tracé des tangentes aux ovales de Descartes. » (428-429).

Publications récentes. — **1**. Questions de Géométrie élémentaire, par Desboves ; 3e édition ; Paris, 1880. — **2**. Traité élémentaire d'Algèbre, par A. Boset ; Bruxelles, Paris, 1880. — **3**. Il Carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss ; Nota di A. Genocchi ; Torino, 1880. (429-430).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question **1297**. (430-431).

Décomposition du quadruple et du carré de $4p^6 + 27q^4$ en une somme de deux cubes.

Rochetti (*M.*). — Solution de la question **1313**. (431).

p étant donné, faire que $p^2 q$ soit une somme de n cubes.

Questions proposées : **1344** à **1347**. (432).

Amigues (*E.*). — Recherches sur deux modes de transformation des figures solides. (433-442, 481-492).

Suite et fin de l'etude antérieurement publiée dans le même Recueil (voir *Bulletin*, IV_2, 70). A cette occasion, nous renouvellerons une critique deja formulée en d'autres occasions : il est profondément regrettable que la suite d'une étude dont la publication est entreprise en décembre 1879 ne paraisse qu'en octobre 1880 ; c'est vouloir rendre illisibles les articles les plus dignes d'intérêt. Ici, l'auteur énonce et démontre un certain nombre de propriétés curieuses, notamment sur la quartique de Steiner.

Voir aussi, de M. Amigues, ses Recherches sur les transformations du second ordre dans les figures planes (*Nouvelles Annales*, 1877).

Moret-Blanc. — Solution de questions proposées par M. Moreau. (450-454).

Il s'agit de trois développements en séries, s'appliquant aux fonctions circulaires et aux fonctions Γ.

Henry (*C.*). — Remarque sur un article des *Nouvelles Annales*. (454-455).

A propos de la somme des puissances semblables des x premiers nombres, M. Henry attire, avec juste raison, l'attention sur les formules de M. Ed. Lucas contenues dans ses « Recherches sur l'analyse indéterminée ».

Lionnet. — Note relative aux intersections intérieures des diagonales d'un polygone convexe. (456-457).

L'auteur établit que le nombre de ces intersections est égal à celui des combinaisons des sommets quatre à quatre.

Publications récentes. — 1. Œuvres complètes de Laplace, publiées par les Secrétaires perpétuels de l'Académie des Sciences; t. IV; Paris, 1880. — 2. Cours de Calcul infinitésimal, par J. Hoüel; t. III, 2e fascicule; Paris, 1880. — 3. Sur l'origine de quelques notations mathématiques, par C. Henry; Paris, 1880. (457).

Sondat. — Solution de la question 1296. (458-459).

Sur les solutions de l'équation $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$.

Rochetti (*M.*). — Solution de la question 1312. (459-460).

Transformation d'un produit en une somme de trois cubes.

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1320. (460-461).

Lieu géométrique relatif au cercle.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1324. (461-462).

Sur les solutions de certaines équations biquadratiques indéterminées.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1326. (462-464).

Problème relatif au triangle.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1327. (464-467).

Résolution d'un triangle rectangle, connaissant les bissectrices des deux angles aigus.

Arnaud (*V.-M.*). — Solution de la question 1329. (467-468).

Exercice sur la série de Fibonacci.

Robaglia. — Solution de la question 1332. (468-470).

Propriétés de la parabole.

Droz (*A.*). — Solution de la question 1334. (470-472).

Sur un quadrilatère circonscrit à un cercle.

Lissençon (*J.*). — Solution de la question 1339. (472-473).

« Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. »

Fauré (*J.-M.*). — Solution de la question 1340. (473-475).

Problème sur les aires, relatif au triangle.

Bresson (*Éd.*). — Solution de la question 1341. (475-479).

Normales abaissées d'un point donné à une conique ou à une surface du second ordre.

Dufaur. — Solution de la question 1342. (479).

Propriété de deux normales à une parabole.

Questions proposées : 1348 à 1351. (480).

Biehler (*Ch.*). — Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. (492-507).

L'auteur, dans cette étude, suppose le point singulier ω l'origine et coupe la courbe par la droite $y = \lambda x$. Supprimant le facteur x^p dans l'équation aux abscisses qui en résulte, il obtient une relation

$$\varphi_p(\lambda) + x\varphi_{p+1}(\lambda) + \ldots + x^{m-p}\varphi_m(\lambda) = 0,$$

m étant le degré de la courbe. C'est de l'examen de cette dernière équation que découlent les résultats obtenus.

Lannes. — Solution des questions de Mathématiques élémentaires proposées au Concours général de 1879. (508-513).

1° Sur un quadrilatère circonscriptible à deux cercles.
2° Sur un système de deux équations.

Leinekugel (*A.*). — Solution des questions proposées au Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1879. (513-517).

1° Sur un cylindre et un cône droits ayant même volume et même surface.
2° Résolution d'un triangle dont la base égale la hauteur.

Henry (*C.*). — Généralisation d'un théorème d'Arithmétique. (517-518).

Le théorème que M. Henry généralise est celui-ci : « Le carré d'un nombre impair est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux. »

Concours d'admission a l'École Normale supérieure (1879). — Énoncé de la composition de Mathématiques. (518-519).

Publications récentes. — 1. Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche, da B. Boncompagni; t. XII; Roma, 1879. — 2. American Journal of Mathematics; editor in chief, J.-J. Sylvester; Cambridge, New-York, Philadelphia, London, Paris, Berlin; mars 1879. — 3. Mémoire sur les résidus des puissances n et sur la résolution de l'équation $x^n + y^n = z^n$ en nombres entiers, par A. Lefébure; Paris, 1880. (519-524).

Pisani (*F.*). — Solution de la question 1318. (524-526).

« Trouver un nombre $N = x^2 + (x+1)^2 = y^2 + (y+1)^2 + (y+2)^2$. »

Droz (*A.*). — Solution de la question 1333. (526-527).

Enveloppe se rapportant à la spirale logarithmique.

Questions proposées : 1352, 1353. (527-528).

Maleyx (*L.*). — Sur l'évaluation de certains volumes. (529-551).

Cette Note est relative à diverses expressions du volume compris entre une surface et deux plans parallèles, quand l'aire interceptée par la surface sur un plan parallèle variable est une fonction rationnelle et entière de degré m de la distance d'un point fixe à ce plan variable.

L'auteur étudie d'abord les cas où $m = 2$, $m = 3$, puis il montre qu'on peut faire des transformations analogues, quel que soit m. Il éclaircit les considérations présentées par quelques applications. Il démontre enfin la proposition suivante : « Si l'on coupe une surface réglée par un plan déterminant une section fermée, l'aire de cette section est une fonction rationnelle du second degré de la distance du plan sécant à un point fixe de l'espace. »

Concours d'admission a l'École Centrale des Arts et Manufactures (1879). — Première et deuxième sessions : Énoncés des compositions. (551-556).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1336. (556-557).

Sur un système de droites enveloppant une conique; lieu géométrique.

Fauquembergue. — Solution de la question 1346. (557-558).

Sur des parallélogrammes construits sur les côtés d'un triangle comme diagonales.

Correspondance. — M. S. Realis : « Sur une propriété de certaines équations irréductibles, dont la découverte, attribuée à A.-J.-H. Vincent, appartient à Legendre. » (558-562).

Bibliographie. — Digression historique sur les quantités négatives.

à propos de la Théorie des quantités négatives de M. de Campou; Paris, 1879; par M. Georges Dostor. (562-565).

QUESTIONS PROPOSÉES : 1354, 1355. (565-566).

Supplément.

Tissot (A.). — Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des Cartes géographiques. (40 pages).

Ce Supplément, que nous avions annoncé (voir *Bulletin*, IV_1, 66), contient la fin du remarquable Mémoire de M. Tissot, qui avait commencé à paraître dans les *Nouvelles Annales* en 1878, puis en 1879.

Le Chapitre III se termine par l'examen des projections aphylactiques et des projections centrales.

Le Chapitre IV et dernier comprend : 1° Résultats numériques relatifs aux Cartes de portions du globe moindres qu'un hémisphère; 2° Choix d'un mode de projection.

L'ensemble du Mémoire de M. Tissot forme, à la fois au point de vue théorique aussi bien qu'au point de vue des applications, un véritable Traité, rationnel et excellemment ordonné, sur la question des projections des Cartes géographiques. Il contient une classification aussi complète que possible des procédés en usage et une judicieuse discussion des avantages et des inconvénients que présente chacun d'eux.

A. L.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série ([1]).

Tome VI. — Année 1880.

Hermite. — Sur une formule d'Euler. (5-18).

M. Hermite étudie et généralise une remarque d'Euler, qu'une Lettre de M. Fuss a fait connaître aux lecteurs du *Bulletin* (2e série, t. III, p. 226); elle consiste en ce que la substitution

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}$$

rend rationnelle la différentielle

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx.$$

([1]) Voir *Bulletin*, III_2, 214.

Un calcul direct montre d'abord que, si la fonction $f(x^2)$ jouit de la propriété

$$f(x^2) = -f\left(\frac{C}{Ax^2}\right),$$

la substitution

$$p = \frac{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C}}{x\sqrt{2}}$$

rend rationnelle la différentielle

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C}}.$$

La méthode de décomposition en éléments simples conduit à ce même résultat et à d'autres analogues. La condition précédente, appliquée à l'intégrale

$$\int^x \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

qui devient

$$\int F(\xi)\,d\xi$$

par la substitution $x = \operatorname{sn}\xi$, est remplacée par la condition $F(\xi + iK') = -F(\xi)$. Si, généralement, on considère des fonctions doublement périodiques $F(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ satisfaisant aux conditions respectives

$$F(\xi + 2K) = F(\xi), \qquad F(\xi + iK') = -F(\xi);$$
$$F_1(\xi + K + iK') = -F_1(\xi), \quad F_1(\xi + K - iK') = -F_1(\xi),$$
$$F_2(\xi + K) = -F_2(\xi), \qquad F_2(\xi + 2iK') = +F_2(\xi),$$

les quantités $D_\xi \log \operatorname{sn}\xi$, $D_\xi \log \operatorname{cn}\xi$, $D_\xi \log \operatorname{dn}\xi$ joueront respectivement le rôle d'éléments simples par rapport à ces fonctions, et l'on trouvera les formules de décomposition par le procédé habituel; en prenant successivement pour p la valeur d'un de ces éléments simples, on arrive à la conclusion suivante : soient les fonctions $f(x^2)$, $f_1(x^2)$, $f_2(x^2)$ jouissant respectivement des propriétés

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$
$$f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$
$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right);$$

les différentielles

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

seront rendues rationnelles par les substitutions

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x}, \quad p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Saint-Germain (A. de). — Sur le parallélogramme de Watt. (19-26).

Calcul de la déviation de l'extrémité de la tige. — Démonstration simple des règles de M. Tchebycheff.

André (*D.*). — Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. (27-48).

Soit une équation différentielle linéaire d'ordre ω entre la fonction Y et la variable indépendante x; désignons par $Y_0, Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, \ldots$ les valeurs pour $x = 0$ de Y et de ses dérivées; que l'on prenne les dérivées d'un ordre suffisamment élevé des deux membres, et que l'on fasse $x = 0$ dans le résultat, on arrivera à une équation dont le premier membre sera la somme des quantités $Y_0^{(n)}, Y_0^{(n-1)}, \ldots$ multipliées par des fonctions de n; et cette équation subsistera pour toutes les valeurs de n supérieures à un certain nombre ν; l'auteur la désigne sous le nom d'*équation dérivée*. Les équations différentielles linéaires dont il s'occupe sont telles que leur équation dérivée (dite *régulière*) soit de la forme

$$K_0 F(n) Y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + K_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

$F(n)$ étant une fonction quelconque de n, et les quantités K et k des constantes.

Les trois espèces étudiées par M. André sont caractérisées par les égalités

$$F(n) = \frac{1}{n!\,f(n)}, \quad F(n) = \frac{(n+s)!}{n!\,f(n)},$$
$$F(n) = \frac{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)}{n!\,f(n)},$$

où t est un entier supérieur à zéro, s est un nombre entier positif, nul ou négatif, et $f(n)$ un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

La méthode d'intégration consiste à développer l'intégrale suivant la série de Maclaurin; naturellement les quantités $Y_0, Y_0^{(1)}, Y_0^{(\omega-1)}$ jouent le rôle de constantes arbitraires. On commence par calculer, au moyen de ces quantités, les valeurs de $Y_0^{(\omega)}, \ldots, Y_0^{(\nu)}$; posant ensuite

$$F(n) Y_0^{(n)} = v_n,$$

l'équation dérivée donne

$$K_0 v_n + K_1 v_{n-1} + \ldots + K_k v_{n-k} = 0,$$

qui montre que v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite. Si l'on sait sommer la série de Maclaurin, en se fondant sur les propriétés des suites récurrentes, on aura l'intégrale sous forme finie. Les types étudiés par M. André correspondent aux cas où l'on sait faire cette sommation, soit d'après des résultats antérieurement acquis, soit d'après les propres recherches de l'auteur.

Les équations du premier type admettent une intégrale composée uniquement de fonctions algébriques rationnelles. Dans les intégrales des équations du deuxième et du troisième type entrent en outre respectivement des exponentielles de la forme a^x et des logarithmes de la forme $\log(1 - ax)$.

Resal. — Note sur les différentes branches de la Cinématique. (49-50).

Zolotareff. — Sur la théorie des nombres complexes. (51-73; 129-145).

L'auteur fait la théorie des nombres de la forme

$$b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_{n-1} x_0^{n-1},$$

$b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ étant des nombres entiers ordinaires et x_0 une racine d'une équation irréductible de degré n, à coefficients entiers. Cette théorie, pour le cas des équations binômes, a été, comme on sait, constituée par M. Kummer; M. Zolotareff retrouve, comme cas particulier de son analyse, les résultats de M. Kummer.

Resal. — Sur l'Astronomie nautique. (85-88).

Boussinesq (J.). — Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière. (89-98).

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. (99-110).

Posant

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1}),$$

où (x^{2n+1}) désigne une série de puissances entières de x, ordonnée suivant les puissances croissantes et commençant par un terme en x^{2n+1}, M. Laguerre commence par montrer que $f_n(x)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] - \frac{H_n(x)}{x\Theta_n(x)} y = 0,$$

où Θ_n et H_n désignent des polynômes de degrés $m-1$ et $2(m-1)$, m étant le degré de $F(x)$; une autre solution de cette équation est $\varphi_n(x)e^{-F(x)}$; c'est cette dernière propriété qui le conduit à une méthode pour la détermination du coefficient de φ_n et f_n, méthode qu'il applique au cas où $F(x)$ est du second degré.

Schwarz. — Essai d'une démonstration d'un théorème de Géométrie, rédigé sur l'invitation de M. Charles Hermite. (111-114).

Les coordonnées d'une courbe plane de degré n qui a précisément

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2$$

points doubles différents s'expriment rationnellement par un paramètre et par une racine carrée d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré de ce paramètre.

Resal. — Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. (115-128).

Déterminer la forme d'une courbe telle que, si elle roule sur une droite, un point relativement fixe de son plan décrive une courbe donnée par son équation différentielle.

Maximovitch (*W. de*). — Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes. (167-176).

« Afin que les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ d'une expression F soient distinctes, il faut et il suffit qu'il n'existe entre les fonctions

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}, \frac{\partial F}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_m}$$

aucune relation linéaire homogène à coefficients constants (indépendants de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, mais pouvant dépendre de $a_1, a_2, \ldots, a_m$).

« Pour cela, il faut et il suffit que, parmi les dérivées partielles de F par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et dont les ordres ne surpassent pas $(m-1)$, il se trouve au moins un seul système de m fonctions entre lesquelles il n'existe aucune relation où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne figurent pas explicitement. »

Boussinesq. — Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu dans les cylindres ou les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées. (177-186).

David. — Sur la transformation des fonctions Θ. (187-214).

L'auteur s'occupe de la transformation des fonctions intermédiaires du premier ordre; ces fonctions s'exprimant au moyen des fonctions Θ, pour lesquelles la théorie de la transformation est faite, la question se trouve résolue, théoriquement du moins; toutefois, son étude directe conduit à des formules remarquables par leur symétrie et leur généralité; dans le courant de ses recherches, l'auteur a été conduit à donner la somme de la série

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{(\rho m + \rho^2 p)\frac{\pi i}{q}},$$

dans le cas où, p et q étant premiers entre eux, les nombres m et pq sont de même parité.

Léauté. — Sur l'établissement des formules données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane. (215-234).

Après avoir établi ces équations (*Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321), M. Resal les applique au cas du mouvement lent d'une corde dont un point est fixe; toutefois, M. Resal n'a voulu traiter que le cas où la corde est très voisine de la ligne droite et a négligé d'indiquer explicitement cette restriction. M. Léauté aborde le problème dans toute sa généralité, afin d'établir les équations des petites oscil-

lations d'une corde inextensible dans l'espace; les formules auxquelles il parvient se réduisent à celles de M. Resal dans le cas de la courbe plane.

Méray (Ch.). — Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles. (235-266).

Considérons un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre. Exprimant immédiatement quelques dérivées premières des fonctions inconnues en fonction composée de ces fonctions inconnues, d'autres dérivées premières de ces fonctions et des variables indépendantes, on distinguera d'abord celles des variables (dites *principales*) par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres de celles (dites *paramétriques*) qui sont étrangères à la formation de ces dérivées; une variable peut d'ailleurs être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre; on distinguera de même les dérivées paramétriques, prises uniquement par rapport à des variables paramétriques, des dérivées principales qui intéressent au moins quelque variable principale, en sorte que les équations considérées expriment les dérivées principales premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques premières; imaginant ensuite les équations rangées dans les compartiments d'un Tableau divisé en cases en nombre égal au produit du nombre de fonctions inconnues par celui des variables indépendantes, de façon que les cases d'une même colonne contiennent toutes les équations dont les premiers membres sont les dérivées d'une même fonction inconnue et celles d'une même ligne toutes les équations où les dérivées sont prises par rapport à une même variable, et supposant que les seconds membres des équations d'une colonne quelconque ne contiennent aucune dérivée de toute fonction inconnue dont quelque variable principale serait paramétrique pour la fonction dont les équations considérées expriment les dérivées principales, le système d'équations différentielles satisfaisant à cette condition est dit *système immédiat* par M. Méray.

Les intégrales d'un tel système, conçues comme *holotropes* dans les limites des valeurs des variables où elles peuvent exister, sont dites *ordinaires* lorsque, pour les valeurs correspondantes des variables desdites intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières, les seconds membres des équations différentielles deviennent toutes fonctions holotropes de ces trois sortes de quantités, considérées un instant comme autant de variables indépendantes.

Dans une dérivée principale d'ordre n, le *genre* est défini par le nombre de différentiations principales qui concourent à leur formation.

Ces définitions posées, on voit facilement que, quand un système immédiat possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs dérivées principales d'ordre n et de genre ν sont indéfiniment exprimables en fonctions composées holotropes des variables, des intégrales considérées elles-mêmes, de leurs dérivées (quelconques) d'ordre inférieur à n et de leurs dérivées d'ordre n, mais de genres inférieurs à ν; plus particulièrement, elles s'expriment, sans distinction de genres, en fonctions composées holotropes des variables indépendantes, des intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques d'ordres égaux ou inférieurs à n; si maintenant x_0, y_0, z_0, ... sont des valeurs particulières attribuées aux variables indépendantes x, y, z, ... dans les limites d'holotropie d'un groupe donné d'intégrales ordinaires du système immédiat, si l'on connaît seulement les valeurs que prennent ces intégrales et leurs dérivées paramétriques de tous ordres pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., on pourra calculer les valeurs correspondantes de leurs dérivées prin-

cipales de tous ordres, et par suite construire les développements de ces intégrales en séries entières par rapport à $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$; de même, si l'on appelle *détermination initiale d'une intégrale* cette fonction des variables paramétriques à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales. il est clair qu'on pourra former les développements d'un groupe d'intégrales dont on connaît seulement les déterminations initiales.

Si maintenant on effectue les calculs précédents en partant d'un groupe de fonctions arbitrairement choisies en même nombre que les fonctions inconnues du système immédiat et ne dépendant respectivement que des variables paramétriques de ces dernières, sans savoir si ces fonctions arbitraires sont les déterminations initiales de quelque groupe d'intégrales ordinaires, il y a lieu de se demander si les développements obtenus convergeront et représenteront des intégrales simultanées du système immédiat proposé. Pour cela, une première condition (dite de *passivité*) est tout d'abord nécessaire.

Quand, dans les calculs précédemment décrits, la dérivée dont on veut avoir l'expression au moyen des variables indépendantes, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques est complexe, c'est-à-dire provient de différentiations intéressant à la fois plusieurs variables principales distinctes, il est aisé de voir qu'on peut arriver à la valeur de cette dérivée par des voies différentes, qui, d'ailleurs, si l'on part d'intégrales effectivement connues, ne peuvent conduire qu'à la même détermination; mais si, dans les expressions obtenues ainsi par des différentiations d'équations différentes pour une même dérivée, on remplace les variables principales par leurs valeurs initiales et les intégrales, ou plutôt les fonctions inconnues, par des fonctions arbitraires des variables paramétriques, regardées comme les déterminations initiales de ces intégrales, il est évidemment nécessaire, pour que les calculs décrits aient un sens, que les valeurs numériques ainsi obtenues pour les deux expressions soient égales; si cette équivalence a lieu, en vertu de la constitution du système, indépendamment de toute hypothèse sur la nature des fonctions arbitraires et sur les valeurs initiales des variables, le système est dit *passif*. Pour cela, il est d'ailleurs nécessaire et suffisant que les deux expressions obtenues pour toute dérivée complexe *seconde* d'une fonction inconnue quelconque, au moyen des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques premières et secondes, soient, dans tous les cas, des fonctions identiquement égales de ces trois sortes de quantités, regardées, pour un moment, comme autant d'autres variables indépendantes. On a alors la proposition suivante, dont l'établissement est le principal objet du Mémoire de M. Méray :

« Considérons un instant dans le système (a) les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques premières, comme autant de variables indépendantes distinctes, représentées graphiquement, selon l'usage, par des points en même nombre, rapportés, chacun dans son plan, à un couple d'axes rectangulaires.

» Si, pour toutes les valeurs de ces quantités tombant à l'intérieur d'aires limitatives (S) données dans les plans coordonnés, les seconds membres des équations (a) en sont fonctions holotropes, et si les conditions de passivité sont satisfaites, ces équations admettent en $x_0, y_0, z_0, \ldots$, valeurs initiales des variables prises à volonté dans celles des aires (S) qui leur correspondent, un groupe (unique) d'intégrales ordinaires (holotropes), ayant pour déterminations initiales des fonctions holotropes de leurs variables paramétriques, choisies arbitrairement sous la simple condition que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières tombent dans celles des aires (S) qui sont relatives aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières. »

De Maupeou. — Note relative au pulsomètre de Hall. (267-282).

Radau (R.). — Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. (283-336).

Étude d'ensemble et comparaison des diverses méthodes connues; pour chaque méthode, le degré de précision est marqué avec soin ; de plus, l'auteur a réuni toutes les constantes dont on peut avoir besoin dans l'application, en sorte que son travail présente un double intérêt théorique et pratique.

Souchon (A.). — Sur une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Concordia. (337-342).

Dostor (G.). — Théorie générale des polygones étoilés. (343-360).

Germain (S.). — Mémoire sur l'emploi des surfaces élastiques. (1-66).

Mémoire de la célèbre mathématicienne, présenté à l'Académie des Sciences (8 mars 1824), non publié, retrouvé dans les papiers de Prony à la Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME QUATRIÈME.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME IV; 1880. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

	Pages.
BETTI (E.). — Teorica delle forme newtoniane e sue applicazione all' elettrostatica ed al magnetismo	21-27
BRIOT (C.). — Théorie des fonctions abéliennes	9-14
BURNHAM (S.-W.). — Double stars observations made in 1877-78 with the $18\frac{1}{2}$ inch refractor of the Dearborn Observatory (Chicago)	166-167
CANTOR (M.). — Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band, von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 nach Chr	305-317
CAYLEY (A.). — Trattato elementare delle funzioni ellittiche; traduzione riveduta e accresciuta d'alcune Appendici da F. Brioschi	33-34
EUCLIDE. — *Voir* VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO	65-76
GERMAIN (Sophie). — Cinq Lettres de Sophie GERMAIN à C.-F. GAUSS, publiées par B. BONCOMPAGNI	273-276
— Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques	277
GOULD (B.-A.). — Uranometria Argentina. Brightness and position of every fixed star, down to the seventh magnitude within 100° of the south pole.	257-260
GOVI (G.). — Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da F. Cesi, fondatore dell' Accademia dei Lincei. — Su alcune Lettere di Lagrange, pubbl. dal Boncompagni	276-277
HABICH (E.-J.). — Études cinématiques	193-197
HARNACK (Ax.). — Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen. — Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung	168-171
HOCHHEIM (Ad.). — Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des ABU BEKR MUHAMMED BEN ALHUSEIN ALKARKHÎ	125-126
HOÜEL (J.). — Cours de Calcul infinitésimal. T. I-II	5-9

Pages.

LECORNU. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles 413-415
LIE (S.). — Beiträge zur Theorie der Minimalflächen 340-342
LIPSCHITZ (R.). — Lehrbuch der Analysis. I. Bd. Grundlagen der Analysis.. 385-394
MASCHKE. — Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem gebildet aus Flächen dritter Ordnung 197-200
MÉRAY (C.). — Observations sur deux points du Calcul des variations...... 124-125
ODSTRČIL (J.). — Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen 337-340
RICCARDI (P.). — Notizie della vita del conte PIETRO ABBATI MARESCOTTI..... 76-77
SCHELL (W.). — Theorie der Bewegung und der Kräfte ; ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. T. I.. 34-39
SCHILLING (C.). — Sur la surface minima de cinquième classe 395-413
SCHUBERT (H.). — Kalkul der abzählenden Geometrie..................... 14-21
SOMOFF (J.). — Theoretische Mechanik. T. I et II........................ 113-123
STEEN (Ad.). — Den elastiske Kurve og dens Anvendelse i Böjningstheorien. 161-162
STONE (O.).—Microscopical measurements of 1054 double stars observed with the 11 inch refractor from january 1, 1878, to september 1, 1879........ 261
THIELE (T.-N.). — Castor; calcul du mouvement relatif et critique des observations de cette étoile double........................ 162-163
VACHTCHENKO-ZAKHARTCHENKO (M.-E.). — Natchala Evklida.... Les éléments d'Euclide, avec une Introduction explicative et des Commentaires...... 65-76
WESTPHAL (G.). — Ueber das simultane System zweier quaternären Formen 2-ten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4-ter Ordnung 39-43
ZEUTHEN (H.-G.). — Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit...... 164-166

MÉLANGES.

BERTRAND (J.). — *Voir* CHASLES (M.).. 433-435
BIENAYMÉ (J.). — Lettre à M. DARBOUX.. 265-267
BOUQUET (C.). — *Voir* CHASLES (M.).. 435-436
CATALAN (E.). — Théorèmes de v. Staudt et Clausen 77-83
CHASLES (M.). — Discours prononcés sur sa tombe par MM. BERTRAND et BOUQUET. — Notice sur ses travaux, par M. DARBOUX...................... 433-442
DARBOUX (G.). — Études géométriques sur les percussions et le choc des corps........ 126-160
— *Voir* CHASLES (M.).. 436-442
EULER (L.). — Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle. 209-256
FUCHS (L.). — Sur une classe de fonctions de plusieurs variables, provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, suivi d'une Lettre de l'auteur à M. Borchardt.. 278-300 et 328-336
GILBERT (Ph.). — Extrait d'une Lettre à M. Darboux...................... 317-318
HENRY (C.). — Mémoire inédit de LÉONARD EULER, publié conformément au manuscrit autographe........ 207-209
— Lettre au Rédacteur du *Bulletin*...................... 268-272
JAQUEMET (le P.). — Deux nouvelles Lettres mathématiques inédites du P. Jaquemet, de l'Oratoire, publiées par ARISTIDE MARRE.................. 200-207
KRONECKER (L.). — Sur la loi de réciprocité 182-192
LAISANT (A.). — Nécrologie. GIUSTO BELLAVITIS 343-348
LIE (S.). — Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation.. 300-304
Mc KENZIE (Duncan-J.-M.). — Erreurs dans les Tables mathématiques..... 31-32

Pages

MARRE (Ar.).— Extrait du Manuscrit n° 24237 du fonds français de la Bibliothèque Nationale........ 27-30
— *Voir* JACQUEMET (le P.)........ 200-207
PELLET (A.-E.). — Sur une classe d'équations dont toutes les racines peuvent s'exprimer linéairement en fonction de l'une d'elles........ 262-265
PICARD (Ém.). — Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique, et sur une classe d'équations différentielles........ 416-433
RITTER (Fr.). — A propos d'une Lettre de Fermat sur le fameux problème d'Adrien Romain, résolu par F. Viète........ 171-182
SACHSE (A.). — Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique..... 43-64 et 83-112
STEPHANOS (Cyp.). — Sur la théorie des connexes conjugués........ 318-328

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME IV.

6182 Paris. Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME IV; 1880. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME (¹).

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich Sächsischen Gesellschaft zu Leipzig. T. X (suite), XI; 1871-1878. — 114-119.
Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. Helsingforsiæ. T. X; 1875. — 5-6.
Annales de la Société scientifique de Bruxelles. T. I-II; 1875-1878. — 80-89.
Annales des Mines. 7ᵉ série, t. XIII-XVII; 1878-1880. — 204-206.
Annales des Ponts et Chaussées. 5ᵉ série, t. XV-XIX; 1878-1880. — 211-214.
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 2ᵉ série, t. VIII; 1877. — 16-27.
Astronomische Nachrichten, begründet von H.-C. SCHUMACHER, herausgegeben von C.-A.-F. PETERS. T. XCV-XCVII, nᵒˢ 2257-2328; 1879-1880. — 27-38, 154-172.
Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J.-A. GRUNERT, fortgesetzt von R. HOPPE. T. LXII-LXV; 1878-1880. — 114*-128*, 254-259.
Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences de Harlem. T. XI-XIII; 1876-1878. — 174-180.
Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXXI; 1877-1878. — 180-185.
Berichte über die Verhandlungen der königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. T. XXVII-XXX; 1875-1878. — 108-114.
Bulletin de la Société Mathématique de France. T. VII; 1878-1879. — 72-80.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXXIX-XCI; 1879-1880. — 7-16, 89-106, 132-146, 231-238.

(¹) Par une erreur typographique, le numérotage des pages 113-128 de la feuille R.8 ayant été répété sur la feuille suivante R.9, nous avons, dans ces Tables, marqué d'un astérisque les numéros qui se rapportent à cette dernière feuille.

Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. XVI-XVII; 1878-1879. — 194-204.

Journal de l'École Polytechnique. Cah. XLIV-XLVI, t. XXVII-XXVIII; 1874-1879. — 121-114*.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville et continué par H. Resal. 3e série. t. VI; 1880. — 267-274.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt. T. LXXXVI-LXXXVII; 1879. — 38-45, 239-246.

A Magyar Tudományos Akademia. Ertekezések a mathematikai tudományok köréböl kiadja a Magyar Tudományos Akademia a III ösztaly rendeletéböl szerkesti Szabò Josef. T. I-VII; 1867-1880. — 246-254.

Matematitcheskiï Sbornik, izdavaïémyi Moskovskim matematitcheskim Obchtchestvom. T. IX, fasc. 3; 1879. — 71-72.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und Ad. Mayer. T. XIV; 1879. — 214-223.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège. 2e série, t. VI-VII; 1877-1878. — 106-107.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nos 711-978; 1870-1879. — 119-121.

Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. T. VI, 1880. — 172-174.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 2e série, t. XVIII (suite), XIX; 1879-1880. — 55-71, 146-154, 260-267.

Il Nuovo Cimento, Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria, continuato da E. Betti e R. Felici. 3e série, t. I-VI; 1877-1879. — 45-54.

Revue d'Artillerie. T. XII-XVI; avril 1878-mars 1880. — 206-211.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. T. LXXVI-LXXVIII; 1877-1878. — 223-231.

Sitzungsberichte der königl.-böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. Années 1876-1878. — 128*-131.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. T. XIV; 1879. — 186-194.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). 14.
Abetti. 158, 160.
Achard. 205.
Ader. 134, 141, 233.
Albrecht. 31, 160.
Alexéief. 79.
Alluard. 132.
Amagat. 133, 136, 236.
Ameseder. 123, 124, 255, 257.
Amigues. 70, 149, 263.
Amiot. 205.
André (Ch.). 140.
André (D.). 19, 74, 269.
Andréief. 71.
Anelli. 199.
Anton. 33.
Aoust. 78.
Appell. 10, 14, 94, 98, 106, 116*, 118*, 122*, 123*, 127*, 136, 140, 145, 233, 235, 256.
Arcais (d'). 195.
Armenante (A.). 196.
Arnaud. 264.
Aruey. 95.
Arsonval (d'). 92, 234.
Aschieri. 199.
Asten (v.). 186, 191.
Auwers. 186, 192.
Azzarelli. 180, 181, 182, 185.
Backhuyzen (V. d. Sande). 28, 29, 30, 193.
Badoureau. 55, 122.
Baehr. 176, 178, 180.
Baillaud. 135.
Baltzer. 43, 243.
Barbarin. 152.
Bartl. 116*.
Bartoli. 46, 51, 52, 54.
Basso. 49, 53.
Battaglini. 198, 201.
Baum. 214.
Bazley. 187.
Bazzi. 51, 53.
Beck. 31, 216.
Bečka. 131, 227.
Becker (E.). 158.
Becquerel (H.). 143.
Beebe. 161.
Bellati. 46, 49, 50, 51, 53.
Belpaire. 87, 89.
Beltrami. 45, 46, 47, 50.
Benteli. 120, 121.
Benthem. 176.
Bergsma. 179.
Bernardières (de). 8, 232.
Bertini. 200.
Bessel (Fr.). 258.
Betti. 49, 52.
Bianchi. 198, 200.
Bianco (Zan.). 195, 196.
Biehler. 148, 149, 150, 152, 246, 260, 265.
Bierens de Haan. 172, 173, 179, 180.
Biermann. 227.
Bigourdan. 11, 134, 232, 233, 237.
Birmingham. 30.
Block. 157.
Boell. 66.
Boldt. 239.
Boltzmann. 224, 225, 228, 230.
Bonsdorff. 6.

Borchardt. 78, 243.
Borel. 62.
Borrelly. 31, 32.
Börsch. 155, 157, 168.
Boss. 34.
Bosscha. 175, 178, 179.
Bougaïef. 71.
Bouglé. 55.
Bourguet. 59, 153.
Boussinesq. 106, 132, 135, 270, 271.
Boutigny. 138.
Bouty. 134, 136.
Brassine. 141.
Braunmühl (v.). 222.
Brédikhine. 28, 31, 38, 156, 170.
Bresse. 102, 133.
Bresson, 265.
Breusing. 158.
Brioschi. 77, 235.
Broda. 121*.
Brongniart (P.). 211.
Bruhns. 30, 33, 35, 36, 37, 113, 114, 161, 187, 192.
Bruns (H.). 165.
Budde. 120.
Burmester. 220.
Burnham. 168, 169.
Buss. 120.
Büttner. 170.
Cabanellas. 143.
Cailletet. 95.
Caligny (de). 8, 13.
Callandreau. 90, 102, 127, 137, 139, 140, 146, 193.
Candèze, 260.
Canet. 208.
Cantoni (G.). 54.
Cantor (G.). 128*.
Capelli. 195, 197, 201.
Carbonnelle. 84, 85.
Carnoy. 86.
Carpentier. 13.
Carrère. 142.
Cassani. 202.
Catalan. 106, 107.
Cauvet. 69.
Cayley, 241, 242, 243, 244.
Ceraski. 171.
Chambrier. 100.
Chase. 134, 137.
Chefik-Bey. 265.
Chelini. 199.
Cherbuliez. 119.
Chevreul. 232.
Ciamician. 224, 228, 231.
Cintolesi. 49, 54.
Clarinval. 113*.
Clavenad. 212.
Cobianchi. 51.
Cohen-Stuart. 175.
Colladon. 90.
Common. 156.
Conche. 105.
Copeland. 36, 163, 168.
Cornu. 10, 122, 134.
Cottereau. 59.
Courbe. 59, 149.
Cousin. 87.
Coutzolenc. 134.
Crafts. 105, 236.
Crocchi. 202.
Crookes. 233.
Crova. 96.
Cruls. 32, 237.
Čubr. 116*.
Curie. 146.
Curtze. 115*, 128*.
Dainelli. 198.
Darboux. 21, 72, 90, 102, 104, 1
151.
Darwin (G.-H.). 160.
Daubrée. 7, 209.
David. 143, 271.
Debrun. 9.
Dedekind. 140, 233.
De Fierlant. 84.
Delarue. 71.
Delgeur. 85.
Delsaux. 82, 86, 88.
Denza. 91.
Deprez. 104, 133, 134.
Desains. 146.
Desboves. 59, 63, 138.
De Tilly. 82.
Deville (R.). 206.
Dewulf. 263.
Diekmann. 120*.
Ditscheiner. 229.
Doberck. 30, 33, 34, 36, 37, 38, 1
162, 163, 164, 168, 170.
Dobiński. 119*, 121*.
Donders. 175, 178.
Donnini. 52.
Doolittle. 169.
Dostor. 69, 115*, 117*, 119*, 120*
122*, 123*, 126*, 127*, 256, 261
Doubrava. 230.
Downing. 157.
Drasch. 226.
Drobisch. 110.
Droz. 265, 266.
Dubjago. 161.
Du Bois-Reymond (P.). 121.
Du Boys. 213.

.. 100.
265.
34.
cel. 91. 115.
212.
-Claye. 213.
52. 54.
o.
00, 144.
iel. 27.
rdt (v.). 36.
inn. 186.
259.
ier. 120*.
250.
142, 232.
ausen [illegible]
:24, 229. 230.
Bruno, 140, 217.
s. 34, 161.
122*, 141, 145, 146. 223. 234. 258.

nbergue. 65, 68, [illegible], 264. 269.
65.
). 104, 105, 133, 140. 144. 232.
'. 116.
105.
181, 182. 184.
. 168.
53.
.9. 251.
223.
. 27.
181, 184.
2, 107.
.e (de). 134. 135.
ti. 203.
120.
79. 147, 148.
35. 37.
. 199.
91.
us. 38, 39. 41, 43.
28.
105, 106.
nn. 116*.
196.
y. 250.
8.
. 65, 149.
i. 194. 197.
s (de). 34, 159, 163.
. 102. 104.
. 30.
197.
l. 121.
rden. 157.

Gegenbauer. [illegible]
Gen[illegible]chi. [illegible]
Gentz. 152.
Gerard-Lescuy[illegible]
Gerbaldi. [illegible]
Gerhardt. [illegible]
German (Sophie). [illegible]
Ghysens. 54. [illegible]
Gierster. 22[illegible]
Gilbert. [illegible]
Gille. 104.
Glan. 185.
Glœsener. [illegible]
Goldney. 27.
Goldschmiedt. [illegible]
Gostinsky. 1[illegible]
Gould. 161. [illegible]
Gouy. 15. [illegible]
Govi. 233, 257. [illegible]
Graf. 121.
Grassmann (H.). [illegible] 214.
Griffe. 91.
Grinwis. 175. 177. 17[illegible]
Gromeka. 71.
Gruber. 252.
Grunert. 126*. 254.
Gruss. 131. 224. 227. [illegible] 250.
Guebhard. 14. 136. 1[illegible]
Guillet. 55. 63.
Günther (S.). 150. 151. 187.
Gyldén. 5, 12. 24, 65. 99.
Haag. 78. 150.
Habbe. 67.
Haberditzl. 226. 227.
Hain. 118*. 121*. 125*, 127*, 256. 259
Hall (As.). 9. 30, 33. 36. 160, 170.
Hällstén. 6.
Halphen. 76, 126.
Handl. 229.
Handmann. 224.
Hankel (W.). 108, 110. 114. 115. 117. 118.
Hann. 225, 226.
Hansen (P.-A.). 115. 116. 117.
Harting. 180.
Hartwig. 34, 35. 36. 37. 155, 163.
Harzer. 29. 201.
Haton de la Goupillière. 85. 127. 149.
Haussner. 258.
Hazen. 161.
Heis (E.). 84.
Helm. 121*.
Hellwig. 120*.
Hempel. 258.
Hennessy. 144.
Henry (C.). 264. 265.
Henry (P.). 8. 134.
Heringa. 178.

Borchardt. 78. 243.
Borel. 62.
Borrelly. 31. 32.
Börsch. 155, 157, 168.
Boss. 34.
Bosscha. 175, 178, 179.
Bougaïef. 71.
Bouglé. 55.
Bourguet. 59. 153.
Boussinesq. 106. 132. 135. 270. 271.
Boutigny. 138.
Bouty. 134, 136.
Brassine. 141.
Braunmühl (v.). 222.
Brédikhine. 28, 31. 38. 156. 170.
Bresse. 102, 133.
Bresson, 265.
Breusing. 158.
Brioschi. 77, 235.
Broda. 121*.
Brongniart (P.). 211.
Bruhns. 30, 33. 35. 36. 37. 113. 114. 161. 187, 192.
Bruns (H.). 165.
Budde. 120.
Burmester. 220.
Burnham. 168. 169.
Buss. 120.
Büttner. 170.
Cabanellas. 143.
Cailletet. 95.
Caligny (de). 8. 13.
Callandreau. 90, 102. 127. 137. 139. 140. 146, 193.
Candèze, 260.
Canet. 208.
Cantoni (G.). 54.
Cantor (G.). 128*.
Capelli. 195, 197, 201.
Carbonnelle, 84. 85.
Carnoy. 86.
Carpentier. 13.
Carrère. 142.
Cassani. 202.
Catalan. 106, 107.
Cauvet. 69.
Cayley, 241. 242, 243, 244.
Ceraski. 171.
Chambrier. 100.
Chase. 134, 137.
Chefik-Bey. 262.
Chelini. 199.
Cherbuliez. 119.
Chevreul. 232.
Ciamician. 224, 228. 231.
Cintolesi. 49. 54.
Clarinval. 113*.
Clavenad. 212.
Cobianchi. 51.
Cohen-Stuart. 175.
Colladon. 90.
Common. 156.
Conche. 105.
Copeland. 36. 163, 168.
Cornu. 10, 122, 134.
Cottereau. 59.
Courbe. 59. 149.
Cousin. 87.
Coutzolenc. 134.
Crafts. 105, 236.
Crocchi. 202.
Crookes. 233.
Crova. 96.
Cruls. 32, 237.
Čubr. 116*.
Curie. 146.
Curtze. 115*, 128*.
Dainelli. 198.
Darboux. 21, 72, 90. 102. 104, 143, 145, 151.
Darwin (G.-H.). 160.
Daubrée. 7, 209.
David. 143, 271.
Debrun. 9.
Dedekind. 140, 233.
De Fierlant. 84.
Delarue. 71.
Delgeur. 85.
Delsaux. 82, 86. 88.
Denza. 91.
Deprez. 104. 133. 134.
Desains. 146.
Desboves. 59, 63. 138.
De Tilly. 82.
Deville (R.). 206.
Dewulf. 263.
Diekmann. 120*.
Ditscheiner. 229.
Doberck. 30, 33, 34. 36, 37. 38, 157, 160. 162, 163, 164, 168, 170.
Dobiński. 119*, 121*.
Donders. 175, 178.
Donnini. 52.
Doolittle. 169.
Dostor. 69. 115*, 117*, 119*. 120*, 121*, 122*, 123*. 126*, 127*. 256, 261, 274.
Doubrava. 230.
Downing. 157.
Drasch. 226.
Drobisch. 110.
Droz. 265, 266.
Dubjago. 161.
Du Bois-Reymond (P.). 221.
Du Boys. 213.

Lez. 58. 65. 68, 70.
Liais. 163.
Lie. 220.
Ligowski. 117*, 256, 258, 259.
Lionnet. 64, 66, 70, 264.
Liouville (R.). 16.
Lipschitz. 12, 13.
Lissençon. 265.
Liventsof. 72.
Liznar. 227.
Lodin. 234.
Lœwy. 95, 231.
Lohrmann. 191.
Lohse. 155, 168, 171.
Lommel. 221.
Longchamps (de). 56, 148.
Lorenz (v.). 120*, 125*, 257.
Lorenzoni. 159.
Loschmidt. 224.
Low. 163.
Lucas (Éd.). 57, 64, 133, 149, 150, 152, 153, 154, 262.
Lucas (F.). 128.
Luther (R.). 154, 170.
Luther (W.). 154, 170.
Macé (J.). 141.
Macé de Lépinay. 63, 149.
Mach. 226, 228.
Mack. 124*, 125*.
Maglioli. 199.
Maleyx. 57, 58, 61, 266.
Mamke. 117*.
Mannheim. 135, 142, 150.
Mansion. 80, 85, 86, 88.
Marangoni. 49, 52.
Margottet. 27.
Margules. 228, 230.
Marie (G.). 204, 205.
Marie (M.). 121, 122.
Marre. 63.
Marth. 34, 35, 37, 158, 172.
Martin (A.). 234.
Martin (H.). 166, 169.
Martin (L.). 252.
Mascart. 16, 136, 233.
Mathieu (Ém.). 106, 148, 141.
Mathieu (J.-J.-A.). 70.
Matzka. 131.
Maupeou (de). 274.
Maximovitch (de). 271.
Mayer (A.). 110, 111, 113.
Mees. 176, 179.
Mehmke. 116*.
Meier. 105.
Meissel. 29, 128*, 158, 256, 259.
Méray. 17, 27, 272.
Mercadier. 8, 15, 16, 136.
Meyer (G.). 118*.
Meyer (M.-W.). 168, 171.
Meyl. 66.
Michaelis, 172, 178.
Milinowski. 41, 44.
Millosevich. 37, 163, 168.
Minding. 44.
Minozzi. 196.
Mittag-Leffler. 93, 95, 98.
Mock. 117*.
Mollame. 199.
Mondésir (de). 100, 103, 139, 144.
Moors. 173.
Moreno. 196.
Moret-Blanc. 58, 65, 67, 68, 69, 70, 262, 263, 264, 266.
Morisot. 133.
Mouchez. 8, 9, 96, 139, 236.
Mouchot. 141.
Moutard. 124.
Mugnaini. 198.
Müller (W.). 8.
Murmann. 249, 250.
Muzeau. 207.
Naccari. 46, 49, 50, 51.
Netto. 44, 116*.
Neugebauer. 168.
Neumann (C.). 108, 109, 113, 115, 116, 118.
Neumann (F.). 222.
Newcomb. 159.
Neyreneuf. 145, 235.
Nicati. 141.
Nobile. 154, 156.
Noeggerath. 257.
Nordenskiöld. 5, 6.
Nöther. 218.
Nyrén. 187.
Ocagne (d'). 147, 149, 153, 260.
Odalski. 139.
Onnen. 179.
Oppenheim. 39, 159, 166, 167.
Oppolzer (v.). 28, 97, 167, 169, 171, 187.
Oudemans. 36, 175, 178, 179.
Ovidio (d'). 203.
Padelletti. 203.
Padova. 51, 54.
Page. 208.
Palisa. 34, 35, 156, 157, 159, 161, 162, 166, 169, 171.
Pauchon. 9.
Pedro (S. M. D.). 100.
Peigné. 209.
Pellat. 136.
Pellet. 105, 138, 142.
Pelletreau. 112.

Pelz. 225, 226.
Pepin. 103, 181, 182, 183, 184, 185, 234, 235.
Percin. 210.
Périsse. 143.
Pernet. 237.
Perrier. 7, 8, 11, 237.
Perrodil (de). 213.
Perruche. 16.
Perry. 80.
Perty-Asterios. 121.
Peschka. 231.
Peter (B.). 35, 36, 37, 158, 160, 166.
Peters (?). 8.
Peters (C.-A.-F.). 166.
Peters (C.-F.-W.). 37, 164.
Peters (C.-H.-F.). 28, 34, 38, 155, 157, 161, 162, 164, 167.
Pfaundler. 224, 226.
Phillips. 102, 104, 105.
Picard (A.). 213.
Picard (É.). 8, 9, 11, 15, 77, 92, 97, 104, 136, 137, 139, 141, 145, 234.
Picard (P.). 236.
Pick. 49.
Pickering. 29, 155, 166.
Picquet. 127.
Pictet. 138.
Pierucci. 48, 51.
Pisani. 68, 69, 266.
Pisati. 46, 47, 48.
Pittarelli. 197, 202, 203.
Piuma. 204.
Plantamour. 12.
Plummer. 162.
Poincaré. 11, 105, 115, 142.
Poloni. 51, 53.
Polster. 122*.
Possner. 38.
Přibram. 229.
Pritchett. 31, 160, 164, 165, 167.
Ptaszycki. 63.
Puiseux (P.). 27.
Puluj. 224, 229.
Puschl. 227.
Quet. 236.
Radau. 102, 134, 141, 274.
Radicke. 121*.
Rancken. 163.
Rayet. 139.
Realis. 64, 69, 70, 256.
Reinhold. 119*.
Resal. 15, 92, 132, 134, 215, 269, 270.
Resio. 105.
Réthy. 250, 251, 254.
Reye. 41, 42.
Riccardi (M.). 199.
Ricci-Curbastro. 46, 47.
Riel. 186.
Righi. 47, 48, 50, 51, 54, 105, 235.
Rijke. 179.
Rilliet. 9.
Rink. 177.
Robaglia. 58, 64, 67, 68, 264.
Robbers. 30, 164.
Rochetti. 68, 263, 264.
Rodenberg. 215.
Rodet. 77, 79.
Rodgers. 33, 37.
Roiti. 48, 49, 50, 51, 52, 54.
Romero. 65.
Rossetti. 9, 45, 48, 50, 51, 53.
Rossi-Re (de). 182.
Rouché. 147.
Royer. 134.
Rozé. 132, 133.
Rubini. 197, 202.
Rümker. 165.
Sadebeck. 34.
Šafařick. 156.
Safford. 35.
Sainte-Claire Deville. 10, 16, 89, 132.
Saint-Germain (de). 61, 261, 268.
Saint-Venant (de). 89, 95.
Samot. 173.
Saporito-Ricca. 46.
Sawyer. 31.
Schäberle. 134, 165, 170.
Schaefer. 173.
Scheibner. 118.
Schell. 225.
Schenzl. 252.
Schiaparelli. 183.
Schlömilch. 111.
Schmidt (G.). 150.
Schmidt (J.-F.-J.). 32, 33, 37, 162, 165, 166, 191.
Schols. 176.
Scholtz. 117.
Schönholzer. 120.
Schoute. 172.
Schröder. 193, 214.
Schubert (H.). 119.
Schuhmeister. 224.
Schulhof. 250, 251.
Schur. 157.
Schwab. 33.
Schwarz (H.-A.). 212, 214, 270.
Sebert. 144, 146.
Secchi. 84.
Seelheim. 180.
Seeliger. 156, 157, 160, 165, 170.
Seewald. 224.

Lez. 58, 65, 68, 70.
Liais. 163.
Lie. 220.
Ligowski. 117*, 256, 258, 259.
Lionnet. 64, 66, 70, 264.
Liouville (R.). 16.
Lipschitz. 12, 13.
Lissençon. 265.
Liventsof. 72.
Liznar. 227.
Lodin. 234.
Lœwy. 95, 231.
Lohrmann. 191.
Lohse. 155, 168, 171.
Lommel. 221.
Longchamps (de). 56, 148.
Lorenz (v.). 120*, 125*, 257.
Lorenzoni. 159.
Loschmidt. 224.
Low. 163.
Lucas (Éd.). 57, 64, 133, 149, 150, 152, 153, 154, 262.
Lucas (F.). 128.
Luther (R.). 154, 170.
Luther (W.). 154, 170.
Macé (J.). 141.
Macé de Lépinay. 63, 149.
Mach. 226, 228.
Mack. 124*, 125*.
Maglioli. 199.
Maleyx. 57, 58, 61, 266.
Mamke. 117*.
Mannheim. 135, 142, 150.
Mansion. 80, 85, 86, 88.
Marangoni. 49, 52.
Margottet. 27.
Margules. 228, 230.
Marie (G.). 204, 205.
Marie (M.). 121, 122.
Marre. 63.
Marth. 34, 35, 37, 158, 172.
Martin (A.). 234.
Martin (H.). 166, 169.
Martin (L.). 252.
Mascart. 16, 136, 233.
Mathieu (Ém.). 106, 128, 141.
Mathieu (J.-J.-A.). 70.
Matzka. 131.
Maupeou (de). 274.
Maximovitch (de). 271.
Mayer (A.). 110, 111, 113.
Mees. 176, 179.
Mehmke. 116*.
Meier. 105.
Meissel. 29, 128*, 158, 256, 259.
Méray. 17, 27, 272.
Mercadier. 8, 15, 16, 136.
Meyer (G.). 118*.
Meyer (M.-W.). 168, 171.
Meyl. 66.
Michaelis, 172, 178.
Milinowski. 41, 44.
Millosevich. 37, 163, 168.
Minding. 44.
Minozzi. 196.
Mittag-Leffler. 93, 95, 98.
Mock. 117*.
Mollame. 199.
Mondésir (de). 100, 103, 139, 144.
Moors. 173.
Moreno. 196.
Moret-Blanc. 58, 65, 67, 68, 69, 70, 262, 263, 264, 266.
Morisot. 133.
Mouchez. 8, 9, 96, 139, 236.
Mouchot. 141.
Moutard. 124.
Mugnaini. 198.
Müller (W.). 8.
Murmann. 249, 250.
Muzeau. 207.
Naccari. 46, 49, 50, 51.
Netto. 44, 116*.
Neugebauer. 168.
Neumann (C.). 108, 109, 113, 115, 116, 118.
Neumann (F.). 222.
Newcomb. 159.
Neyreneuf. 145, 235.
Nicati. 141.
Nobile. 154, 156.
Noeggerath. 257.
Nordenskiöld. 5, 6.
Nöther. 218.
Nyrén. 187.
Ocagne (d'). 147, 149, 151, 260.
Odalski. 139.
Onnen. 179.
Oppenheim. 29, 159, 166, 167.
Oppolzer (v.). 28, 97, 167, 169, 171, 187.
Oudemans. 36, 175, 178, 179.
Ovidio (d'). 203.
Padelletti. 203.
Padova. 51, 54.
Page. 208.
Palisa. 34, 35, 156, 157, 159, 161, 162, 166, 169, 171.
Pauchon. 9.
Pedro (S. M. D.). 100.
Peigné. 209.
Pellat. 136.
Pellet. 105, 138, 142.
Pelletreau. 212.

Pelz. 213, 226.
Pepin. 103, 181, 182, 183, 184, 185, 232, 235.
Percin. 210.
Périsse. 143.
Pernet. 237.
Perrier. 7, 8, 11, 237.
Perrodil (de). 213.
Perruche. 16.
Perry. 80.
Perty-Asterios. 121.
Peschka. 231.
Peter (B.). 35, 36, 37, 158, 160, 166.
Peters (?). 8.
Peters (C.-A.-F.). 166.
Peters (C.-F.-W.). 37, 164.
Peters (C.-H.-F.). 28, 34, 38, 153, 157, 161, 162, 164, 167.
Pfaundler. 224, 226.
Phillips. 102, 104, 105.
Picard (A.). 213.
Picard (É.). 8, 9, 11, 15, 77, 92, 97, 104, 136, 137, 139, 141, 145, 234.
Picard (P.). 236.
Pick. 49.
Pickering. 29, 155, 166.
Picquet. 127.
Pictet. 138.
Pierucci. 48, 51.
Pisani. 68, 69, 266.
Pisati. 46, 47, 48.
Pittarelli. 197, 202, 203.
Piuma. 204.
Plantamour. 12.
Plummer. 162.
Poincaré. 11, 105, 125, 142.
Poloni. 51, 53.
Polster. 122*.
Possner. 38.
Přibram. 229.
Pritchett. 31, 160, 164, 165, 167.
Ptaszycki. 63.
Puiseux (P.). 27.
Puluj. 224, 229.
Puschl. 227.
Quet. 236.
Radau. 102, 134, 141, 274.
Radicke. 121*.
Rancken. 163.
Rayet. 139.
Realis. 64, 69, 70, 266.
Reinhold. 119*.
Resal. 15, 92, 132, 134, 251, 269, 270
Resio. 105.
Réthy. 250, 251, 254.
Reye. 41, 42.
Riccardi (M.). 199.
Ricci-Curbastro. 46, 47.
Riel. 186.
Righi. 47, 48, 50, 51, 54, 105, 235.
Rijke. 179.
Rilliet. 9.
Rink. 177.
Robaglia. 58, 64, 67, 68, 264.
Robbers. 30, 164.
Rochetti. 68, 263, 264.
Rodenberg. 215.
Rodet. 77, 79.
Rodgers. 33, 37.
Roiti. 48, 49, 50, 51, 52, 54.
Romero. 65.
Rossetti. 9, 45, 48, 50, 51, 53.
Rossi-Re (de). 182.
Rouché. 147.
Royer. 134.
Rozé. 132, 133.
Rubini. 197, 202.
Rümker. 165.
Sadebeck. 34.
Šafařick. 156.
Safford. 35.
Sainte-Claire Deville. 10, 16, 89, 106, 132.
Saint-Germain (de). 61, 261, 268.
Saint-Venant (de). 89, 95.
Samot. 173.
Saporito-Ricca. 46.
Sawyer. 31.
Schäberle. 134, 165, 170.
Schaefer. 173.
Scheibner. 118.
Schell. 225.
Schenzl. 252.
Schiaparelli. 186.
Schlömilch. 111.
Schmidt (G.). 130.
Schmidt (J.-F.-J.). 32, 33, 37, 157, 161, 165, 166, 191.
Schols. 176.
Scholtz. 117.
Schönholzer. 130.
Schoute. 172.
Schröder. 193, 214.
Schubert (H.). 119.
Schuhmeister. 224.
Schulhof. 250, 251.
Schur. 157.
Schwab. 33.
Schwarz (H.-A.). 242, 245, 270.
Sebert. 144, 146.
Secchi. 84.
Seelheim. 180.
Seeliger. 156, 157, 160, 165, 170.
Seewald. 224.

Serdobinsky. 72.
Seyboth. 30.
Sidersky. 259.
Sidler. 120.
Siebel. 259.
Simon (H.). 125*.
Sinram. 119*. 122*, 126*.
Sloudsky. 60. 72.
Smith (L.). 134.
Snellen. 180.
Sohncke (L.). 214.
Solin. 131.
Sondat. 68, 264.
Soret. 9.
Souchon. 30, 168, 274.
Souillart. 244.
Spitzer. 116*, 123*. 127*, 158.
Spörer. 155, 163.
Stamkart. 175.
Stefan. 227, 231.
Stephan. 133, 134, 236.
Stephanos. 76.
Sterneck. 227.
Stickelberger. 39, 43.
Stoll. 259.
Stolz. 216.
Strasser. 35, 160, 171, 227.
Streintz (Fr.). 51, 226, 227.
Streintz (H.). 226.
Streissler. 256.
Studnička. 129, 130.
Sturm (R.). 41. 214.
Sucharda. 123*.
Suppan. 253.
Swift. 31, 36.
Sylvester. 97, 99. 137, 138, 244.
Szily. 49, 248, 249, 251, 254.
Tacchini. 100, 155, 157, 161, 166, 167, 168, 170, 233, 235, 236.
Talayrach. 154.
Tannery (J.). 21.
Tatin. 14.
Tebbutt. 31, 164, 166, 170.
Tempel. 29, 33, 156.
Terquem. 145, 208.
Terrier. 66.
Terssen. 107.
Tessari. 200.
Thaer. 222.
Thalén. 232.
Thollon. 9, 11, 91, 236, 237.
Thomae. 239.
Thomé. 245.
Thraen. 29.
Tietjen. 34.
Tirelli. 196.
Tisserand. 7, 13, 103, 136, 158, 233.
Tissot. 64. 66, 267.
Todd. 34, 163, 169.
Tomachewitch. 72.
Torelli. 196, 197.
Toth. 249.
Tourrettes. 58, 59, 60.
Trépied. 145.
Treve. 90.
Troost. 106.
Trouvé. 232.
Tumlirz. 226.
Tupman. 32, 33, 34.
Turquan. 88, 232.
Uchard. 210.
U. G. 50.
Van den Berg. 172, 173, 177.
Van der Stok. 178.
Van der Waals. 177.
Van der Willigen. 187.
Van Geer. 177.
Veltmann. 123*.
Vénard. 153.
Ventéjol. 151.
Ventosa. 29.
Veronese. 202.
Vész. 249, 250.
Villarceau. 105, 132, 146, 232, 233.
Villari. 50, 52, 53, 54, 91, 105.
Violle. 8.
Viry. 233.
Vogel. 158, 159, 161, 162.
Vogt (H.). 44.
Wächter. 227.
Wallentin. 118*.
Warren de la Rue. 8.
Wassmuth. 117*, 118*.
Watson. 30, 155.
Webb. 156.
Weber (H.). 215.
Weber (W.). 118.
Weierstrass. 19.
Weiler. 159, 166, 167, 168.
Weill. 148, 153, 261.
Weineck. 253.
Weiss. 165.
Weltrubsky. 230.
Wendlandt. 114*.
Weyr (Ed.). 128*, 129, 130, 226.
Weyr (Em.). 128*, 129, 229, 231.
Wiedemann. 47, 52, 108.
Winckler (A.). 223.
Winnecke. 31, 32, 33, 155, 157, 159, 163, 192.
Winterberg. 34, 35, 256.
Wite. 233.
Wolf (R.). 28, 96, 162.
Worms de Romilly. 57.

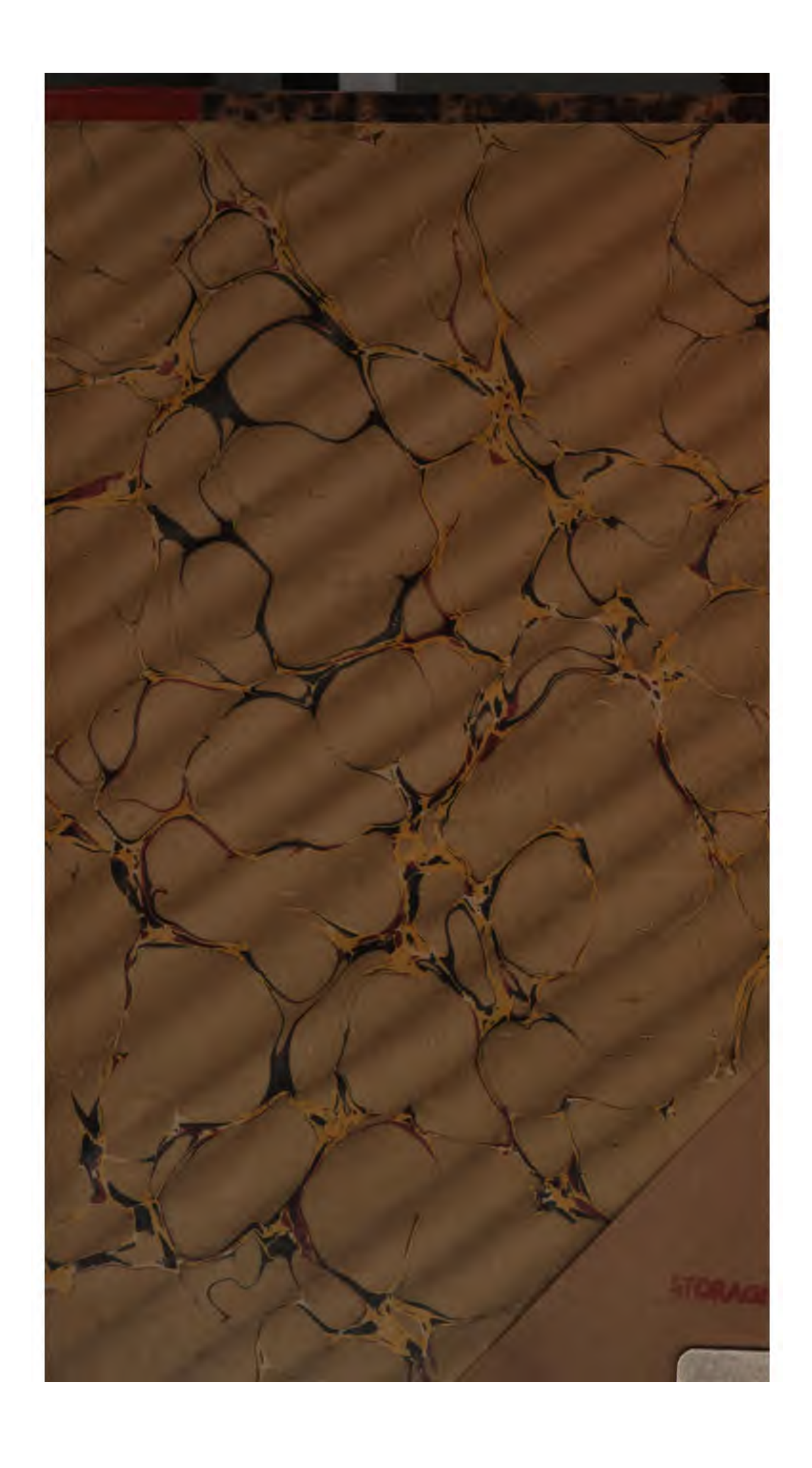
Young (C.-A.). 169.
Zahradnik. 115*, 117*, 118*, 119*, 129, 130, 131.
Zelbr. 33, 35, 37, 155, 166, 226, 231.
Zeuthen. 11, 12, 139.
Zöllner. 109.
Zolotaref. 270.
Zrzavý. 122*, 130.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME IV.

6152 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.






STORAG

